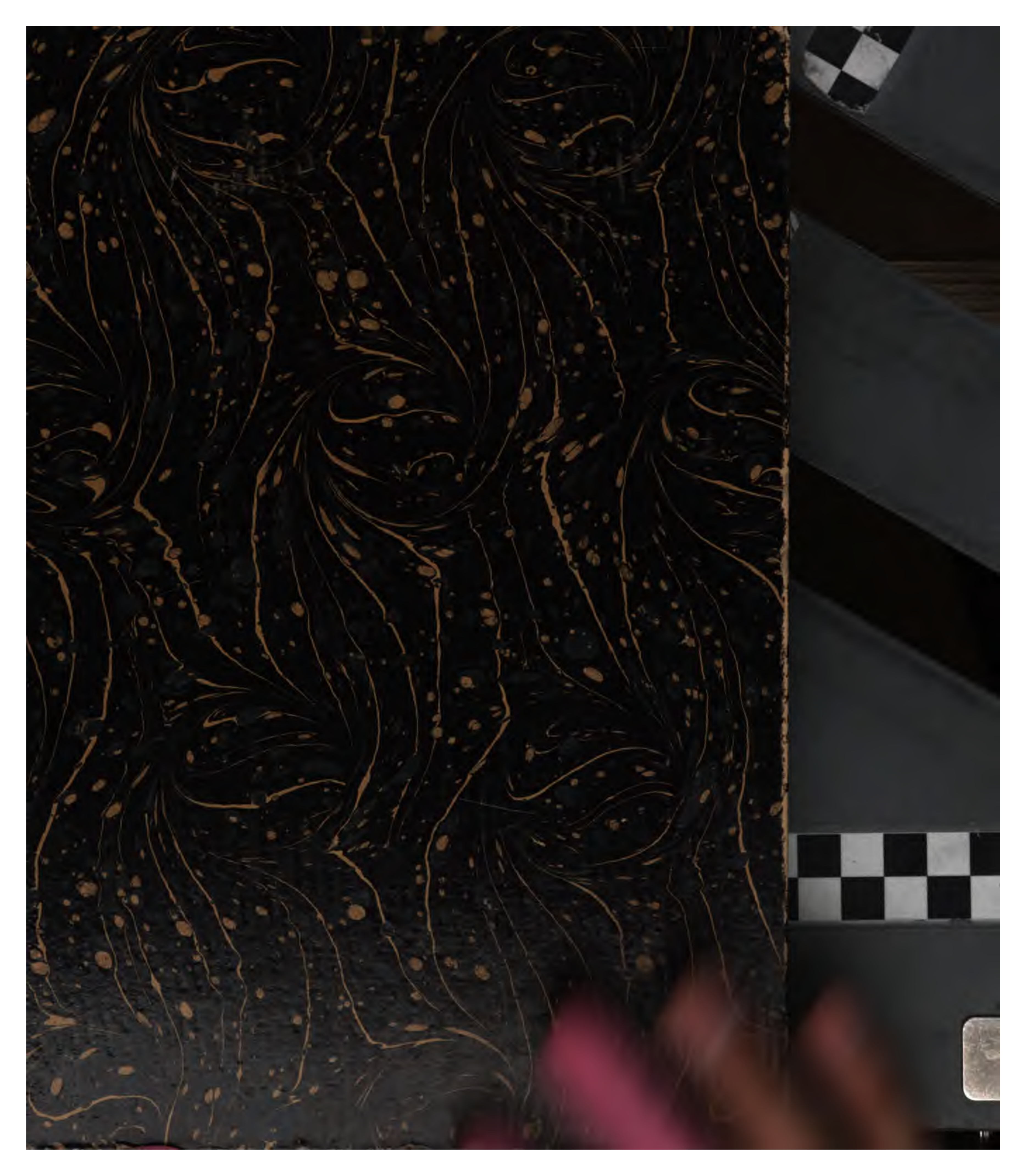


Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Vier und sechzigster Band.

In vier Heften.

Berlin, 1865.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des vier und sechzigsten Bandes.

De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum.

(Auctore *H. Schwarz.*)

Aequatio plani superficiem in planum explicabilem generantis ab uno parametro pendet; quamobrem

$$x\varphi_1(t)+y\varphi_2(t)+z\varphi_3(t)+w\varphi_4(t) = 0,$$

ubi $x:y:z:w$ sunt coordinatae, generalis forma illius est.

Superficies explicabiles, quae primae contemplanti sese offerunt, eae sunt, in quibus haec aequatio *rationaliter* a parametro pendet, sive formam habet

$$U = at^n + nbt^{n-1} + \cdots + q = 0,$$

ubi $a, b, \ldots q$ sunt functiones integrae lineares coordinatarum, n numerus integer.

Si numero n tribuuntur valores $n = 3, 4, 5$, his superficiebus et earum reciprocis omnes superficies explicabiles algebraicae continentur, quae ad hoc tempus accuratius sunt disquisitae, exceptis duabus superficiebus explicabilibus octavi ordinis, quarum altera duabus superficiebus secundi ordinis inscripta est, id est, tangentibus curvae intersectionis generatur, altera duabus superficiebus secundi ordinis circumscripta est, id est, planis tangentibus involvitur, quae illis sunt communia *).

Quum in aequationem plani generantis parameter t rationaliter ingreditur, his superficiebus proprium est, quod uno solo plano moto generari possunt.

Quamobrem vir Cel. *Cayley* tales superficies *planares* appellavit.

---

*) *A. Cayley,* Note sur les Hyperdéterminants. Hujus Diarii vol. 34, pag. 15. 1847.
— On the developable surfaces which arise from two surfaces of the second order. The Cambridge and Dublin Math. Journal. New Series, vol. V, pag. 46—58. 1850.
— On the developable derived from an equation of the fifth order. Ibidem pag. 152—159.
— On certain developable surfaces. The Quarterly Journ. of Math. 1863, pag. 108—126.
G. Salmon, Analytic Geometry of three dimensions, pag. 253—256. 1862.

„I propose, inquit *), to term the family of developables treated of in this paper 'planar developables'. In general, the coefficients of the generating plane of a developable being algebraical functions of a variable parameter t, the equation rationalized with respect to the parameter belongs to a system of n different planes; the developable which is the envelope of such a system may be termed a 'multiplanar developable' and in the particular case of n being equal to unity, we have a planar developable. It would be very desirable to have some means of ascertaining from the equation of a developable what the degree of its planarity' is."

Huic quaestioni nunc ita respondendum est.

Omnes curvae planae, quae in eadem superficie rectilinea irreductibili simplices sitae sunt, praeter generatrices ipsas, ad eandem classem algebraicam pertinent **), nam si duas contemplamur, unicuique puncto alterius per rectas superficiei unum punctum alterius algebraice respondet; itaque coordinatae alterius rationaliter per coordinatas alterius exprimi possunt. —

Si curva algebraica r^{ti} ordinis $\frac{(r-1)(r-2)}{1.2}-\varrho$ punctis duplicibus praedita est, coordinatae ejus rationaliter exprimi possunt:

si $\varrho = 0$, sive si curva maximo numero punctorum duplicium praedita est, per unam variabilem,

si $\varrho = 1$, per unam variabilem et radicem quadratam ex functione integra tertii vel quarti ordinis hujus variabilis,

si $\varrho = 2$, per unam variabilem et radicem quadratam ex functione integra quinti vel sexti ordinis,

si $\varrho > 2$, coordinatae rationaliter exprimi possunt per unam variabilem ξ et algebraicam functionem ejus η, quae junguntur aequatione μ^{ti} ordinis secundum utramque variabilem, ubi $\varrho = 2\mu - 3$ aut $= 2\mu - 2$.

In casu generali coordinatae non possunt rationaliter exprimi per unam variabilem ξ et functionem algebraicam ejus η, radicem aequationis algebraicae $F(\xi, \eta) = 0$, quae secundum variabilem η inferioris ordinis est quam μ^{ti}.

In eadem classe algebraica, qua una sectio plana simplex, tota superficies rectilinea ponenda est.

Si igitur in superficie rectilinea aut una recta simplex sita est, quae non est una generatricium, sive talis, per quam omnes generatrices superficiei

*) Camb. and Dubl. Math. Journ. N. S. vol. V. pag. 158.

**) *Riemann*, Theorie der *Abel*schen Functionen. Hujus Diarii vol. 54, pag. 133.

transeunt, — id quod in superficiebus explicabilibus fieri non potest —, aut una sectio conica simplex, aut una curva tertii ordinis puncto duplici praedita, aut alia curva simplex cum maximo numero punctorum duplicium, superficies haec rectilinea in ea classe ponenda erit, quae pertinet ad valorem $\varrho = 0$.

Idem de superficiebus in planum explicabilibus dicendum; aequatio plani generantis rationaliter exprimi potest per easdem variabiles ξ et η.

Si igitur m est ordo curvae recessus, x ordo curvae duplicis superficiei explicabilis r^{ti} ordinis, erit

$$\varrho = \frac{(r-1)(r-2)}{1.2} - (m+x).$$

Si hic numerus ϱ aequalis est cifrae, superficies explicabilis est planaris, si $= 1$ vel $= 2$, biplanaris; si ϱ est > 2, in casu generali ordo *planaritatis* superficiei explicabilis est $\frac{1}{2}(\varrho+3)$ aut $\frac{1}{2}(\varrho+2)$.

Jam disquisitionibus, quae sequuntur, demonstrabimus, omnes superficies explicabiles proprias primorum septem ordinum esse planares.

Superficies explicabiles primorum trium ordinum sunt impropriae, id est, aut coni vel cylindri, aut systemata his reciproca, systemata omnium rectarum curvam planam tangentium, quae quodammodo pro superficiebus explicabilibus haberi possunt. Superficies explicabiles proprias tertii ordinis non existere, ita demonstrari potest. Quaevis superficies explicabilis propria curvam cuspidalem habet; superficies tertii ordinis irreductibilis praeter rectam curvam duplicem habere nequit, recta autem curva cuspidalis superficiei explicabilis esse non potest; q. d. e.

Superficies explicabiles quarti ordinis.

Superficies explicabiles quarti ordinis earumque proprietates penitus a geometris sunt exploratae.

Omnes superficies explicabiles quarti ordinis inter se sunt collineares et reciprocae; aequatio plani generantis formae est

$$at^3+3bt^2+3ct+d = 0,$$

aequatio superficiei ipsius

$$(ad-bc)^2-4(b^2-ac)(c^2-bd) = 0.$$

Curva recessus tertii ordinis est, et tangentibus curvarum tertii ordinis duplicis curvaturae superficies explicabiles quarti ordinis generantur.

Quodvis planum tangens duas generatrices infinite propinquas et sectionem conicam exsecat; si duo plana tangentia contemplamur, alterum planum tangit sectionem conicam altero plano exsectam; duae sectiones conicae communem habent rectam tangentem. Hac ratione constructio synthetica superficiei explicabilis quarti ordinis data est:

Omnibus planis, quae tangunt duas sectiones conicas in planis diversis sitas, quibus una recta tangens est communis, circumscribitur superficies explicabilis quarti ordinis.

Generalius:

Si duabus superficiebus secundi ordinis una recta est communis, superficies explicabilis et inscripta et circumscripta quarti ordinis est.

Quaevis superficies explicabilis quarti ordinis sibi ipsa est reciproca et reciproce sita secundum infinitam multitudinem superficierum secundi ordinis ex. gr.

$$k^3 a^2 - 3k^2 b^2 + 3k c^2 - d^2 = 0.$$

Superficies explicabiles quinti ordinis.

Superficies explicabiles quinti ordinis earumque proprietates a viris Ill. *Cayley*, *Chasles*, *Cremona* tam copiose jam examinatae sunt *), ut fere nihil ab his nobis relictum sit.

Quum tamen methodus, qua rem aggressi sumus, tam sit simplex et elementaris, ut omnes proprietates generales ex ea quasi ex ipso fonte deduci possint, has superficies, primas superficies explicabiles proprias imparis ordinis, paullo accuratius examinemus, quam ad theorema nostrum demonstrandum opus est.

Quodvis planum tangens superficiem explicabilem quinti ordinis duas generatrices infinite propinquas et curvam tertii ordinis exsecat.

Haec curva irreductibilis est et generatricibus in puncto non singulari tangitur, in alio puncto secatur, si planum tangens curvam recessus osculatur in puncto non singulari.

---

*) *A. Cayley*, On the developable surfaces which arise from two surfaces of the second order. L. c.

— „*Special* Quintic Developable." Quart. Journ. 1863. pag. 114—121. Conf. *Salmon*, Anal. Geom. of three dim. pag. 254.

Chasles, Propriétés des courbes à double courbure du quatrième ordre provenant de l'intersection de deux surfaces du second ordre. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, vol. 54. 1862. I. pag. 317—324. 418—429.

— Propriétés des surfaces développables circonscrites à deux surfaces du second ordre. Ibidem pag. 715—722.

L. Cremona, Sur les surfaces développables du cinquième ordre. Ibidem pag. 604—608.

Curva recessus superficierum explicabilium quinti ordinis majoris ordinis est quam tertii, nam tangentibus curvarum tertii ordinis superficies explicabiles quarti ordinis generari vidimus.

Quo loco planum aliquod curva recessus sive cuspidali superficiei explicabilis perforatur, sectio plana cuspide praedita est.

In puncto osculationis plani tangentis tria puncta curvae recessus consumuntur; itaque curva plana tertii ordinis, in hoc plano tangente sita, una cuspide praedita est; plures habere non potest.

Jam ex hac re concludere possumus, omnes superficies explicabiles proprias quinti ordinis esse planares.

Omnes curvae tertii ordinis cuspide praeditae hac forma continentur

$$a^2d-b^3 = 0;$$

aequatio rectae tangentis est $at^3+3bt^2+d=0$, punctum $a=0$, $b=0$ est cuspis, $a=0$ recta tangens cuspidem, punctum $b=0$, $d=0$ est punctum inflexionis, recta $d=0$ recta tangens inflexionalis.

Planum tangens superficiem explicabilem, quod ducitur per rectam $d=0$, est planum tangens inflexionale sive stationarium; praeter tres generatrices infinite propinquas sectionem conicam exsecat, quae tangitur priore plano superficiem tangente, itaque etiam recta $d=0$, quae est intersectio duorum planorum.

A quovis puncto rectae $d=0$ et ad sectionem conicam et ad curvam tertii ordinis una recta tangens proficiscitur; aequatio plani per has rectas ducti, sive plani superficiem explicabilem generantis, omnibus reductionibus factis hujus formae est:

$$U = at^4+4bt^3+6ct^2+e = 0.$$

Virum Cel. *Cayley*, qui primus hanc formam tractavit, fugit, hanc generalem esse aequationem plani tangentis superficierum explicabilium quinti ordinis.

Quum quatuor tantum plana a, b, c, e in hac aequatione inveniantur, concludimus:

Omnes superficies explicabiles quinti ordinis propriae inter se sunt collineares et reciprocae.

Omnes sunt praeditae uno plano stationario $(e=0)$ *et uno puncto stationario* $(a=0, b=0, c=0)$ *curvae recessus.*

Si ponitur $t=t_0$ et $t=-t_0$ prodeunt aequationes planorum

$$at_0^4+4bt_0^3+6ct_0^2+e = 0,$$
$$at_0^4-4bt_0^3+6ct_0^2+e = 0;$$

haec plana se secant in recta $b=0$, $at_0^4+6ct_0^2+e=0$; omnes hae rectae in

plano $b=0$ sitae, sectionem conicam $b=0$, $9c^2-ae=0$ circumscribunt, quae est curva duplex superficiei.

Puncto $a=0$; $c=0$, $e=0$ pro centro, plano $b=0$ pro plano collineationis sumpto, altera pars systematis cum altera erit collinearis atque collineariter sita; valori $t=t_0$ respondet $t=-t_0$.

Collineationis species ea est, quae vocatur *harmonica*.

Per generatricem aliquam superficiei, transeunt plana

$$\begin{aligned} U = \;& at^4+4bt^3+6ct^2+\; e=0, \\ \frac{1}{4t}\frac{\partial U}{\partial t} = \;& at^2+3bt+3c \qquad =0, \\ & -at^4 \qquad +6ct^2+3e=0. \end{aligned}$$

Plano $at^2+3bt+3c=0$ circumscribitur conus $3b^2-4ac=0$; hic conus continet lineam recessus.

Planum $-at^4+6ct^2+3e=0$ duas continet generatrices, quia idem evadit et pro valore $t=t_0$ et pro valore $t=-t_0$; praeterea ex superficie curvam tertii ordinis cum puncto duplici exsecat, curvam recessus bis tangit; circumscribit autem conum

$$ae+3c^2 = 0,$$

qui item per curvam recessus transit.

Alterius coni centrum $a=0$, $b=0$, $c=0$ positum est in superficie alterius, ita tamen, ut commune habeant planum tangens $a=0$; contactus igitur iis est stationarius.

Aequatio superficiei ipsius has accipit formas:

$$(1.)\qquad a^3e^2-18a^2c^2e+54ab^2ce+81ac^4-27b^4e-54b^2c^3 = 0,$$

punctum $a=0$, $b=0$, $c=0$ est punctum triplex superficiei:

$$(2.)\qquad (a^3e-18a^2c^2+54ab^2c-27b^4)e+27c^3(3ac-2b^2) = 0,$$

plano stationario $e=0$ generatrix inflexionalis $e=0$, $c=0$ triplex, sectio conica $e=0$, $3ac-2b^2=0$ simplex exsecatur;

$$(3.)\qquad a(ae-9c^2)^2+27b^2(2ace-b^2e-2c^3) = 0,$$

$b=0$, $ae-9c^2=0$ est sectio conica duplex superficiei;

$$(4.)\qquad a(ae+3c^2)^2-6c(ae+3c^2)(3b^2-4ac)-3e(3b^2-4ac)^2 = 0.$$

Omnes superficies secundi ordinis per lineam recessus transeuntes, sive circumscriptae superficiei explicabili, hac forma continentur:

$$(ae+3c^2)+\tau(3b^2-4ac) = 0,$$

binae contactum habent stationarium; quaevis praeterea per duas generatrices superficiei explicabilis in plano

$$a\tau^2+6c\tau-3e = 0$$

sitas transit, id quod ex quarta forma aequationis superficiei intelligitur.

Pro coordinatis punctorum curvae recessus habemus aequationes

$$U=0, \quad \frac{\partial U}{\partial t}=0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0,$$

vel aequivalentes

$$at^2+2bt+c=0, \quad bt+2c=0, \quad ct^2+e=0;$$
$$at^4+3e \quad =0, \quad bt^3-2e=0; \quad ct^2+e=0;$$

sive

$$a:b:c:e = 3:-2t:t^2:-t^4.$$

Superficie secundi ordinis

$$\tfrac{1}{3}k^4a^2-2k^3b^2+6k^2c^2-e^2 = 0,$$

ubi k est constans arbitraria, *pro directrice adhibita,* plano

$$at^4+4bt^3+6ct^2+e = 0$$

respondet punctum

$$a:b:c:e = 3:-\frac{2k}{t}:\frac{k^2}{t^2}:-\frac{k^4}{t^4},$$

superficies explicabilis quinti ordinis sibi ipsa est reciproca et reciproce sita; valori $t=t_0$ respondet $t=\frac{k}{t_0}$.

Pro valoribus $t=\pm\sqrt{k}$ generatrices sibi ipsae respondent; itaque quaevis hujusmodi superficies secundi ordinis per duas generatrices transit.

Hoc theoremate omnes superficierum explicabilium quinti ordinis proprietates dualitatis lege conjunguntur.

Cuique superficiei secundi ordinis per lineam recessus ductae respondet altera superficies ejusdem ordinis, quae tangitur omnibus planis superficiem tangentibus, sive quae superficiei explicabili inscripta est.

Omnes hae superficies contactum habent stationarium; punctum contactus situm est in puncto osculationis plani inflexionalis ($e=0, c=0, b=0$), quo plano quatuor puncta urvae infinite propinqua continentur. Duobus illis conis secundi ordinis $3b^2-4ac=0$, $ae+3c^2=0$ per lineam recessus transeuntibus respondent duae sectiones conicae $e=0$, $3ac-2b^2=0$; $b=0$, $ae-9c^2=0$, quas supra invenimus; punctum $e=0$, $c=0$, $b=0$ iis commune est, ita quidem, ut planum $e=0$ alterius transeat per rectam tangentem $b=0$, $e=0$ alterius.

Si duabus superficiebus secundi ordinis contactus est stationarius, inter omnes superficies ejusdem ordinis, quae per intersectionem earum duci possunt, duo coni, et inter omnes superficies secundi ordinis, quae cum illis duabus eidem superficiei explicabili inscriptae sunt, duae sectiones conicae reperiuntur. Aequationes et conorum et sectionum conicarum semper reduci possunt *) ad formas illas, quas supra computavimus.

Itaque habemus theorema:

Si duabus superficiebus secundi ordinis contactus est stationarius, superficies explicabilis et inscripta et circumscripta est superficies explicabilis generalis quinti ordinis.

Secundum theorema, quod jam a viro Cel. *Poncelet* propositum est**), superficiem explicabilem, reciprocam curvae alicui, ejusdem esse ordinis atque superficiem explicabilem tangentibus illius curvae generatam, — sive superficies duas explicabiles, quarum altera alteri est reciproca, ejusdem esse ordinis —; secundum hoc theorema, qualibet superficie secundi ordinis pro directrice adhibita, curvae recessus superficiei explicabilis quinti ordinis respondet superficies explicabilis quinti ordinis; superficiei explicabili quinti ordinis respondet curva quarti ordinis cuspide praedita.

Si unam earum superficierum secundi ordinis pro directrice sumimus, quae per ipsam curvam recessus transit, superficies explicabilis reciproca huic curvae ea est, quae superficiei secundi ordinis secundum hanc curvam recessus circumscribitur.

Itaque per curvam recessus superficiei explicabilis quinti ordinis caterva superficierum explicabilium quinti ordinis transit, quibus unum idemque est planum inflexionale $a = 0$, (planum tangens cuspidem curvae recessus superficiei principalis), et quarum curvae recessus cuspides sitas habent in generatrice inflexionali $e = 0$, $c = 0$ superficiei principalis.

Inter easdem superficies inveniuntur quoque duo illi coni secundi ordinis. Si superficiem secundi ordinis superficiei explicabili quinti ordinis inscriptam pro directrice sumimus, superficiei explicabili respondet ea curva, secundum quam superficies inscripta superficiem explicabilem tangit.

---

*) *A. Cayley,* On the developable surfaces which arise from two surfaces of the second order. L. c.

**) *Poncelet,* Mémoire sur la Théorie générale des polaires réciproques. Hujus Diarii vol. 4, pag. 24.

Quaevis superficies secundi ordinis inscripta tangit superficiem secundum curvam quarti ordinis cuspide praeditam; omnes hae cuspides sitae sunt in puncto osculationis plani inflexionalis ($e=0, c=0, b=0$); illa autem puncta, quae huic puncto curvae recessus collineariter respondent, sita sunt in generatrice curvam recessus in ipsius cuspide tangente ($a=0, b=0$).

Praeterea quaevis superficies inscripta, sicut quaevis circumscripta per duas generatrices superficiei transit.

Inter catervam harum curvarum quarti ordinis, quae reciproca est catervae superficierum explicabilium circumscriptarum, reperiuntur quoque duae illae sectiones conicae.

Restat, ut computemus aequationem catervae superficierum secundi ordinis inscriptarum.

Planum tangens aliquod superficiem

$$(ae+3c^2)+\tau(3b^2-4ac) = 0$$

est:

$$(e-4c\tau)a'+6b\tau b'+(6c-4a\tau)c'+ae' = 0;$$

huic plano respondet, superficie secundi ordinis

$$\tfrac{1}{3}a^2 \quad -2b^2 \qquad +6c^2 \quad -e^2 = 0$$

pro directrice adhibita, punctum

$$\begin{aligned} & a'' \quad : \quad b'' \quad : \qquad c'' \qquad : e'' \\ = \; & 3(e-4c\tau):-3b\tau:(c-\tfrac{2}{3}a\tau):-a. \end{aligned}$$

Eliminatis coordinatis $a:b:c:d$ superficiei

$$(ae+3c^2)+\tau(3b^2-4ac) = 0,$$

prodit aequatio superficiei reciprocae, superficiei explicabili inscriptae,

$$b^2-(ae-9c^2)\tau-12ce\tau^2+4e^2\tau^3 = 0.$$

Hujus functionis discriminans praeter aequationem superficiei nostrae explicabilis factorem alienum e^3 continet.

Superficies explicabiles sexti ordinis.

Superficies explicabiles sexti et septimi ordinis pro se ipsis adhuc minus disquisitae sunt, quamquam singulae species earum jam dudum notae fuerunt*).

---

*) *A. Cayley, G. Salmon, Chasles*, ll. cc. *G. Salmon*, On the classification of curves of double curvature. Camb. and Dubl. Math. Journ. N. S. vol. V., p. 23—46.

Vir Cel. *Chasles* omnes species superficierum explicabilium sexti ordinis invenit *).

Planum tangens ex superficie explicabili sexti ordinis duas generatrices infinite propinquas et curvam quarti ordinis exsecat, quae curva plus tres cuspides habere nequit. Quamobrem curva recessus superficiei explicabilis sexti ordinis, quum in puncto osculationis plani tangentis tria puncta consumantur, majoris ordinis esse non potest quam sexti, neque minoris quam quarti.

Itaque curva quarti ordinis in plano tangente sita una cuspide praedita est.

Nunc contemplemur superficiem explicabilem, quae est reciproca curvae recessus prioris superficiei explicabilis et quae eadem est sexti ordinis.

Si in quovis plano m puncta curvae recessus alterius superficiei explicabilis sita sunt, a quovis puncto m plana alteram superficiem explicabilem tangentia proficiscuntur. Hinc concludimus, superficies explicabiles sexti ordinis non posse majoris classis esse quam sextae, neque minoris quam quartae.

Classis superficiei explicabilis eadem est, atque classis sectionis alicujus planàe non singularis. Curvae autem quarti ordinis, de quibus locuti sumus, quoniam in uno plano tangente jam sunt sitae, majoris classis esse non possunt quam quintae. Curva plana quarti ordinis, una cuspide praedita, non aliter potest fieri quintae aut minoris classis, nisi si praeter hanc cuspidem duobus punctis duplicibus praedita est.

Quam ob causam coordinatae talis curvae rationaliter per unam variabilem exprimi possunt. (Vide pag. 2.)

Omnes igitur superficies explicabiles sexti ordinis propriae sunt planares.

Continetur autem aequatio plani generantis in his formis:

$$\begin{aligned} at^4+4bt^3+\ 6ct^2+\ 4dt+e \qquad &= 0, \\ at^5+5bt^4+10ct^3+10dt+5et+f &= 0, \\ at^6+6bt^5+\cdots \qquad\qquad\qquad +g &= 0. \end{aligned}$$

Sit $U=0$ aequatio plani superficiem explicabilem generantis, ab uno parametro t rationaliter pendens; ponimus, nullum valorem parametri huic aequationi identice satisfacere.

---

*) *Chasles,* Digression relative aux surfaces développables du sixième ordre. Comptes rendus vol. 54. 1862. I. pag. 718.

Aequationibus $U=0$ et $\frac{\partial U}{\partial t}=0$ pro quovis valore parametri in casu generali recta determinatur, una generatricium.

Attamen fieri potest, ut his aequationibus pro uno aut pro pluribus singulis valoribus parametri idem planum repraesentetur. His valoribus ii adnumerandi sunt, qui aequationi $\frac{\partial U}{\partial t}=0$ identice satisfaciunt, si tales exsistunt.

Locum autem omnium punctorum, quorum coordinatae pro eodem valore parametri his duabus aequationibus satisfaciunt, invenimus, si eam functionem coefficientium, quae vocatur discriminans functioni U, cifrae aequalem ponimus.

Superficies sic determinata ex superficie explicabili irreductibili, involuta plano $U=0$, et ex singulis planis constat.

Aequatio superficiei explicabilis plus semel factor discriminantis esse potest, in quo casu U rationaliter pendet a functione rationali non lineari parametri.

Alia autem ratione fieri non potest, ut sit superficies explicabilis minoris ordinis quam ipse discriminans. Superficies explicabilis involuta plano

$$U=at^4+4bt^3+6ct^2+4dt+e=0,$$

$$(ae-4bd+3c^2)^3-27(ace+2bcd-ad^2-eb^2-c^3)^2 = 0$$

revera sexti ordinis est. Superficies explicabilis involuta plano

$$U = at^5+5bt^4+\cdots+f = 0$$

in casu generali est octavi ordinis; ut ad sextum ordinem reducatur, necesse est, pro duobus, aut diversis, aut infinite propinquis valoribus variabilis t, aequationes $U=0$ et $\frac{\partial U}{\partial t}=0$ idem planum repraesentare.

In priore casu aequatio plani generantis adhibita substitutione lineari $t'=\frac{t-t_1}{t-t_2}$ in hanc transit

$$at^5+5\varkappa at^4+10ct^3+10dt^2+5\lambda ft+f = 0,$$

in posteriore in hanc formam transformari potest

$$at^5+5bt^4+10ct^3+10\varkappa ft^2+f = 0.$$

Etiam superficies hisce reciprocae quintae classis sunt.

Superficies generalis explicabilis sexti ordinis et sextae classis est superficies reciproca ejus, quae generatur plano

$$at^4+4bt^3+6ct^2+4dt+e = 0,$$

ubi inter aequationes planorum a, b, c, d, e aequatio identica intercedit

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d+\varepsilon e \equiv 0.$$

Namque si superficies est sextae classis, curva illa quarti ordinis plano tangente exsecta quintae classis et una cuspide et duabus punctis duplicibus praedita est; curva igitur recessus quarti ordinis est, itaque superficies reciproca quartae classis. — De curvis duplicis curvaturae, quarum tangentibus singulae species superficierum explicabilium sexti ordinis generantur, infra agemus.

Superficies explicabiles septimi ordinis.

Ad disquirendas superficies explicabiles septimi ordinis utile est theorema, quod ad omnes spectat superficies explicabiles imparis ordinis.

Conus ex puncto aliquo spatii curvae recessus superficiei explicabilis r^{ti} ordinis circumscriptus r^{tae} classis est. Si igitur r est numerus impar, hic conus semper impari multitudine laterum cuspidalium praeditus est, id quod fieri nequit, nisi in ipsa curva recessus impar multitudo cuspidum sita est.

Curva aliqua plana in superficie explicabili r^{ti} ordinis sita r^{ti} ordinis est; si r est numerus impar, imparem multitudinem tangentium inflexionalium habet. Itaque demonstravimus:

In quavis superficie explicabili imparis ordinis impar multitudo et cuspidum in curva recessus sitarum et planorum tangentium inflexionalium invenitur.

Unum planum tangens inflexionale ex superficie explicabili septimi ordinis exsecat tres generatrices infinite propinquas et curvam quarti ordinis. Si fiat, ut haec curva quarti ordinis ex sectione conica duplici constet, hanc conditionem nunc excludentes postremo loco tractabimus.

Curva quarti ordinis, neque si irreductibilis est, neque si ex curva inferioris ordinis et singulis generatricibus constat, plus tres cuspides habere potest; quamobrem curva recessus majoris ordinis esse non potest quam septimi, quia in puncto osculationis plani inflexionalis quatuor puncta consumuntur.

Curva recessus majoris ordinis est, quam quarti, nam una tantum species curvarum duplicis curvaturae quarti ordinis cuspide praeditarum exstat, quarum tangentibus superficies explicabiles quinti ordinis generari vidimus.

Curva recessus neque minoris ordinis est quam quinti, neque majoris quam septimi.

Itaque superficies explicabiles septimi ordinis minoris classis esse non possunt quam quintae, neque majoris quam septimae.

Curva quarti ordinis in plano inflexionali sita majoris classis esse non potest, quam quintae, quia hoc planum inflexionale pro duobus planis tangentibus habendum est. Si igitur haec curva quarti ordinis irreductibilis est,

necesse est, duo puncta duplicia accedere. Si cuspis illa secundae speciei est, necesse est, unum punctum duplex accedere.

Sin autem curva quarti ordinis constat ex curva tertii ordinis et una recta generatrice, haec curva tertii ordinis puncto duplici est praedita, nam omnes curvae tertii ordinis non praeditae puncto duplici sextae sunt classis.

Si curva quarti ordinis ex duabus constat generatricibus et sectione conica, hujus coordinatae rationaliter per unum parametrum exprimi possunt.

Unus restat casus, quem supra exclusimus: curva quarti ordinis ex sectione conica duplici constare potest. Hujus disquisitio cum difficultate aliqua videtur conjuncta esse. Propterea in medio relinquentes, num tales superficies explicabiles septimi ordinis exsistere possint, demonstrabimus: si talis superficies exsistit, aliud planum inflexionale in ea situm est, cujus sectio non constat ex sectione conica duplici, quare haec superficies in iis superficiebus continetur, quas jam disquisivimus.

Planum inflexionale in puncto osculationis quatuor puncta cum curva recessus communia habet; sin plura haberet, plus tres generatrices in hoc plano sitae essent. Praeter haec puncta cum illa commune habet unum, quia curva recessus inferioris ordinis esse non potest quam quinti. In hoc puncto recta tangens curvae recessus non sita est in plano inflexionali: si esset, nova generatrix in hoc plano sita esset. Sectio plana superficiei explicabilis cuspide praedita est, quo puncto planum ejus curva recessus perforatur. Haec autem sectio conica duplex nullam praebet cuspidem primae speciei. Proinde necesse est, planum osculans curvam recessus in eo puncto, in quo curva planum nostrum inflexionale perforat, quatuor puncta infinite propinqua continere. Itaque aut hoc planum est aliud planum inflexionale, aut punctum est cuspis. Cuspis autem esse non potest, quia cuspis curvae recessus est punctum triplex superficiei explicabilis, ut in superficiebus explicabilibus quinti ordinis punctum $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, pag. 6.

Restat, ut planum sit *aliud* planum inflexionale. Exemplo sunt superficies explicabiles quinti ordinis; planum $b = 0$ exsecat sectionem conicam duplicem; curva recessus hoc planum in puncto $b = 0$, $c = 0$, $e = 0$ perforat; $e = 0$ est planum inflexionale.

Aliud exemplum praebet superficies explicabilis octavi ordinis involuta plano

$$at^6 + 6\varkappa at^5 + 15ct^4 + 20\lambda at^3 + 15et^2 + g = 0.$$

Planum tangens inflexionale $a = 0$ exsecat sectionem conicam duplicem

$4gc - 15e^2 = 0$; planum $a = 0$ in puncto $a = 0$, $g = 0$, $e = 0$ curva recessus perforatur: planum $g = 0$ est planum inflexionale.

In casu, quem tractamus, novum planum inflexionale tres generatrices infinite propinquas et curvam quarti ordinis exsecat; haec autem non potest constare ex sectione conica duplici.

Nam si res ita se haberet, in superficie explicabili septimi ordinis duae sectiones conicae sitae essent, quibus unum punctum est commune; omnibus autem planis, quae tangunt duas sectiones conicas, quibus unum punctum est commune, in planis diversis sitas, circumscribitur superficies explicabilis sexti ordinis et sextae classis *).

Itaque tales superficies, si invenirentur, jam in iis essent contentae, quas supra disquisivimus.

Semper igitur in superficie explicabili septimi ordinis curva simplex invenitur, cujus coordinatae rationaliter per unam variabilem exprimi possunt. Consequimur igitur theorema:

Omnes superficies explicabiles septimi ordinis propriae sunt planares et aut quintae aut sextae aut septimae classis.

Itaque demonstravimus, quod nobis proposueramus:

Omnes superficies explicabiles propriae primorum septem ordinum sunt planares.

Proprietates autem superficierum explicabilium primorum septem ordinum, quae in singularitatibus earum positae sunt, hac tabula complectimur:

m	r	n	g	h	α	β	x	y	γ	t	k	R
3	4	3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	5	4	2	2	1	1	2	2	0	0	0	2
4	6	6	6	3	4	0	6	4	4	0	6	6
5	6	5	4	4	2	2	5	5	2	0	4	6
6	6	4	3	6	0	4	4	6	0	0	3	6
5	7	7	10	5	5	1	10	8	7	2	22	13
6	7	6	7	7	3	3	9	9	6	1	18	12
7	7	5	5	10	1	5	8	10	5	0	15	11

---

*) *Cayley, Salmon, Chasles,* ll. cc.

In hac tabula significatur

litera

m ordo curvae recessus,
r ordo superficiei explicabilis,
n classis superficiei,

g multitudo tangentium duplicium sectionis planae,
h multitudo punctorum duplicium apparentium curvae recessus,

α multitudo planorum tangentium inflexionalium,
β multitudo cuspidum curvae recessus,

x ordo curvae duplicis superficiei,
y multitudo tangentium duplicium apparentium curvae recessus sive classis ejus superficiei explicabilis, quae generatur planis curvam recessus bis tangentibus,

γ multitudo eorum punctorum curvae recessus, per quae alia generatrix superficiei transit curvam in hoc puncto non tangens,
t multitudo punctorum, per quae tres generatrices superficiei transeunt,
k multitudo punctorum duplicium apparentium curvae duplicis x^{ti} ordinis,
R ordo superficiei explicabilis tangentibus curvae duplicis x^{ti} ordinis generata.

Singuli numeri, quorum maxima pars jam a viris Ill. *Cayley*, *Salmon* et *Chasles* reperta est, computati sunt secundum aequationes, quas viri Ill. *Cayley* et *Salmon* inter singularitates simplices curvarum duplicis curvaturae superficierumque explicabilium intercedere docuerunt*).

Relinquitur, ut nonnullas proprietates superficierum explicabilium *sexti* ordinis exponamus.

Curvae recessus semper sitae sunt in una superficie secundi ordinis. Si curva quarti ordinis est, est intersectio partialis superficiei secundi ordinis et superficiei tertii ordinis, quarum posterior per duas rectas generatrices ejusdem catervae prioris transit. Haec curva generatricibus alterius catervae ter, alterius catervae semel secatur. — Si curva quinti ordinis est, duas habet cuspides. Per eas et septem alia puncta curvae superficiem secundi ordinis

---

*) *A. Cayley*, Sur les courbes à double courbure et les surfaces développables. Journ. des Math. de M. *Liouville*, vol. X., pag. 245. 1845. Camb. and Dubl. Math. Journ. N. S. vol. V., pag. 18. *G. Salmon*, Anal. Geom. of three dim., pag. 234—256; 422—424.

ducamus, tota curva in hac superficie sita est, quia $2.2+7=11$ puncta cum ea habet communia. Praeter hanc superficiem secundi ordinis caterva superficierum tertii ordinis per curvam duci potest, quarum quaeque cum superficie secundi ordinis unam rectam habet communem. Haec curva generatricibus alterius catervae ter, alterius bis secatur. — Si curva sexti ordinis est, quatuor cuspidibus est praedita. Per has quatuor cuspides et quinque alia puncta curvae ducamus superficiem secundi ordinis; tota curva in hac superficie sita est, quia $2.4+5=13$ puncta cum ea habet communia. Praeter hanc superficiem secundi ordinis caterva superficierum tertii ordinis per hanc curvam transit. Quarum unam exhibet forma aequationis harum superficierum, $ace+2bcd-ad^2-eb^2-c^3=0$, quae tangitur omnibus planis superficiem ipsam tangentibus. Huic superficies explicabilis inscripta et circumscripta est.

Ergo habemus, superficiebus explicabilibus reciprocis ratione habita, theorema:

Omnes superficies explicabiles sexti ordinis alii superficiei secundi ordinis sunt inscriptae, alii circumscriptae.

Sunt autem superficies explicabiles, quibus *caterva* superficierum secundi ordinis inscribi potest, aliaeque, quibus circumscribi potest; eae sunt, quae duabus superficiebus secundi ordinis, quibus contactus est simplex, circumscriptae sunt aut inscriptae.

Tabula nostra docet, *eas superficies explicabiles, quae generantur tangentibus curvarum duplicium in superficiebus explicabilibus sexti ordinis sitarum, item sexti esse ordinis* Itaque etiam *illae superficies explicabiles sexti ordinis sunt, quae circumscribuntur omnibus planis, duas generatrices earum continentibus.* Vir Cel. *Chasles,* superficiem explicabilem, quae involvitur omnibus planis bis tangentibus curvam recessus superficiei explicabilis sexti ordinis et quintae classis, sive per binas generatrices hujus superficiei ductis, *quinti* ordinis esse ratus *), falsa interpretatione termini „classis" deceptus est.

Omnia talia problemata geometrica, quae ad solum ordinem et classem systematis geometrici spectant, ad problemata mere algebraica revocari posse, ex ipsa problematis natura perspicuum; dum tamen horum solutio in summa generalitate reperta sit, infirmioribus auxiliis minora intendisse non poenitebit.

Scripsi Berolini M. Jun. A. MDCCCLXIV.

---

*) *Chasles,* Digression relative aux surfaces développables du sixième ordre. L. c. pag. 719.

Ueber die Transformation der *Abel*schen Functionen erster Ordnung.

(Von Herrn *Königsberger* zu Greifswald.)

Hermite hat sich in seiner Abhandlung*) über die Theorie der Transformation der *Abel*schen Functionen erster Ordnung auf die Begründung zweier wesentlichen Punkte derselben beschränkt, nämlich auf die Bestimmung der Anzahl der Transformationen für einen gegebenen Grad k derselben und auf den Beweis des Satzes, dass, wenn G, G', H die Moduln der transformirten, g, g', h die Moduln der zu transformirenden ϑ-Function und z_0, z_1, z_2, z_3 bestimmte linear aus den ursprünglichen Variabeln x, y zusammengesetzte Ausdrücke bedeuten,

$$\vartheta(z_0 + Gz_3 + Hz_2,\ z_1 + Hz_3 + G'z_2)\, e^{i\pi(z_0 z_1 + z_1 z_2 + Gz_3^2 + 2Hz_3 z_2 + G'z_2^2)}$$

durch eine ganze homogene Function vom Grade k durch die 4 Functionen:

$$\theta_0(x, y), \quad \theta_1(x, y), \quad \theta_2(x, y), \quad \theta_3(x, y)$$

mit den Moduln g, h, g', welche mit den ersten durch bestimmte Gleichungen verbunden sind, ausgedrückt werden kann. Ich beabsichtige in der vorliegenden Arbeit auf die algebraischen zwischen den transformirten Systemen bestehenden Relationen, wie ich dies noch später genauer erläutern werde, näher einzugehen, die Modulargleichungen, die gewissen Transformationen verschiedener Grade entsprechen, aufzustellen und endlich die von *Richelot* auf rein algebraischem Wege gefundenen Resultate für die Transformation zweiter Ordnung, welche *Abel*sche Integrale erster Ordnung, ähnlich wie die *Landen*sche Substitution die elliptischen Integrale reducirt, auf transcendentem Wege durch die Relationen zwischen den ϑ-Functionen selbst herzuleiten.

Bevor ich jedoch zu dem eigentlichen Gegenstande meiner Arbeit übergehe, schicke ich in einzelnen Paragraphen die genaue Definition der ϑ-Functionen nebst ihrem Zusammenhange mit den *Abel*schen Integralen, die Transformationsformeln, Additionstheoreme und Productentwicklungen von ϑ-Functionen voran und entlehne den Inhalt des ersten Paragraphen über die

---

*) Sur la théorie de la transformation des fonctions Abéliennes par M. *Hermite* (comptes rendues etc. tome XL, année 1855).

Definition der *Abel*schen Functionen den Mittheilungen, die mir mein hochverehrter Lehrer, Herr *Weierstrass*, dem ich überhaupt die Kenntniss der *Abel*schen Transcendenten verdanke, gemacht hat.

§. 1.

Definition der ϑ-Functionen.

Es sei

$$R(x) = A_0(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{2\varrho})$$

eine ganze Function $2\varrho+1^{\text{ten}}$ Grades von x, wobei wir annehmen, es seien die Grössen A_0, a_0, a_1, ... $a_{2\varrho}$ sämmtlich reell und wenn A_0 positiv,

$$a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_{2\varrho},$$

wenn A_0 negativ

$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{2\varrho}.$$

Ferner seien u_1, u_2, ... u_ϱ unbedingt veränderliche Grössen und zwischen diesen und ebensovielen von ihnen abhängigen x_1, x_2, ... x_ϱ die nachstehenden Gleichungen gegeben, in denen

$$F_1(x), \quad F_2(x), \quad \dots \quad F_\varrho(x)$$

ganze Functionen von x bedeuten, deren Grad nicht höher als $\varrho-1$ ist:

$$u_1 = \int_{a_1}^{x_1} \frac{F_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_{a_3}^{x_2} \frac{F_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \dots + \int_{a_{2\varrho-1}}^{x_\varrho} \frac{F_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

$$u_2 = \int_{a_1}^{x_1} \frac{F_2(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_{a_3}^{x_2} \frac{F_2(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \dots + \int_{a_{2\varrho-1}}^{x_\varrho} \frac{F_2(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

. . . .

$$u_\varrho = \int_{a_1}^{x_1} \frac{F_\varrho(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_{a_3}^{x_2} \frac{F_\varrho(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \dots + \int_{a_{2\varrho-1}}^{x_\varrho} \frac{F_\varrho(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Man bestimme die Grössen:

$$K_{\alpha\beta} = \int_{a_{2\beta-1}}^{a_{2\beta}} \frac{F_\alpha(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad i\overline{K}_{\alpha\beta} = \int_{a_{2\beta-2}}^{a_{2\beta-1}} \frac{F_\alpha(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

$$iK'_{\mu\nu} = i\overline{K}_{\mu 1} + i\overline{K}_{\mu 2} + \dots + i\overline{K}_{\mu\nu},$$

wo bei jeder Integration der Werth, welcher der Quadratwurzel beigelegt werden muss, durch die Formel:

$$\sqrt{R(x)} = A_0^{\varrho+1}\left(\frac{x-a_0}{A_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-a_1}{A_0}\right)^{\frac{1}{2}}\dots\left(\frac{x-a_{2\varrho}}{A_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

gegeben wird, wie in der Abhandlung des Herrn *Weierstrass* (dieses Journal Bd. 47, §. 2) näher ausgeführt ist.

Wir führen nun ϱ neue unabhängige Variable ein, die mit den u durch folgende Gleichungen verbunden sind:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2K_{11}v_1+2K_{12}v_2+\cdots+2K_{1\varrho}v_\varrho, \\ u_2 &= 2K_{21}v_1+2K_{22}v_2+\cdots+2K_{2\varrho}v_\varrho, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_\varrho &= 2K_{\varrho 1}v_1+2K_{\varrho 2}v_2+\cdots+2K_{\varrho\varrho}v_\varrho, \end{aligned}$$

aus denen sich das Gleichungssystem ergeben möge:

$$\begin{aligned} v_1 &= G_{11}u_1+G_{21}u_2+\cdots+G_{\varrho 1}u_\varrho, \\ v_2 &= G_{12}u_1+G_{22}u_2+\cdots+G_{\varrho 2}u_\varrho, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_\varrho &= G_{1\varrho}u_1+G_{2\varrho}u_2+\cdots+G_{\varrho\varrho}u_\varrho \end{aligned}$$

und definiren folgende Reihe als ϑ-Function, in der die Summation auf die Indices $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_\varrho$ von $-\infty\cdots+\infty$ erstreckt wird,

$$\vartheta(v_1, v_2, \dots v_\varrho) =$$

$$\Sigma\{e^{[\nu_1(2v_1+\nu_1\tau_{11}+\nu_2\tau_{12}+\dots+\nu_\varrho\tau_{1\varrho})+\nu_2(2v_2+\nu_1\tau_{21}+\nu_2\tau_{22}+\dots+\nu_\varrho\tau_{2\varrho})+\dots+\nu_\varrho(2v_\varrho+\nu_1\tau_{\varrho 1}+\nu_2\tau_{\varrho 2}+\dots+\nu_\varrho\tau_{\varrho\varrho})]\pi i}\},$$

wo $\tau_{\alpha\beta}$ die Moduln der ϑ-Function genannt und durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$\tau_{\alpha\beta} = 2iG_{1\alpha}K'_{1\beta}+2iG_{2\alpha}K'_{2\beta}+\cdots+2iG_{\varrho\alpha}K'_{\varrho\beta},$$

so dass

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$$

ist. Diese ϑ-Function genügt, wenn $p_1, p_2, \dots p_\varrho$ ganze Zahlen (0 einschliesslich) bezeichnen, den Gleichungen:

$$\vartheta(v_1+p_1, v_2+p_2, \dots v_\varrho+p_\varrho) = \vartheta(v_1, v_2, \dots v_\varrho),$$

$$\vartheta(v_1+\tau_{1\alpha}, v_2+\tau_{2\alpha}, \dots v_\varrho+\tau_{\varrho\alpha}) = e^{-(2v_\alpha+\tau_{\alpha\alpha})\pi i}\vartheta(v_1, v_2, \dots v_\varrho),$$

und umgekehrt, wenn eine continuirliche Function diesen Bedingungsgleichungen genügt, so ist sie gleich einer ϑ-Function multiplicirt mit einer Constanten.

Wird, wenn

$$\tau_\alpha = n_1\tau_{\alpha 1}+n_2\tau_{\alpha 2}+\cdots+n_\varrho\tau_{\alpha\varrho}$$

gesetzt wird,

$$e^{\sum_\epsilon n_\epsilon(2v_\epsilon+\tau_\epsilon)\pi i}\vartheta(v_1+\tau_1, v_2+\tau_2, \dots v_\varrho+\tau_\varrho) \text{ mit } \vartheta(v_1, v_2, \dots v_\varrho; n_1, n_2, \dots n_\varrho)$$

bezeichnet, worin wir $n_1, \dots n_\varrho$ die Parameter der ϑ-Function nennen, so besteht, wenn

$$\tau'_\alpha = n_1\tau_{\alpha 1} + n_2\tau_{\alpha 2} + \cdots + n_\varrho \tau_{\alpha\varrho}$$

ist, die Gleichung

$$\vartheta(v_1 + \tau'_1, v_2 + \tau'_2, \dots v_\varrho + \tau'_\varrho; n_1, \dots n_\varrho)$$
$$= e^{-\sum\limits_\alpha n'_\alpha(2v_\alpha + \tau'_\alpha)\pi i} \vartheta(v_1, v_2, \dots v_\varrho; n_1 + n'_1, \dots n_\varrho + n'_\varrho),$$

und es folgen nun leicht, wenn $n'_1, \dots n'_\varrho$, $m_1, \dots m_\varrho$ ganze Zahlen bedeuten, die drei Hauptgleichungen für die ϑ-Functionen:

$$\vartheta(v_1, v_2, \dots v_\varrho; n_1 + n'_1, \dots n_\varrho + n'_\varrho) = \vartheta(v_1, v_2, \dots v_\varrho; n_1, \dots n_\varrho),$$

$$\vartheta(v_1 + m_1, \dots v_\varrho + m_\varrho; n_1, \dots n_\varrho) = e^{\sum\limits_\alpha 2m_\alpha n_\alpha \pi i} \vartheta(v_1, \dots v_\varrho; n_1, \dots n_\varrho),$$

$$\vartheta(v_1 + \tau'_1, \dots v_\varrho + \tau'_\varrho; n_1, \dots n_\varrho) = e^{-\sum\limits_\alpha n'_\alpha(2v_\alpha + \tau'_\alpha)\pi i} \vartheta(v_1, \dots v_\varrho; n_1, \dots n_\varrho).$$

Es werde ferner:

$$\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_\lambda = \vartheta(v_1 + \tfrac{1}{2}m_1^\lambda, \dots v_\varrho + \tfrac{1}{2}m_\varrho^\lambda; \tfrac{1}{2}n_1^\lambda, \dots \tfrac{1}{2}n_\varrho^\lambda)$$

gesetzt, worin die ganzen Zahlen $m_1^\lambda, \dots m_\varrho^\lambda$, $n_1^\lambda, \dots n_\varrho^\lambda$ aus der Gleichung hervorgehen:

$$\int_x^{a_\lambda} \frac{F_\alpha(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = m_1^\lambda K_{\alpha 1} + \cdots + m_\varrho^\lambda K_{\alpha\varrho} + i(n_1^\lambda K'_{\alpha 1} + \cdots + n_\varrho^\lambda K'_{\alpha\varrho}),$$

welche die Functionen:

$$\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_0, \quad \vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_1, \quad \dots \quad \vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_{2\varrho}$$

durch folgendes Schema bestimmt:

	m_1^λ	m_2^λ	...	m_ϱ^λ	n_1^λ	n_2^λ	...	n_ϱ^λ
$\lambda = 0$	-1	-1	...	-1	0	0	...	0
$\lambda = 1$	-1	-1	...	-1	1	0	...	0
$\lambda = 2$	0	-1	...	-1	1	0	...	0
$\lambda = 3$	0	-1	...	-1	0	1	...	0
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮
$\lambda = 2\varrho$	0	0	...	0	0	0	...	1

Endlich setzen wir

$$\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_{\lambda\mu} = \vartheta(v_1 + \tfrac{1}{2}m_1^\nu, \dots v_\varrho + \tfrac{1}{2}m_\varrho^\nu; \tfrac{1}{2}n_1^\nu, \dots \tfrac{1}{2}n_\varrho^\nu),$$

wenn

$$m_\varepsilon^\nu \equiv m_\varepsilon^\lambda + m_\varepsilon^\mu \pmod{2}, \qquad n_\varepsilon^\nu \equiv n_\varepsilon^\lambda + n_\varepsilon^\mu \pmod{2},$$

und nennen den Zeiger ν aus λ und μ zusammengesetzt; es geht hieraus unmittelbar die Bedeutung von

$$\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_{\lambda\mu\nu\varrho\sigma\dots}$$

hervor.

Dies vorausgesetzt erhält man für die durch das obige System von Differentialgleichungen definirten *Abel*schen Functionen, wenn

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_\varrho)$$

und $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ gesetzt wird, je nachdem $A_0 > 0$ oder < 0 ist:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon^\varrho(-1)^\alpha \varphi(a_{2\alpha})}}{\sqrt[4]{R'(a_{2\alpha})}} = \frac{\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_{2\alpha}}{\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)},$$

$$\frac{\sqrt{\varepsilon^\varrho(-1)^{\alpha-1} \varphi(a_{2\alpha-1})}}{\sqrt[4]{-R'(a_{2\alpha-1})}} = \frac{\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_{2\alpha-1}}{\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)},$$

$$A_0\sqrt{\frac{\pm(a_\lambda - a_\mu)}{A_0}}\sum_\alpha \left\{\frac{\sqrt{R(x_\alpha)}}{(x_\alpha - a_\lambda)(x_\alpha - a_\mu)\varphi'(x_\alpha)}\right\} = \frac{\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_{\lambda\mu}}{\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_\lambda \vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_\mu},$$

wo das Zeichen von $\frac{a_\lambda - a_\mu}{A_0}$ so zu wählen ist, dass die Grösse positiv wird, während der Wurzel der positive Werth beigelegt wird. Die Wurzelgrössen $\sqrt{R(x_1)}, \dots \sqrt{R(x_\varrho)}$ müssen dieselben Werthe haben, wie die Endwerthe von $\sqrt{R(x)}$ bei den einzelnen Integrationen in dem obigen Gleichungssystem.

§. 2.

Transformationsformel der ϑ bei Vermehrung der Argumente um ganze und halbe Perioden.

Ich will nun nach Aufstellung der Definitionsgleichungen für die ϑ-Function die Veränderungen derselben untersuchen, wenn zum Argumente u_ε eine Grösse von der Form:

$$\tfrac{1}{2}\omega_\varepsilon^\mu = \tfrac{1}{2}(2p_\varepsilon + m_\varepsilon^\mu + (2q_1 + n_1^\mu)\tau_{\varepsilon 1} + (2q_2 + n_2^\mu)\tau_{\varepsilon 2} + \dots + (2q_\varrho + n_\varrho^\mu)\tau_{\varepsilon\varrho})$$

hinzugefügt wird, wo p, q beliebige ganze Zahlen, m_ε^μ, n_ε^μ 0 oder 1 sein können. Man erhält, wenn man den Werth ω_ε^μ unmittelbar einsetzt und mit Hülfe der in §. 1 angegebenen Relationen die ϑ-Function umformt, folgende

Gleichung:

$$\vartheta(v_1+\tfrac{1}{2}\omega_1^{\mu},\ldots v_\varrho+\tfrac{1}{2}\omega_\varrho^{\mu})_\lambda$$
$$= e^{-\sum_\alpha (q_\alpha+\frac{1}{2}n_\alpha^{\mu})(2v_\alpha+(q_1+\frac{1}{2}n_1^{\mu})\tau_{\alpha 1}+\cdots+(q_\varrho+\frac{1}{2}n_\varrho^{\mu})\tau_{\alpha\varrho})\pi i}.\eta.\vartheta(v_1,\ldots v_\varrho)_\nu,$$

wo

$$\eta = (-1)^{\sum_\alpha (p_\alpha n_\alpha^{\lambda}+q_\alpha m_\alpha^{\nu})}\, i^{\sum_\alpha n_\alpha^{\nu}(m_\alpha^{\lambda}+m_\alpha^{\mu}-m_\alpha^{\nu})-\sum_\alpha (m_\alpha^{\lambda}+m_\alpha^{\mu})n_\alpha^{\mu}},$$

und wenn

$$\lambda = (m_1^{\lambda},\ldots m_\varrho^{\lambda}, n_1^{\lambda},\ldots n_\varrho^{\lambda}),$$
$$\mu = (m_1^{\mu},\ldots m_\varrho^{\mu}, n_1^{\mu},\ldots n_\varrho^{\mu}),$$
$$\nu = (m_1^{\nu},\ldots m_\varrho^{\nu}, n_1^{\nu},\ldots n_\varrho^{\nu})$$

gesetzt wird, die $m_1^{\nu},\ldots m_\varrho^{\nu}, n_1^{\nu},\ldots n_\varrho^{\nu}$ aus den Congruenzen hervorgehen:

$$m_\alpha^{\nu} \equiv m_\alpha^{\lambda}+m_\alpha^{\mu} \pmod{2},\qquad n_\alpha^{\nu} \equiv n_\alpha^{\lambda}+n_\alpha^{\mu} \pmod{2}.$$

Wir leiten für das Folgende die aus dieser Gleichung unmittelbar hervorgehende Transformationsformel für die Vermehrung um ganze und halbe Perioden besonders ab:

$$\vartheta(v_1+p_1+q_1\tau_{11}+\cdots+q_\varrho\tau_{1\varrho},\ldots v_\varrho+p_\varrho+q_1\tau_{\varrho 1}+\cdots+q_\varrho\tau_{\varrho\varrho})_\lambda$$
$$= e^{-\sum_\alpha q_\alpha(2v_\alpha+q_1\tau_{\alpha 1}+\cdots+q_\varrho\tau_{\alpha\varrho})\pi i}\,(-1)^{\sum_\alpha (p_\alpha n_\alpha^{\lambda}+q_\alpha m_\alpha^{\lambda})}\,\vartheta(v_1,\ldots v_\varrho)_\lambda$$

und:

$$\vartheta(v_1+\tfrac{1}{2}m_1^{\mu}+\tfrac{1}{2}n_1^{\mu}\tau_{11}+\cdots+\tfrac{1}{2}n_\varrho^{\mu}\tau_{1\varrho},\ldots v_\varrho+\tfrac{1}{2}m_\varrho^{\mu}+\tfrac{1}{2}n_1^{\mu}\tau_{\varrho 1}+\cdots+\tfrac{1}{2}n_\varrho^{\mu}\tau_{\varrho\varrho})_\lambda =$$
$$e^{-\sum_\alpha \frac{1}{2}n_\alpha^{\mu}(2v_\alpha+\frac{1}{2}n_1^{\mu}\tau_{\alpha 1}+\cdots+\frac{1}{2}n_\varrho^{\mu}\tau_{\alpha\varrho})\pi i}\, i^{\sum_\alpha n_\alpha^{\nu}(m_\alpha^{\lambda}+m_\alpha^{\mu}-m_\alpha^{\nu})-\sum_\alpha (m_\alpha^{\lambda}+m_\alpha^{\mu})n_\alpha^{\mu}}\,\vartheta(v_1,\ldots v_\varrho)_\nu.$$

Da wir diese Transformationsformeln im Folgenden für die *Abel*schen Functionen erster Ordnung öfters brauchen werden und sie überhaupt für die Anwendungen dieser Functionen unentbehrlich sind, so fügen wir die folgende Transformationstabelle bei, nachdem wir noch die genaue Angabe der aus den obigen Bezeichnungen hervorgehenden 16 ϑ-Functionen vorangeschickt haben:

$$\vartheta(v_1,v_2)_5 = \vartheta(v_1,v_2),$$
$$\vartheta(v_1,v_2)_0 = \vartheta(v_1-\tfrac{1}{2},v_2-\tfrac{1}{2};0,0),$$
$$\vartheta(v_1,v_2)_1 = \vartheta(v_1-\tfrac{1}{2},v_2-\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2},0),$$
$$\vartheta(v_1,v_2)_2 = \vartheta(v_1,v_2-\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2},0),$$
$$\vartheta(v_1,v_2)_3 = \vartheta(v_1,v_2-\tfrac{1}{2};0,\tfrac{1}{2}),$$
$$\vartheta(v_1,v_2)_4 = \vartheta(v_1,v_2;0,\tfrac{1}{2}),$$
$$\vartheta(v_1,v_2)_{01} = \vartheta(v_1,v_2;\tfrac{1}{2},0),$$
$$\vartheta(v_1,v_2)_{02} = \vartheta(v_1-\tfrac{1}{2},v_2;\tfrac{1}{2},0),$$
$$\vartheta(v_1,v_2)_{03} = \vartheta(v_1-\tfrac{1}{2},v_2;0,\tfrac{1}{2}),$$
$$\vartheta(v_1,v_2)_{04} = \vartheta(v_1-\tfrac{1}{2},v_2-\tfrac{1}{2};0,\tfrac{1}{2}),$$
$$\vartheta(v_1,v_2)_{12} = \vartheta(v_1-\tfrac{1}{2},v_2;0,0),$$
$$\vartheta(v_1,v_2)_{13} = \vartheta(v_1-\tfrac{1}{2},v_2;\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}),$$
$$\vartheta(v_1,v_2)_{14} = \vartheta(v_1-\tfrac{1}{2},v_2-\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),$$
$$\vartheta(v_1,v_2)_{23} = \vartheta(v_1,v_2;\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),$$
$$\vartheta(v_1,v_2)_{24} = \vartheta(v_1,v_2-\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),$$
$$\vartheta(v_1,v_2)_{34} = \vartheta(v_1,v_2-\tfrac{1}{2};0,0).$$

Die erste Verticalcolumne der folgenden Tabelle giebt den Index der Grössen, um welche die Argumente vermehrt werden (halbe Perioden); die mit den ϑ multiplicirten Exponentialgrössen folgen aus der oben angegebenen Formel.

Index der Substitution.	5	0	1	2	3	4	01	02	03	04	12	13	14	23	24	34
5	5	0	1	2	3	4	01	02	03	04	12	13	14	23	24	34
0	0	5	−01	02	−03	04	1	−2	3	−4	34	−24	23	14	−13	12
1	*i*.1	01	−5	*i*.12	−*i*.13	*i*.14	*i*.0	−34	24	−23	2	−3	4	*i*.04	−*i*.03	*i*.02
2	2	*i*.02	*i*.12	5	−23	24	34	*i*.0	*i*.14	−*i*.13	*i*.1	*i*.04	−*i*.03	3	−4	01
3	*i*.3	03	13	23	−5	*i*.34	*i*.24	*i*.14	*i*.0	−12	*i*.04	*i*.1	−02	*i*.2	−01	4
4	4	*i*.04	*i*.14	*i*.24	*i*.34	5	23	13	12	*i*.0	03	02	*i*.1	01	*i*.2	*i*.3
01	01	*i*.1	*i*.0	34	24	23	5	*i*.12	*i*.13	*i*.14	*i*.02	*i*.03	*i*.04	4	3	2
02	*i*.02	2	−34	*i*.0	*i*.14	*i*.13	*i*.12	−5	23	24	01	−4	−3	*i*.03	*i*.04	*i*.1
03	03	*i*.3	−*i*.24	*i*.14	*i*.0	12	13	−23	5	*i*.34	4	−01	−*i*.2	02	*i*.1	*i*.04
04	*i*.04	4	−23	13	−12	*i*.0	*i*.14	−*i*.24	*i*.34	−5	*i*.3	−*i*.2	01	*i*.1	−02	03
12	12	34	−2	1	04	03	02	−01	4	3	5	−23	−24	13	14	0
13	*i*.13	*i*.24	−*i*.3	−04	−1	*i*.02	*i*.03	−4	01	*i*.2	23	−5	−*i*.34	*i*.12	−0	−14
14	−14	23	−4	*i*.03	−*i*.02	−1	−04	−3	*i*.2	−01	*i*.24	−*i*.34	5	−0	−*i*.12	*i*.13
23	23	−14	−04	*i*.3	*i*.2	01	4	*i*.03	*i*.02	−1	*i*.13	*i*.12	−0	5	*i*.34	*i*.24
24	*i*.24	*i*.13	*i*.03	4	−01	*i*.2	*i*.3	−04	−1	−*i*.02	−14	−0	−*i*.12	*i*.34	−5	23
34	34	12	02	01	−4	3	2	1	04	−03	0	14	−13	24	−23	5

§. 3.

Additionstheorem der ϑ-Functionen.

Wir gehen nun dazu über, die Additionstheoreme für die ϑ-Functionen aufzustellen, aus denen sich dann unmittelbar die für die *Abel*schen Functionen selbst ergeben. Ich entwickle zuerst eine allgemeinere Formel als die, welche zur Herleitung des Additionstheorems nothwendig ist, weil ich dieselbe später zur Aufstellung der Modulargleichungen brauchen werde; sie entspricht der Formel, die Herr *Schroeter* für die Modulargleichungen der elliptischen Functionen in seiner Inauguraldissertation *) entwickelt hat. Ich beschränke mich auf die Angabe des Resultats, in welchem ich die Moduln in die Bezeichnung der ϑ-Function mitaufnehme.

---

*) De aequationibus modularibus, dissertatio inauguralis, auctore *Schroeter*. 1854.

Die Hauptformel ist, wenn p eine ganze Zahl bedeutet:

$$\vartheta(u_1+v_1, \dots u_\varrho+v_\varrho, \tau_{11}\dots\tau_{\varrho\varrho})\vartheta(u_1-pv_1, \dots u_\varrho-pv_\varrho, p\tau_{11}\dots p\tau_{\varrho\varrho})$$
$$= \Sigma\{e^{-\pi i[\mu_1(\mu_1\tau_{11}+\dots+\mu_\varrho\tau_{1\varrho})+\dots+\mu_\varrho(\mu_1\tau_{\varrho 1}+\dots+\mu_\varrho\tau_{\varrho\varrho})]}\cdot e^{2\pi i[\mu_1(u_1-v_1)+\dots+\mu_\varrho(u_\varrho-v_\varrho)]}$$
$$\times\vartheta((p+1)u_1+i(\mu_1 p\tau_{11}+\dots+\mu_\varrho p\tau_{1\varrho}), \dots (p+1)u_\varrho+i(\mu_1 p\tau_{\varrho 1}+\dots+\mu_\varrho p\tau_{\varrho\varrho}),$$
$$p(p+1)\tau_{11}\dots p(p+1)\tau_{\varrho\varrho})$$
$$\times\vartheta((p-1)v_1+i(\mu_1\tau_{11}+\dots+\mu_\varrho\tau_{1\varrho}),\dots(p+1)v_\varrho+i(\mu_1\tau_{\varrho 1}+\dots+\mu_\varrho\tau_{\varrho\varrho}), (p+1)\tau_{11}\dots(p-1)\tau_{\varrho\varrho})\},$$

worin die Summation auf die Indices $\mu_1, \dots \mu_\varrho$ von $0 \dots p$ erstreckt wird.

Setzen wir in dieser Formel $p = 1$, so erhalten wir mit Anwendung der obigen Bezeichnungen:

$$\vartheta(u_1+v_1, \dots u_\varrho+v_\varrho, \tau_{11}\dots\tau_{\varrho\varrho})\vartheta(u_1-v_1, \dots u_\varrho-v_\varrho, \tau_{11}\dots\tau_{\varrho\varrho})$$
$$= \Sigma\vartheta(2u_1,\dots 2u_\varrho; \tfrac{1}{2}\mu_1,\dots\tfrac{1}{2}\mu_\varrho, 2\tau_{11}\dots 2\tau_{\varrho\varrho})\vartheta(2v_1,\dots 2v_\varrho; \tfrac{1}{2}\mu_1,\dots\tfrac{1}{2}\mu_\varrho, 2\tau_{11}\dots 2\tau_{\varrho\varrho}),$$

worin $\mu_1, \dots \mu_\varrho$ die Werthe 0 und 1 annehmen.

Vermehrt man in dieser Gleichung sowohl die Argumente $u_1, \dots u_\varrho$ als auch $v_1, \dots v_\varrho$ respective um die Grössen

$$\tfrac{1}{2}w_1, \quad \tfrac{1}{2}w_2, \quad \dots \quad \tfrac{1}{2}w_\varrho,$$

so erhält man:

$$\vartheta(u_1+v_1+w_1, \dots u_\varrho+v_\varrho+w_\varrho, \tau_{11}\dots\tau_{\varrho\varrho})\vartheta(u_1-v_1, \dots u_\varrho-v_\varrho, \tau_{11}\dots\tau_{\varrho\varrho})$$
$$= \Sigma\vartheta(2u_1+w_1, \dots 2u_\varrho+w_\varrho; \tfrac{1}{2}\mu_1, \dots \tfrac{1}{2}\mu_\varrho, 2\tau_{11}\dots 2\tau_{\varrho\varrho})P_\mu,$$

worin P_μ von u unabhängig ist. Es ist ausserdem leicht zu sehen, dass für jeden Index α die Gleichung erhalten wird:

$$\vartheta(u_1+w_1, \dots u_\varrho+w_\varrho, \tau_{11}\dots\tau_{\varrho\varrho})_\alpha\vartheta(u_1, \dots u_\varrho, \tau_{11}\dots\tau_{\varrho\varrho})_\alpha$$
$$= \Sigma\vartheta(2u_1+w_1, \dots 2u_\varrho+w_\varrho; \tfrac{1}{2}\mu_1, \dots \tfrac{1}{2}\mu_\varrho, 2\tau_{11}\dots 2\tau_{\varrho\varrho})Q_\mu,$$

worin Q_μ von u unabhängig ist.

Nimmt man für α eine Reihe von 2^ϱ verschiedenen Zeigern und eliminirt dann aus den sich so ergebenden 2^ϱ Gleichungen und der ersten die 2^ϱ Functionen:

$$\vartheta(2u_1+w_1, \dots 2u_\varrho+w_\varrho; \tfrac{1}{2}\mu_1, \dots \tfrac{1}{2}\mu_\varrho, 2\tau_{11}\dots 2\tau_{\varrho\varrho}),$$

so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\vartheta(u_1+v_1+w_1, \dots u_\varrho+v_\varrho+w_\varrho, \tau_{11}\dots\tau_{\varrho\varrho})\vartheta(u_1-v_1, \dots u_\varrho-v_\varrho, \tau_{11}\dots\tau_{\varrho\varrho})$$
$$= \sum_\alpha(\alpha)\vartheta(u_1\dots u_\varrho, \tau_{11}\dots\tau_{\varrho\varrho})_\alpha\vartheta(u_1+w_1, \dots u_\varrho+w_\varrho, \tau_{11}\dots\tau_{\varrho\varrho})_\alpha,$$

worin die Coefficienten (α) noch zu bestimmen sind.

Die Bestimmung der Coefficienten rührt von Herrn *Weierstrass* her und ich führe dessen Methode hier kurz an:

Es ist klar, dass $\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)$ den Werth Null erhält, sobald von den Grössen $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ in dem im §. 1 aufgestellten Systeme von Differentialgleichungen mindestens *eine* unendlich gross wird; denn welchen Werth dann auch die übrigen haben mögen, so zeigen die in §. 1 aufgestellten Beziehungen zwischen den ϑ-Functionen und den oberen Grenzen der Integrale, dass

$$\frac{\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_\alpha}{\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)}$$

jedenfalls unendlich ist, wenn man nur für α eine solche Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \dots 2\varrho$ wählt, dass von den Differenzen

$$a_\alpha - x_1, \quad a_\alpha - x_2, \quad \dots \quad a_\alpha - x_\varrho$$

keine verschwindet; dann ist aber nothwendig

$$\vartheta(v_1, \dots v_\varrho) = 0,$$

da $\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_\alpha$ nicht unendlich sein kann.

Sind daher

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\mathfrak{r}$$

$\mathfrak{r}$ verschiedene Zahlen aus der Reihe $0, 1, \dots 2\varrho$ und $\mathfrak{r} < \varrho$, und setzt man:

$$\omega_\mathfrak{a} = \sum_{\alpha = \alpha_1, \dots \alpha_\mathfrak{r}} \int_\infty^{a_\alpha} \frac{F_\mathfrak{a}(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} - \sum_{\mathfrak{b} = 1, 2, \dots \varrho} \int_\infty^{a_{2\mathfrak{b}-1}} \frac{F_\mathfrak{a}(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

so sind, wie leicht aus §. 1 zu ersehen,

$$\omega_1, \omega_2, \dots \omega_\varrho$$

die Werthe, in welche $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ übergehen, wenn $\mathfrak{r}$ von den Grössen $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ die Werthe $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots a_{\alpha_\mathfrak{r}}$ erhalten, die übrigen aber unendlich gross werden. Hieraus ergiebt sich leicht, dass, wenn man den Zeiger, der aus den beiden Zeigern

$$1, 3, \dots 2\varrho - 1, \quad \text{und} \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\mathfrak{r}$$

zusammengesetzt ist (s. §. 1), mit α bezeichnet,

$$\vartheta(v_1, \dots v_\varrho)_\alpha = 0$$

oder

$$\vartheta(v_1 + \tfrac{1}{2}m_1^1 + \dots + \tfrac{1}{2}m_1^{2\varrho-1} + \tfrac{1}{2}m_1^{\alpha_1} + \dots + \tfrac{1}{2}m_1^{\alpha_\mathfrak{r}}, \dots v_\varrho + \tfrac{1}{2}m_\varrho^1 + \dots + \tfrac{1}{2}m_\varrho^{2\varrho-1} + \tfrac{1}{2}m_\varrho^{\alpha_1} + \dots + \tfrac{1}{2}m_\varrho^{\alpha_\mathfrak{r}};$$
$$\tfrac{1}{2}n_1^1 + \dots + \tfrac{1}{2}n_1^{2\varrho-1} + \tfrac{1}{2}n_1^{\alpha_1} + \dots + \tfrac{1}{2}n_1^{\alpha_\mathfrak{r}}, \dots) = 0$$

ist.

Dieses vorausgesetzt heben wir aus den Zahlen 0, 1, ... 2ϱ ϱ beliebige heraus, die durch $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\varrho$ bezeichnet werden sollen und bilden dann aus diesen Zahlen alle möglichen von einander verschiedenen Zeiger von nicht mehr als ϱ Elementen. Der Buchstabe ε soll dann die allgemeine Bezeichnung für einen in dieser Reihe enthaltenen Zeiger sein; die Anzahl derselben ist:

$$\varrho+\frac{\varrho(\varrho-1)}{1.2}+\cdots+\frac{\varrho(\varrho-1)\ldots 1}{1.2\ldots\varrho} = 2^\varrho-1.$$

Das Zeichen $\varepsilon\cdot$ bedeute dann ferner den zusammengesetzten Zeiger

$$(1, 3, \ldots 2\varrho-1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\varrho),$$

δ einen ganz willkürlich angenommenen, γ einen veränderlichen Zeiger, der gleich δ und gleich jedem durch die Formel $\delta\varepsilon$ bezeichneten werden kann, so dass γ 2^ϱ Formen annimmt; dann ist nicht schwer einzusehen, dass

$$\vartheta(v_1, \ldots v_\varrho)_{\varepsilon\cdot\gamma'\gamma''}$$

wenn γ', γ'' zwei verschiedene Formen von γ bedeuten, verschwindet, wenn

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_\varrho = 0$$

ist. Nehmen wir nun in der obigen Formel für die 2^ϱ Zeiger α die im Vorhergehenden mit γ bezeichneten und setzen also:

$$\vartheta(u_1+v_1+w_1, \ldots u_\varrho+v_\varrho+w_\varrho)\,\vartheta(u_1-v_1, \ldots u_\varrho-v_\varrho)$$
$$= \sum_\gamma(\gamma)\,\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho)_\gamma\,\vartheta(u_1+w_1, \ldots u_\varrho+w_\varrho)_\gamma,$$

so ergiebt sich (s. §. 1):

$$\vartheta(u_1+v_1+w_1, \ldots u_\varrho+v_\varrho+w_\varrho)_\beta\,\vartheta(u_1-v_1, \ldots u_\varrho-v_\varrho)_\beta$$
$$= \sum_\gamma(\gamma)(-1)^{\sum_\varepsilon n_\varepsilon^\beta m_\varepsilon^\gamma}\,\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho)_{\beta\gamma}\,\vartheta(u_1+w_1, \ldots u_\varrho+w_\varrho)_{\beta\gamma}$$
$$= \sum_\gamma(\gamma)(-1)^{\beta|\gamma}\,\vartheta(u_1, \ldots u_\varrho)_{\beta\gamma}\,\vartheta(u_1+w_1, \ldots u_\varrho+w_\varrho)_{\beta\gamma},$$

wenn

$$(-1)^{\beta|\gamma} = (-1)^{\sum_\varepsilon n_\varepsilon^\beta m_\varepsilon^\gamma}$$

ist. Bedeutet nun γ' irgend einen bestimmten Zeiger γ und nimmt man in der vorstehenden Formel $\beta = \varepsilon\cdot\gamma'$, so verschwinden auf der rechten Seite, wenn $v_1 = \ldots = v_\varrho = 0$, alle Glieder bis auf dasjenige, in welchem $\gamma = \gamma'$ ist, und in diesem reducirt sich der Zeiger $\beta\gamma$ auf $\varepsilon\cdot\gamma'\gamma' = \varepsilon\cdot$. Man erhält also zur Bestimmung der Constanten (γ) nach einer leichten Umformung, wenn man $\gamma = \gamma'$ gesetzt hat:

$$(\gamma) = \frac{(-1)^{\gamma|\varepsilon\cdot}\,\vartheta(v_1, \ldots v_\varrho)_{\varepsilon\cdot\gamma}\,\vartheta(v_1+w_1, \ldots v_\varrho+w_\varrho)_{\varepsilon\cdot\gamma}}{\vartheta(0, \ldots 0)_{\varepsilon\cdot}\,\vartheta(w_1, \ldots w_\varrho)_{\varepsilon\cdot}},$$

woraus sich folgende Hauptformel ergiebt:

$$\vartheta(0,\dots 0)_{\varepsilon}.\vartheta(w_1,\dots w_\varrho)_{\varepsilon}.\vartheta(u_1+v_1+w_1,\dots u_\varrho+v_\varrho+w_\varrho)\vartheta(u_1-v_1,\dots u_\varrho-v_\varrho) =$$
$$\sum_\gamma\{(-1)^{\gamma|\varepsilon}\vartheta(u_1,\dots u_\varrho)_\gamma\vartheta(u_1+w_1,\dots u_\varrho+w_\varrho)_\gamma\vartheta(v_1,\dots v_\varrho)_{\varepsilon\gamma}\vartheta(v_1+w_1,\dots v_\varrho+w_\varrho)_{\varepsilon\gamma}\}.$$

Setzt man in dieser Formel $-v_\alpha$ für v_α und dann $w_\alpha+v_\alpha$ für w_α, so erhält man:

$$\vartheta(0,\dots 0)_{\varepsilon}.\vartheta(v_1+w_1,\dots v_\varrho+w_\varrho)_{\varepsilon}.\vartheta(u_1+v_1,\dots u_\varrho+v_\varrho)\vartheta(u_1+w_1,\dots u_\varrho+w_\varrho) =$$
$$\sum_\gamma\{(-1)^{\gamma|\varepsilon}\vartheta(u_1,\dots u_\varrho)_\gamma\vartheta(u_1+v_1+w_1,\dots u_\varrho+v_\varrho+w_\varrho)_\gamma\vartheta(-v_1,\dots -v_\varrho)_{\varepsilon\gamma}\vartheta(w_1,\dots w_\varrho)_{\varepsilon\gamma}\};$$

nun ist aber:

$$\vartheta(-v_1,\dots -v_\varrho)_{\varepsilon\gamma} = (-1)^{\varepsilon\gamma|\varepsilon\gamma}\vartheta(v_1,\dots v_\varrho)_{\varepsilon\gamma},$$

wie leicht aus der oben angegebenen Transformationsformel zu sehen ist, und man erhält die folgende Gleichung:

$$\vartheta(0,\dots 0)_{\varepsilon}.\vartheta(v_1+w_1,\dots v_\varrho+w_\varrho)_{\varepsilon}.\vartheta(u_1+v_1,\dots u_\varrho+v_\varrho)\vartheta(u_1+w_1,\dots u_\varrho+w_\varrho) =$$
$$\sum_\gamma\{(-1)^{\gamma\varepsilon|\gamma}\vartheta(u_1,\dots u_\varrho)_\gamma\vartheta(u_1+v_1+w_1,\dots u_\varrho+v_\varrho+w_\varrho)_\gamma\vartheta(v_1,\dots v_\varrho)_{\varepsilon\gamma}\vartheta(w_1,\dots w_\varrho)_{\varepsilon\gamma}\},$$

woraus man sieht, dass wenn $v_\alpha+w_\alpha=p$ oder $\frac{p}{2}$, wo p eine ganze Zahl ist, die ϑ-Functionen auf der rechten Seite der Gleichung die Argumente u und v gesondert enthalten; dasselbe gilt für mehr Factoren.

Hieraus ergiebt sich sogleich, wenn

$$2v_\alpha \text{ um } m_1^\alpha+n_1^\alpha\tau_{\alpha 1}+\dots+n_\varrho^\alpha\tau_{\alpha\varrho}$$
$$2w_\alpha \text{ um } m_1^\beta+n_1^\beta\tau_{\alpha 1}+\dots+n_\varrho^\beta\tau_{\alpha\varrho}$$

vermehrt werden:

$$\vartheta(0,\dots 0)_{\varepsilon}.\vartheta(v_1+w_1,\dots v_\varrho+w_\varrho)_{\varepsilon\alpha\beta}\vartheta(u_1+v_1,\dots u_\varrho+v_\varrho)_\alpha\vartheta(u_1+w_1,\dots u_\varrho+w_\varrho)_\beta =$$
$$\sum_\gamma\{(-1)^{\gamma\varepsilon|\gamma}(-1)^{(\alpha,\beta)}\vartheta(u_1,\dots u_\varrho)_\gamma\vartheta(u_1+v_1+w_1,\dots u_\varrho+v_\varrho+w_\varrho)_{\gamma\alpha\beta}\vartheta(v_1,\dots v_\varrho)_{\alpha\varepsilon\gamma}\vartheta(w_1,\dots w_\varrho)_{\beta\varepsilon\gamma}\}$$

wo der Werth (α,β) in jedem Falle aus der obigen Transformationsformel unmittelbar hervorgeht.

Wir stellen für die *Abel*schen Functionen erster Ordnung folgende Reihe von 16 Additionsformeln auf, in denen wir die ϑ-Functionen von den Argumenten u mit p, von den Argumenten v mit q, von $u+v$ mit P, von $u-v$ mit Q bezeichnen; jede der aufgestellten Formeln durch die erste dividirt, giebt

$$al(u_1+v_1,\dots u_\varrho+v_\varrho)_\alpha$$

durch

$$al(u_1,\dots u_\varrho)_\beta, \quad al(v_1,\dots v_\varrho)_\gamma$$

ausgedrückt, also das Additionstheorem der *Abel*schen Functionen erster Ordnung:

$$\begin{aligned}
\vartheta_5\,\vartheta_5\,P_5\,Q_5 &= p_5p_5\,q_5\,q_5 + p_1p_1\,q_1\,q_1 + p_3p_3\,q_3\,q_3 + p_{13}p_{13}q_{13}q_{13}\\
\vartheta_5\,\vartheta_0\,P_0\,Q_5 &= p_5p_0\,q_5\,q_0 + p_1p_{01}q_1\,q_{01} + p_3p_{03}q_3\,q_{03} + p_{13}p_{24}q_{13}q_{24}\\
\vartheta_4\,\vartheta_{14}P_1\,Q_5 &= p_5p_1\,q_4\,q_{14} + p_0p_{01}q_{04}q_{23} - p_2p_{12}q_{24}q_{03} - p_{02}p_{34}q_{13}q_3\\
\vartheta_5\,\vartheta_2\,P_2\,Q_5 &= p_5p_2\,q_5\,q_2 - p_1p_{12}q_1\,q_{12} + p_3p_{23}q_3\,q_{23} - p_{13}p_{04}q_{13}q_{04}\\
\vartheta_2\,\vartheta_{23}P_3\,Q_5 &= p_5p_3\,q_2\,q_{23} + p_0p_{03}q_{02}q_{14} + p_4p_{34}q_{24}q_{01} + p_{04}p_{12}q_{13}q_1\\
\vartheta_5\,\vartheta_4\,P_4\,Q_5 &= p_5p_4\,q_5\,q_4 - p_1p_{14}q_1\,q_{14} - p_3p_{34}q_3\,q_{34} + p_{13}p_{02}q_{13}q_{02}\\
\vartheta_5\,\vartheta_{01}P_{01}Q_5 &= p_5p_{01}q_5\,q_{01} - p_1p_0\,q_1\,q_0 + p_3p_{24}q_3\,q_{24} - p_{13}p_{03}q_{13}q_{03}\\
\vartheta_2\,\vartheta_0\,P_{02}Q_5 &= p_5p_{02}q_2\,q_0 + p_0p_2\,q_{02}q_5 - p_4p_{13}q_{24}q_{04} - p_{04}p_{24}q_{13}q_4\\
\vartheta_5\,\vartheta_{03}P_{03}Q_5 &= p_5p_{03}q_5\,q_{03} - p_1p_{24}q_1\,q_{24} - p_3p_0\,q_3\,q_0 + p_{13}p_{01}q_{13}q_{01}\\
\vartheta_4\,\vartheta_0\,P_{04}Q_5 &= p_5p_{04}q_4\,q_0 + p_0p_4\,q_{04}q_5 + p_2p_{13}q_{24}q_{02} + p_{02}p_{24}q_{13}q_2\\
\vartheta_5\,\vartheta_{12}P_{12}Q_5 &= p_5p_{12}q_5\,q_{12} + p_1p_2\,q_1\,q_2 + p_3p_{04}q_3\,q_{04} + p_{13}p_{23}q_{13}q_{23}\\
\vartheta_{03}\vartheta_{01}P_{13}Q_5 &= p_5p_{13}q_{03}q_{01} - p_0p_{24}q_3\,q_1 - p_1p_3\,q_{24}q_0 + p_{01}p_{03}q_{13}q_5\\
\vartheta_5\,\vartheta_{14}P_{14}Q_5 &= p_5p_{14}q_5\,q_{14} + p_1p_4\,q_1\,q_4 - p_3p_{02}q_3\,q_{02} - p_{13}p_{34}q_{13}q_{34}\\
\vartheta_5\,\vartheta_{23}P_{23}Q_5 &= p_5p_{23}q_5\,q_{23} + p_1p_{04}q_1\,q_{04} - p_3p_2\,q_3\,q_2 - p_{13}p_{12}q_{13}q_{12}\\
\vartheta_4\,\vartheta_2\,P_{24}Q_5 &= p_5p_{24}q_4\,q_2 - p_0p_{13}q_{04}q_{02} + p_2p_4\,q_{24}q_5 - p_{02}p_{04}q_{13}q_0\\
\vartheta_5\,\vartheta_{34}P_{34}Q_5 &= p_5p_{34}q_5\,q_{34} + p_1p_{02}q_1\,q_{02} + p_3p_4\,q_3\,q_4 + p_{13}p_{14}q_{13}q_{14}.
\end{aligned}$$

§. 4.

Entwicklung eines Productes von ϑ-Functionen in eine Summe solcher Functionen.

Bevor ich nun zum Transformationsproblem selbst übergehe, muss ich noch die Entwicklung eines Productes von ϑ-Functionen in eine Summe solcher voranschicken, beschränke mich jedoch darauf, nur die beiden Hauptformeln mitzutheilen, da dieselben nach der für die elliptischen Functionen bekannten Methode entwickelt sind.

Die erste Hauptformel lautet, wenn

$$\varphi(u_1, \dots u_\varrho)$$

$$= \vartheta(m_1^{(1)}u_1 + a_1^{(1)}, \dots m_1^{(1)}u_\varrho + a_\varrho^{(1)}; s_1^{(1)}, \dots s_\varrho^{(1)}) \dots \vartheta(m_1^{(\lambda)}u_1 + a_1^{(\lambda)}, \dots m_1^{(\lambda)}u_\varrho + a_\varrho^{(\lambda)}; s_1^{(\lambda)} \dots s_\varrho^{(\lambda)})$$

gesetzt wird:

$$\Sigma\, e^{-\sum\limits_\alpha \frac{S_\alpha}{r}\left[2ru_\alpha + 2n_\alpha - (S_1\tau_{\alpha 1} + \dots + S_\varrho \tau_{\alpha\varrho})\right]\pi i}$$

$$\cdot\, \varphi\left(u_1 + \frac{n_1}{r} - \frac{1}{r}(A_1 + S_1\tau_{11} + \dots + S_\varrho\tau_{1\varrho}), \dots u_\varrho + \frac{n_\varrho}{r} - \frac{1}{r}(A_\varrho + S_1\tau_{\varrho 1} + \dots + S_\varrho\tau_{\varrho\varrho})\right)$$

$$= C.\vartheta(ru_1, \dots ru_\varrho, r\tau_{11}, \dots r\tau_{\varrho\varrho}),$$

worin sich die Summation auf die Indices $n_1, \ldots n_\varrho$ von $0, \ldots r-1$ erstreckt, die zweite:

$$\varphi(u_1, \ldots u_\varrho)$$
$$= \frac{1}{r^\varrho} \Sigma C_{l_1,\ldots l_\varrho} \vartheta\left(ru_1+A_1, \ldots ru_\varrho+A_\varrho; \frac{1}{r}(S_1+l_1), \ldots \frac{1}{r}(S_\varrho+l_\varrho), r\tau_{11}, \ldots r\tau_{\varrho\varrho}\right),$$

worin $C_{l_1,\ldots l_\varrho}$ eine Constante und die Summation sich auf die Indices $l_1, \ldots l_\varrho$ von $0, \ldots r-1$ erstreckt, während die in diesen beiden Formeln vorkommenden Grössen r, A, S durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

$$\begin{aligned} m_1^{(1)2} + \cdots + m_1^{(\lambda)2} &= r, \\ m_1^{(1)} a_s^{(1)} + \cdots + m_1^{(\lambda)} a_s^{(\lambda)} &= A_s, \\ m_1^{(1)} s_s^{(1)} + \cdots + m_1^{(\lambda)} s_s^{(\lambda)} &= S_s. \end{aligned}$$

Diese Entwicklungen waren nothwendig, um die Mittel zu liefern, in jedem gegebenen Falle die Transformation, die wir sogleich näher definiren werden, auszuführen.

§. 5.

Definition des Transformationsproblems für die *Abel*schen Functionen erster Ordnung.

Sei das System von Gleichungen gegeben:

$$u_1 = \sum_{\alpha=1,2} \int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha} \frac{F_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad u_2 = \sum_{\alpha=1,2} \int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha} \frac{F_2(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

und bezeichnen wir die diesem Systeme entsprechenden *Abel*schen Functionen mit p_α; sei ferner ein zweites System von Gleichungen:

$$u_1 = \sum_{\alpha=1,2} \int_{a'_{2\alpha-1}}^{x'_\alpha} \frac{f_1(x)\,dx}{\sqrt{R_1(x)}}, \quad u_2 = \sum_{\alpha=1,2} \int_{a'_{2\alpha-1}}^{x'_\alpha} \frac{f_2(x)\,dx}{\sqrt{R_1(x)}},$$

dessen *Abel*sche Functionen q_α seien, und in welchen $F(x)$, $f(x)$ lineare Functionen von x sind und

$$\begin{aligned} R\,(x) &= A\,(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4), \\ R_1(x) &= A'(x-a'_0)(x-a'_1)(x-a'_2)(x-a'_3)(x-a'_4), \end{aligned}$$

so besteht das Transformationsproblem der *Abel*schen Functionen erster Ordnung in Folgendem:

Das erste Gleichungssystem sei gegeben, es sind die Coefficienten von $R_1(x)$ und $f(x)$ so zu bestimmen, dass alle *Abel*schen Functionen q_α sich rational durch die *Abel*schen Functionen p_β ausdrücken lassen.

Es folgt hieraus, dass, wenn wir die Perioden des ersten Systems mit

$$\begin{matrix} K_{11} & K_{21} \\ K_{12} & K_{22} \\ iK'_{11} & iK'_{21} \\ iK'_{12} & iK'_{22}, \end{matrix}$$

die des zweiten entsprechend mit L bezeichnen, unter obiger Voraussetzung die Gleichungen stattfinden:

$$\begin{aligned} K_{11} &= a_0 L_{11} + a_1 L_{12} + a_2 i L'_{11} + a_3 i L'_{12} \\ K_{12} &= b_0 L_{11} + b_1 L_{12} + b_2 i L'_{11} + b_3 i L'_{12} \\ iK'_{11} &= c_0 L_{11} + c_1 L_{12} + c_2 i L'_{11} + c_3 i L'_{12} \\ iK'_{12} &= d_0 L_{11} + d_1 L_{12} + d_2 i L'_{11} + d_3 i L'_{12} \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} K_{21} &= a_0 L_{21} + a_1 L_{22} + a_2 i L'_{21} + a_3 i L'_{22} \\ K_{22} &= b_0 L_{21} + b_1 L_{22} + b_2 i L'_{21} + b_3 i L'_{22} \\ iK'_{21} &= c_0 L_{21} + c_1 L_{22} + c_2 i L'_{21} + c_3 i L'_{22} \\ iK'_{22} &= d_0 L_{21} + d_1 L_{22} + d_2 i L'_{21} + d_3 i L'_{22}, \end{aligned}$$

wo jedoch a, b, c, d so gewählt werden müssen, dass sie den für die Perioden der *Abel*schen Functionen bestehenden Bedingungsgleichungen genügen:

$$\sum_{\epsilon} (K_{a\epsilon} K'_{b\epsilon} - K'_{a\epsilon} K_{b\epsilon}) = 0.$$

§. 6.

Behandlung des Transformationsproblems.

Der Grad der Transformation hängt, wie *Hermite* für die *Abel*schen Functionen erster Ordnung gezeigt hat, von einer Zahl k ab, die auf bestimmte Weise aus den Constanten a, b, c, d zusammengesetzt ist. *Hermite* geht nun in seiner Behandlung des Transformationsproblems von der Transformation der ϑ-Function aus und zeigt, dass für alle Transformationen, die zu einer bestimmten Zahl k gehören, die ϑ-Function des neuen Systems multiplicirt mit einer von dem Index derselben unabhängigen Exponentialgrösse sich durch eine ganze homogene Function k^{ten} Grades von 4 ϑ-Functionen mit den ursprünglichen Moduln ausdrücken lässt, woraus unmittelbar durch Division die Transformation der *Abel*schen Functionen hervorgeht.

Betrachten wir nur den Fall, in welchem wir für die transformirte ϑ-Function auf Moduln geführt werden, welche dieselben Vielfachen der

Moduln der ursprünglichen ϑ-Function sind oder mit anderen Worten den Fall, in welchem die reellen Perioden der ursprünglichen *Abel*schen Functionen dieselben Vielfachen der entsprechenden reellen Perioden der transformirten Functionen sind, während die imaginären Perioden den entsprechenden der transformirten gleich sind, so sieht man, dass diese Transformation der *Abel*schen Functionen enthalten ist in dem Ausdrucke von

$$\vartheta(nu_1, \dots nu_\varrho, n\tau_{11}, \dots n\tau_{\varrho\varrho})$$

durch $\vartheta(u_1, \dots u_\varrho, \tau_{11}, \dots \tau_{\varrho\varrho})_\varepsilon$, auf dessen Entwicklung wir nun näher eingehen. Sei zuerst n eine ungrade Zahl (wir werden in den folgenden §§ den Fall $n=2$ behandeln) und setzen wir in §. 4:

$$\varphi(u_1, \dots u_\varrho) = \vartheta(u_1, \dots u_\varrho)\vartheta\left(u_1+\frac{1}{n}, \dots u_\varrho+\frac{1}{n}\right)\dots\vartheta\left(u_1+\frac{n-1}{n}, \dots u_\varrho+\frac{n-1}{n}\right),$$

so erhalten wir nach der ersten Hauptformel dieses §:

$$\Sigma\varphi\left(u_1+\frac{n_1}{n}-\frac{n-1}{2n}, \dots u_\varrho+\frac{n_\varrho}{n}-\frac{n-1}{2n}\right) = C.\vartheta(nu_1, \dots nu_\varrho, n\tau_{11}, \dots n\tau_{\varrho\varrho}),$$

worin sich die Summation auf $n_1, \dots n_\varrho$ von $0, \dots n-1$ erstreckt.

Nun sieht man aus dem oben ausgeführten Additionstheorem, dass sich ein jedes solches φ in eine ganze homogene Function n^{ten} Grades von ϑ-Functionen mit den Argumenten $u_1, \dots u_\varrho$ entwickeln lässt; denn es ist die Entwicklung nach dem Additionstheorem für zwei Factoren möglich, wenn $v_\alpha+w_\alpha=p$ oder $=\frac{p}{2}$ und p eine ganze Zahl ist; multiplicire ich mit einem dritten Factor, so muss $v_\alpha+w_\alpha+w'_\alpha=p$ oder $=\frac{p}{2}$ sein u. s. w.; da nun in unserem Falle:

$$\frac{n_\alpha}{n}-\frac{n-1}{2n}+\frac{1}{n}+\frac{n_\alpha}{n}-\frac{n-1}{2n}+\dots+\frac{n-1}{n}+\frac{n_\alpha}{n}-\frac{n-1}{2n}=\frac{n-1}{2}+n_\alpha-\frac{n-1}{2}=n_\alpha,$$

also gleich einer ganzen Zahl ist, so folgt, dass ein jedes der φ durch das Additionstheorem in Producte von ϑ-Functionen mit den Argumenten $u_1, \dots u_\varrho$ auflösbar ist. — Es lassen sich nun $n-1$ Factoren nach dem Additionstheorem unmittelbar entwickeln, für die Ausführung der letzten Multiplication jedoch muss man die willkürlich annehmbaren Indices $\delta, \varepsilon_1, \dots \varepsilon_\varrho$ so wählen, dass:

$$\vartheta(0, \dots 0)_{\varepsilon\cdot\alpha\beta\gamma\dots}$$

nicht Null wird, diese Function also keine ungrade ist. Freilich treten dadurch mehr als 2^ϱ Indices in die Endformel ein, aber wir können ähnlich, wie es *Hermite* für die ϑ-Functionen mit zwei Variablen gethan hat, schliessen,

dass vermöge der unter den Functionen ϑ stattfindenden Relationen nach Addition der einzelnen Posten nur 2^ϱ solcher Functionen in dem Endausdrucke übrig bleiben werden.

Aus der obigen Formel wird nun unmittelbar

$$\vartheta(nu_1, \dots nu_\varrho, n\tau_{11} \dots n\tau_{\varrho\varrho})_\alpha$$

hergeleitet, wenn für u_a

$$u_a + \tfrac{1}{2} m_a^\alpha + \tfrac{1}{2} n_1^\alpha \tau_{a1} + \cdots + \tfrac{1}{2} n_\varrho^\alpha \tau_{a\varrho}$$

gesetzt wird; zwei solche Ausdrücke durch einander dividirt geben dann:

$$al(nu_1, \dots nu_\varrho, n\tau_{11} \dots n\tau_{\varrho\varrho})_\alpha$$

als rationale Function von

$$al(u_1, \dots u_\varrho, \tau_{11} \dots \tau_{\varrho\varrho})_\beta,$$

deren Zähler und Nenner ganze homogene Functionen n^{ten} Grades sind.

Für die *Abel*schen Functionen erster Ordnung folgt bei einer Transformation dritten Grades:

$$\begin{gathered}\vartheta(u_1, u_2)\vartheta(u_1+\tfrac{1}{3}, u_2+\tfrac{1}{3})\vartheta(u_1+\tfrac{2}{3}, u_2+\tfrac{2}{3}) + \vartheta(u_1+\tfrac{1}{3}, u_2)\vartheta(u_1+\tfrac{2}{3}, u_2+\tfrac{1}{3})\vartheta(u_1, u_2+\tfrac{2}{3}) \\ + \vartheta(u_1, u_2+\tfrac{1}{3})\vartheta(u_1+\tfrac{1}{3}, u_2+\tfrac{2}{3})\vartheta(u_1+\tfrac{2}{3}, u_2) = \\ C.\vartheta(3u_1, 3u_2, 3\tau_{11}, 3\tau_{12}, 3\tau_{22}),\end{gathered}$$

worauf die in der oben beigefügten Tabelle angegebenen Additionsformeln für die *Abel*schen Functionen erster Ordnung unmittelbar anzuwenden sind; es käme nur noch darauf an, durch Substitutionen Gleichungen herzuleiten, aus denen dann durch Elimination der Grössen

$$\vartheta(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})_\alpha, \quad \vartheta(0, \tfrac{1}{3})_\alpha, \quad \text{etc.}$$

die Modulargleichungen folgen, mit deren Hülfe dann wieder die Werthe von $\vartheta(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})_\alpha$ etc. ermittelt werden können.

Um dies deutlicher zu machen, wollen wir auf diese Weise die Modulargleichung für elliptische Functionen, die einer Transformation dritten Grades entspricht, herleiten. Die der obigen analoge Gleichung heisst dann, wenn wir die ϑ-Function für die Nullwerthe der Argumente nur mit dem Buchstaben ϑ bezeichnen:

$$\vartheta_0^2.A.\vartheta(3u, 3\tau)_3 = \vartheta(u)_3\vartheta(u)_3^2\vartheta(\tfrac{1}{3})_0^2 - \vartheta(u)_3\vartheta(u)_2^2\vartheta(\tfrac{1}{3})_1^2$$

woraus folgt:

$$\vartheta_0^2.A.\vartheta(3u, 3\tau)_0 = \vartheta(u)_0\vartheta(u)_0^2\vartheta(\tfrac{1}{3})_0^2 - \vartheta(u)_0\vartheta(u)_1^2\vartheta(\tfrac{1}{3})_1^2$$

$$\vartheta_0^2.A.\vartheta(3u, 3\tau)_2 = \vartheta(u)_2\vartheta(u)_2^2\vartheta(\tfrac{1}{3})_0^2 - \vartheta(u)_2\vartheta(u)_3^2\vartheta(\tfrac{1}{3})_1^2.$$

Bezeichnen wir die ϑ-Functionen mit einfachem Modul mit ϑ, mit dreifachem mit θ, so erhält man, wenn man $u=0$ setzt:

$$\frac{\theta_0}{\theta_3}\cdot\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} = \frac{\vartheta_0^4\vartheta(\tfrac{1}{3})_0^2}{\vartheta_3^4\vartheta(\tfrac{1}{3})_0^2-\vartheta_3^2\vartheta_2^2\vartheta(\tfrac{1}{3})_1^2},$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_3}\cdot\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} = \frac{\vartheta_2^4\vartheta(\tfrac{1}{3})_0^2-\vartheta_3^2\vartheta_2^2\vartheta(\tfrac{1}{3})_1^2}{\vartheta_3^4\vartheta(\tfrac{1}{3})_0^2-\vartheta_3^2\vartheta_2^2\vartheta(\tfrac{1}{3})_1^2}$$

oder in Folge der Relation:

$$\vartheta_0^4+\vartheta_2^4 = \vartheta_3^4,$$

$$\frac{\theta_0}{\theta_3}\cdot\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}+\frac{\theta_2}{\theta_3}\cdot\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} = 1,$$

also die bekannte Modulargleichung:

$$\sqrt{k\lambda}+\sqrt{k_1\lambda_1} = 1.$$

Zur bequemeren Entwicklung der Modulargleichungen der *Abel*schen Functionen wenden wir jedoch die oben zur Aufstellung der Additionstheoreme benutzte Formel an, wie es Herr *Schroeter* für die elliptischen Functionen gethan hat, und nennen die Gleichungen, welche zwischen den ursprünglichen und den transformirten ϑ-Functionen für die Nullwerthe der Argumente bestehen, Modulargleichungen.

§. 7.

Modulargleichungen für die Transformation dritten Grades.

Man erhält leicht durch Zerlegung des Ausdruckes der ϑ-Function:

$$\vartheta(v_1,\dots v_\varrho,\tau_{11}\dots\tau_{\varrho\varrho}) = \Sigma\vartheta(2v_1,\dots 2v_\varrho;\tfrac{1}{2}\mu_1,\dots\tfrac{1}{2}\mu_\varrho,4\tau_{11}\dots 4\tau_{\varrho\varrho}),$$

worin den Grössen $\mu_1,\dots\mu_\varrho$ die Werthe 0 und 1 beizulegen sind; um nun die ϑ-Function mit vierfachem Modul durch die mit einfachem auszudrücken, machen wir in der letzten Gleichung der Reihe nach die $2^\varrho-1$ Substitutionen:

$$v_1-\tfrac{1}{2},v_2,\dots v_\varrho;\; v_1,v_2-\tfrac{1}{2},\dots v_\varrho;\;\dots;\; v_1-\tfrac{1}{2},v_2-\tfrac{1}{2},\dots v_\varrho;\;\dots;\; v_1-\tfrac{1}{2},v_2-\tfrac{1}{2},\dots v_\varrho-\tfrac{1}{2};$$

es geht alsdann die ϑ-Function auf der linken Seite der Gleichung in solche mit den Indices 12, 34, ... $2\varrho-1\;2\varrho$ und den aus diesen bis zur ϱ^{ten} Klasse combinirten über und es nehmen die daraus entstehenden Gleichungen die Form an:

$$\vartheta(v_1,\dots v_\varrho,\tau_{11}\dots\tau_{\varrho\varrho})_{12} = \Sigma(-1)^{\mu_1}\vartheta(2v_1,\dots 2v_\varrho;\tfrac{1}{2}\mu_1,\dots\tfrac{1}{2}\mu_\varrho,4\tau_{11}\dots 4\tau_{\varrho\varrho}),$$

$$\vartheta(v_1,\dots v_\varrho,\tau_{11}\dots\tau_{\varrho\varrho})_{34} = \Sigma(-1)^{\mu_2}\vartheta(2v_1,\dots 2v_\varrho;\tfrac{1}{2}\mu_1,\dots\tfrac{1}{2}\mu_\varrho,4\tau_{11}\dots 4\tau_{\varrho\varrho}),$$

. . . .

$$\vartheta(v_1,\dots v_\varrho,\tau_{11}\dots\tau_{\varrho\varrho})_{1234} = \Sigma(-1)^{\mu_1+\mu_2}\vartheta(2v_1,\dots 2v_\varrho;\tfrac{1}{2}\mu_1,\dots\tfrac{1}{2}\mu_\varrho,4\tau_{11}\dots 4\tau_{\varrho\varrho}),$$

. . . . ;

addirt man nun alle diese Gleichungen zu der ersten oben aufgestellten, so fallen auf der rechten Seite alle Glieder mit Ausnahme des ersten fort und man erhält folgende einer bekannten Formel für elliptische Functionen analoge Hülfsformel:

$$\vartheta(2v_1, \dots 2v_\varrho, 4\tau_{11} \dots 4\tau_{\varrho\varrho}) = \frac{1}{2^\varrho} \sum_\alpha \vartheta(v_1, \dots v_\varrho, \tau_{11} \dots \tau_{\varrho\varrho})_\alpha,$$

worin der Zeiger α die Werthe 00, 12, 34, ... $2\varrho-1\ 2\varrho$ und die aus den letzten ϱ Indices bis zur ϱ^{ten} Klasse combinirten Werthe annimmt; verallgemeinert heisst die Gleichung:

$$\vartheta(2v_1, \dots 2v_\varrho; \tfrac{1}{2}\mu_1, \dots \tfrac{1}{2}\mu_\varrho, 4\tau_{11} \dots 4\tau_{\varrho\varrho}) = \frac{1}{2^\varrho} \sum_\alpha (-1)^{\sum\limits_a \mu_a m_a^\alpha} \vartheta(v_1, \dots v_\varrho, \tau_{11} \dots \tau_{\varrho\varrho})_\alpha.$$

Setzen wir nun in der am Anfange des §. 3 aufgestellten Gleichung $p=3$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&\vartheta(u_1+v_1, \dots u_\varrho+v_\varrho, \tau_{11} \dots \tau_{\varrho\varrho})\, \vartheta(u_1-3v_1, \dots u_\varrho-3v_\varrho, 3\tau_{11} \dots 3\tau_{\varrho\varrho}) \\
&= \sum_\mu \{ e^{\pi i [\mu_1(\mu_1\tau_{11}+\dots+\mu_\varrho\tau_{1\varrho})+\dots+\mu_\varrho(\mu_1\tau_{\varrho 1}+\dots+\mu_\varrho\tau_{\varrho\varrho})]}\, e^{2\pi i [\mu_1(u_1+v_1)+\dots+\mu_\varrho(u_\varrho+v_\varrho)]} \\
&\times \vartheta(4u_1+3\mu_1\tau_{11}+\dots+3\mu_\varrho\tau_{1\varrho}, \dots 4u_\varrho+3\mu_1\tau_{\varrho 1}+\dots+3\mu_\varrho\tau_{\varrho\varrho}, 12\tau_{11} \dots 12\tau_{\varrho\varrho}) \\
&\qquad \times \vartheta(4v_1+\mu_1\tau_{11}+\dots+\mu_\varrho\tau_{1\varrho}, \dots 4v_\varrho+\mu_1\tau_{\varrho 1}+\dots+\mu_\varrho\tau_{\varrho\varrho}, 4\tau_{11} \dots 4\tau_{\varrho\varrho}) \}
\end{aligned}$$

worin den Grössen $\mu_1, \dots \mu_\varrho$ die Werthe 0, 1, 2, 3 beizulegen sind.

Substituiren wir, wie oben, für u_1 $u_1-\frac{1}{2}$ etc., addiren die so entstehenden Gleichungen und führen die mit Parametern versehenen ϑ-Functionen ein, so erhalten wir folgende einfachere Gleichung, in der $\mu_1, \dots \mu_\varrho$ die Werthe 0 und 1 annehmen:

$$\begin{aligned}
&\sum_\alpha \vartheta(u_1+v_1, \dots u_\varrho+v_\varrho, \tau_{11} \dots \tau_{\varrho\varrho})_\alpha\, \vartheta(u_1-3v_1, \dots u_\varrho-3v_\varrho, 3\tau_{11} \dots 3\tau_{\varrho\varrho})_\alpha \\
&= 2^\varrho \sum_\mu \vartheta(4u_1, \dots 4u_\varrho; \tfrac{1}{2}\mu_1, \dots \tfrac{1}{2}\mu_\varrho, 12\tau_{11} \dots 12\tau_{\varrho\varrho})\, \vartheta(4v_1, \dots 4v_\varrho; \tfrac{1}{2}\mu_1, \dots \tfrac{1}{2}\mu_\varrho, 4\tau_{11} \dots 4\tau_{\varrho\varrho}),
\end{aligned}$$

wo α die schon oben angegebenen Werthe erhält, und die ϑ-Functionen auf der rechten Seite der Gleichung die Indices 01, 23, 45, ... und die aus diesen bis zur ϱ^{ten} Klasse combinirten Werthe haben.

Wendet man auf die eben erhaltene Gleichung die vorher entwickelte Hülfsgleichung an, so erhält man nach einigen Transformationen:

$$\begin{aligned}
&\sum_\alpha \vartheta(u_1+v_1, \dots u_\varrho+v_\varrho, \tau_{11} \dots \tau_{\varrho\varrho})_\alpha\, \vartheta(u_1-3v_1, \dots u_\varrho-3v_\varrho, 3\tau_{11} \dots 3\tau_{\varrho\varrho})_\alpha \\
&= \frac{1}{2^\varrho} \sum_\mu \{ \sum_\gamma (-1)^{\sum\limits_a \mu_a m_a^\gamma} \vartheta(2u_1, \dots 2u_\varrho, 3\tau_{11} \dots 3\tau_{\varrho\varrho})_\gamma \sum_\delta (-1)^{\sum\limits_a \mu_a m_a^\delta} \vartheta(2v_1, \dots 2v_\varrho, \tau_{11} \dots \tau_{\varrho\varrho})_\delta \},
\end{aligned}$$

wo die Zeiger γ, δ die Bedeutung des α haben.

Nun ist leicht zu sehen, dass alle Glieder mit Ausnahme derjenigen, in welchen $\gamma = \delta$ ist, wegfallen, und wir erhalten, wenn

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_\varrho = 0$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned}&\sum_\alpha \vartheta(u_1, \ldots u_\varrho, \tau_{11} \ldots \tau_{\varrho\varrho})_\alpha \vartheta(u_1, \ldots u_\varrho, 3\tau_{11} \ldots 3\tau_{\varrho\varrho})_\alpha \\ = &\sum_\alpha \vartheta(2u_1, \ldots 2u_\varrho, 3\tau_{11} \ldots 3\tau_{\varrho\varrho})_\alpha \vartheta(0, \ldots 0, \tau_{11} \ldots \tau_{\varrho\varrho})_\alpha,\end{aligned}$$

wo α die nunmehr feststehende Bedeutung hat.

Diese Gleichung lautet verallgemeinert:

$$\begin{aligned}&\sum_\alpha \vartheta(u_1, \ldots u_\varrho, 3\tau_{11} \ldots 3\tau_{\varrho\varrho})_{\alpha\mu} \vartheta(u_1, \ldots u_\varrho, \tau_{11} \ldots \tau_{\varrho\varrho})_{\alpha\mu} \\ = &\sum_\alpha (-1)^{\sum_\mathfrak{a} n_\mathfrak{a}^\mu m_\mathfrak{a}^\alpha} \vartheta(2u_1, \ldots 2u_\varrho, 3\tau_{11} \ldots 3\tau_{\varrho\varrho})_\alpha \vartheta(0, \ldots 0, \tau_{11} \ldots \tau_{\varrho\varrho})_\alpha.\end{aligned}$$

Giebt man nun den Grössen $n_1^\mu, \ldots n_\varrho^\mu$ $3\varrho - 3$ bestimmte Werthe mit Ausnahme der Combination:

$$n_1^\mu = n_2^\mu = \cdots = n_\varrho^\mu = 0,$$

so erhält man die zur Transformation dritten Grades gehörigen Modulargleichungen (für den Fall, dass sie auf dieselben Vielfachen der Moduln führt) in folgender Form:

$$(a.) \quad \begin{cases} \quad \sum_\alpha \vartheta(0, \ldots 0, 3\tau_{11} \ldots 3\tau_{\varrho\varrho})_{\alpha\mu} \vartheta(0, \ldots 0, \tau_{11} \ldots \tau_{\varrho\varrho})_{\alpha\mu} \\ = \sum_\alpha (-1)^{\sum_\mathfrak{a} n_\mathfrak{a}^\mu m_\mathfrak{a}^\alpha} \vartheta(0, \ldots 0, 3\tau_{11} \ldots 3\tau_{\varrho\varrho})_\alpha \vartheta(0, \ldots 0, \tau_{11} \ldots \tau_{\varrho\varrho})_\alpha. \end{cases}$$

Für die *Abel*schen Functionen erster Ordnung lauten die Modulargleichungen, wenn die ϑ-Functionen mit dreifachem Modul mit θ bezeichnet werden, folgendermassen:

$$\begin{aligned}\theta_4 \vartheta_4 + \theta_{03} \vartheta_{03} &= \theta_5 \vartheta_5 + \theta_{12} \vartheta_{12} - \theta_{34} \vartheta_{34} - \theta_0 \vartheta_0, \\ \theta_{01} \vartheta_{01} + \theta_2 \vartheta_2 &= \theta_5 \vartheta_5 - \theta_{12} \vartheta_{12} + \theta_{34} \vartheta_{34} - \theta_0 \vartheta_0, \\ \theta_{23} \vartheta_{23} + \theta_{14} \vartheta_{14} &= \theta_5 \vartheta_5 - \theta_{12} \vartheta_{12} - \theta_{34} \vartheta_{34} + \theta_0 \vartheta_0.\end{aligned}$$

Es lässt sich für die *Abel*schen Functionen beliebiger Ordnung bei einer Transformation dritten Grades von der oben angegebenen Beschaffenheit eine Modulargleichung aufstellen, die ich hier noch besonders hervorhebe:

Legt man nämlich in der Gleichung $(a.)$ den Grössen $n_1^\mu, \ldots n_\varrho^\mu$ alle möglichen $2^\varrho - 1$ Werthe bei, indem wir wieder

$$n_1^\mu = n_2^\mu = \cdots = n_\varrho^\mu = 0$$

ausschliessen, und addirt alle so erhaltenen Gleichungen, so findet man auf der linken Seite alle ϑ-Functionen mit Ausnahme derer, welche die Indices 00, 12, ... $2\varrho-1$ 2ϱ und die aus den letzten ϱ Zeigern bis zur ϱ^{ten} Klasse combinirten haben, rechts dagegen kommt jedes der letztgenannten ϑ $2^\varrho-1$ mal vor mit dem positiven oder negativen Zeichen versehen; da nun, wie leicht zu sehen,

$$\sum_{\mu}(-1)^{\sum n_\epsilon^\mu m_\epsilon^a} = -1$$

ist, wenn $n_1^\mu = \cdots = n_\varrho^\mu = 0$ ausgeschlossen ist, und nur das ϑ, worin $m_1^a = \cdots = m_\varrho^a = 0$ ist, $2^\varrho-1$ mal vorkommt, so erhält man, wenn wir alle ϑ_a mit Ausnahme von ϑ auf die linke Seite bringen, die Gleichung:

$$\frac{\vartheta(0, \dots 0, 3\tau_{11} \dots 3\tau_{\varrho\varrho})_a}{\vartheta(0, \dots 0, 3\tau_{11} \dots 3\tau_{\varrho\varrho})} \frac{\vartheta(0, \dots 0, \tau_{11} \dots \tau_{\varrho\varrho})_a}{\vartheta(0, \dots 0, \tau_{11} \dots \tau_{\varrho\varrho})} + \text{den für alle Indices ebenso gebildeten Ausdrücken} = 2^\varrho-1,$$

oder in Worten ausgedrückt:

„Die Summe der Producte aller *Abel*schen Functionen ϱ^{ter} Ordnung für den dreifachen und einfachen Modul (für die Nullwerthe der Argumente) ist gleich $2^\varrho-1$."

Für $\varrho = 1$ folgt:

$$\frac{\theta_0}{\theta_3}\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} + \frac{\theta_2}{\theta_3}\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} = 1$$

oder die Modulargleichung für elliptische Functionen:

$$\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k_1\lambda_1} = 1.$$

§. 8.

Die Transformation zweiten Grades, welche auf doppelte Moduln der ϑ-Functionen führt.

Nachdem wir die Art der Behandlung des Transformationsproblems für einen ungraden Grad auseinandergesetzt haben, wollen wir nun auf die Transformation zweiten Grades genauer eingehen.

Nach der oben entwickelten Formel war, wenn $\mu_1, \dots \mu_\varrho$ die Werthe 0 und 1 beigelegt werden,

$$\vartheta(u_1+v_1, \dots u_\varrho+v_\varrho, \tau_{11} \dots \tau_{\varrho\varrho})\vartheta(u_1-v_1, \dots u_\varrho-v_\varrho, \tau_{11} \dots \tau_{\varrho\varrho})$$
$$= \sum_{\mu}\vartheta(2u_1, \dots 2u_\varrho; \tfrac{1}{2}\mu_1, \dots \tfrac{1}{2}\mu_\varrho, 2\tau_{11} \dots 2\tau_{\varrho\varrho})\vartheta(2v_1, \dots 2v_\varrho; \tfrac{1}{2}\mu_1, \dots \tfrac{1}{2}\mu_\varrho, 2\tau_{11} \dots 2\tau_{\varrho\varrho}),$$

woraus man nach ähnlichen wie oben gemachten Transformationen die fol-

gende Gleichung erhält:

$$\vartheta(2u_1, \dots 2u_\varrho, 2\tau_{11} \dots 2\tau_{\varrho\varrho})\vartheta(2v_1, \dots 2v_\varrho, 2\tau_{11} \dots 2\tau_{\varrho\varrho})$$
$$= \frac{1}{2^\varrho}\sum_\alpha \vartheta(u_1+v_1, \dots u_\varrho+v_\varrho, \tau_{11} \dots \tau_{\varrho\varrho})_\alpha \vartheta(u_1-v_1, \dots u_\varrho-v_\varrho, \tau_{11} \dots \tau_{\varrho\varrho})_\alpha,$$

in der α die schon mehrfach angegebene Bedeutung hat; verallgemeinert heisst diese Gleichung, wenn $m_1, \dots m_\varrho$ ganze Zahlen bedeuten,

$$\vartheta(2u_1+\tfrac{1}{2}m_1^\lambda, \dots 2u_\varrho+\tfrac{1}{2}m_\varrho^\lambda; \tfrac{1}{2}\mu_1, \dots \tfrac{1}{2}\mu_\varrho, 2\tau_{11} \dots 2\tau_{\varrho\varrho})$$
$$\times \vartheta(2v_1+\tfrac{1}{2}m_1^\lambda, \dots 2v_\varrho+\tfrac{1}{2}m_\varrho^\lambda; \tfrac{1}{2}\mu_1, \dots \tfrac{1}{2}\mu_\varrho, 2\tau_{11} \dots 2\tau_{\varrho\varrho}) =$$
$$\frac{1}{2^\varrho}\sum_\alpha(-1)^{\sum_a \mu_a m_a^\alpha} \vartheta(u_1+v_1+\tfrac{1}{2}m_1^\lambda, \dots u_\varrho+v_\varrho+\tfrac{1}{2}m_\varrho^\lambda, \tau_{11} \dots \tau_{\varrho\varrho})_\alpha \vartheta(u_1-v_1, \dots u_\varrho-v_\varrho, \tau_{11} \dots \tau_{\varrho\varrho})_\alpha.$$

Man erhält aus dieser Gleichung unmittelbar die algebraische Transformation, während die Modulargleichungen sich unter folgender Form ergeben:

$$\vartheta(\tfrac{1}{2}m_1^\lambda, \dots \tfrac{1}{2}m_\varrho^\lambda; \tfrac{1}{2}\mu_1, \dots \tfrac{1}{2}\mu_\varrho, 2\tau_{11} \dots 2\tau_{\varrho\varrho})^2$$
$$= \frac{1}{2^\varrho}\sum_\alpha(-1)^{\sum_a \mu_a m_a^\alpha} \vartheta(0, \dots 0, \tau_{11} \dots \tau_{\varrho\varrho})_{\alpha\lambda} \vartheta(0, \dots 0, \tau_{11} \dots \tau_{\varrho\varrho})_\alpha,$$

wo α die oben angegebenen Werthe hat und

$$\begin{aligned} m_a^{\alpha\lambda} &\equiv m_a^\alpha + m_a^\lambda \\ n_a^{\alpha\lambda} &\equiv n_a^\alpha + n_a^\lambda \end{aligned} \quad (\text{mod. } 2).$$

§. 9.

Ausführung der Transformation zweiten Grades für die *Abel*schen Functionen erster Ordnung.

Wir wollen in diesem § für die *Abel*schen Functionen erster Ordnung genauer auf die eben behandelte Transformation eingehen, welche Herr *Richelot* von einem ganz anderen Gesichtspunkte aus (durch Umformung der Integrale) im 16ten Bande dieses Journals behandelt hat; wir betrachten nur den Fall, der auf doppelte Moduln der ϑ-Function führt und der die der *Landen*schen Substitution für elliptische Functionen entsprechende Transformation liefert.

Für die *Abel*schen Functionen erster Ordnung ist nach *Hermite* bei einem gegebenen Grad k der Transformation die Zahl der nicht aequivalenten Systeme

$$1+k+k^2+k^3$$

also in unserem Falle 15.

Seien die Moduln der ϑ-Function des zu transformirenden Systems $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$, des transformirten $\tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22}$, so heben wir die folgenden vier

einfachsten Beziehungen hervor:

$$\begin{array}{llll} \tau'_{11}=\frac{1}{2}\tau_{11}, & \tau'_{11}=\frac{1}{2}\tau_{11}, & \tau'_{11}=2\tau_{11}, & \tau'_{11}=2\tau_{11}, \\ \tau'_{12}=\frac{1}{2}\tau_{12}, & \tau'_{12}=\tau_{12}, & \tau'_{12}=\tau_{12}, & \tau'_{12}=2\tau_{12}, \\ \tau'_{22}=\frac{1}{2}\tau_{22}, & \tau'_{22}=2\tau_{22}, & \tau'_{22}=\frac{1}{2}\tau_{22}, & \tau'_{22}=2\tau_{22}. \end{array}$$

Wir werden uns mit dem letzten Falle beschäftigen und stellen uns nun folgende Aufgabe:

Es sei gegeben:

$$u_1 = \int_0^{y_1}\frac{dy}{\sqrt{R(y)}}+\int_1^{y_2}\frac{dy}{\sqrt{R(y)}},$$

$$u_2 = \int_0^{y_1}\frac{y\,dy}{\sqrt{R(y)}}+\int_1^{y_2}\frac{y\,dy}{\sqrt{R(y)}}$$

wo

$$R(y) = y(1-y)(1-c^2y)(1-l^2y)(1-m^2y);$$

es soll dies System durch eine Transformation zweiten Grades, die auf die doppelten Moduln der ϑ-Function führt, in das folgende:

$$u_1 = \int_0^{z_1}\frac{(\alpha+\beta z)\,dz}{\sqrt{R_1(z)}}+\int_\infty^{z_2}\frac{(\alpha+\beta z)\,dz}{\sqrt{R_1(z)}},$$

$$u_2 = \int_0^{z_1}\frac{(\gamma+\delta z)\,dz}{\sqrt{R_1(z)}}+\int_\infty^{z_2}\frac{(\gamma+\delta z)\,dz}{\sqrt{R_1(z)}}$$

transformirt werden (s. §. 5), wo

$$R_1(z) = z(1-z)(1-\varkappa^2 z)(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z).$$

Da es, wie leicht zu sehen, nur darauf ankommt

$$\vartheta(2v_1, 2v_2, 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, 2\tau_{22})$$

durch $\vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$ auszudrücken, so entnehmen wir den Entwicklungen des vorigen §. folgende Gleichungen, in denen wir die ϑ-Functionen mit doppelten Moduln mit θ bezeichnen:

$$\begin{aligned}
4\theta_5\,\theta(2v_1,2v_2)_5 &= \vartheta(v_1,v_2)_5^2+\vartheta(v_1,v_2)_0^2+\vartheta(v_1,v_2)_{12}^2+\vartheta(v_1,v_2)_{34}^2,\\
4\theta_0\,\theta(2v_1,2v_2)_0 &= 2\vartheta(v_1,v_2)_0\vartheta(v_1,v_2)_5+2\vartheta(v_1,v_2)_{12}\vartheta(v_1,v_2)_{34},\\
4\theta_2\,\theta(2v_1,2v_2)_2 &= 2\vartheta(v_1,v_2)_{34}\vartheta(v_1,v_2)_5-2\vartheta(v_1,v_2)_{12}\vartheta(v_1,v_2)_0,\\
4\theta_4\,\theta(2v_1,2v_2)_4 &= \vartheta(v_1,v_2)_5^2-\vartheta(v_1,v_2)_0^2+\vartheta(v_1,v_2)_{12}^2-\vartheta(v_1,v_2)_{34}^2,\\
4\theta_{01}\theta(2v_1,2v_2)_{01} &= \vartheta(v_1,v_2)_5^2-\vartheta(v_1,v_2)_0^2-\vartheta(v_1,v_2)_{12}^2+\vartheta(v_1,v_2)_{34}^2,\\
4\theta_{03}\theta(2v_1,2v_2)_{03} &= 2\vartheta(v_1,v_2)_{12}\vartheta(v_1,v_2)_5-2\vartheta(v_1,v_2)_{34}\vartheta(v_1,v_2)_0,\\
4\theta_{12}\theta(2v_1,2v_2)_{12} &= 2\vartheta(v_1,v_2)_{12}\vartheta(v_1,v_2)_5+2\vartheta(v_1,v_2)_{34}\vartheta(v_1,v_2)_0,\\
4\theta_{23}\theta(2v_1,2v_2)_{23} &= \vartheta(v_1,v_2)_5^2+\vartheta(v_1,v_2)_0^2-\vartheta(v_1,v_2)_{12}^2-\vartheta(v_1,v_2)_{34}^2,\\
4\theta_{34}\theta(2v_1,2v_2)_{34} &= 2\vartheta(v_1,v_2)_{34}\vartheta(v_1,v_2)_5+2\vartheta(v_1,v_2)_{12}\vartheta(v_1,v_2)_0.
\end{aligned}$$

Bevor wir zur Bestimmung der Moduln übergehen, schicken wir die Bemerkung voraus, dass 6 der ϑ-Functionen für die Nullwerthe der Argumente verschwinden, nämlich:

$$\vartheta_1 \quad \vartheta_3 \quad \vartheta_{02} \quad \vartheta_{04} \quad \vartheta_{13} \quad \vartheta_{24}.$$

Nun ist *):

$$\varkappa^2 = \frac{\theta^2_{23}.\theta^2_4}{\theta^2_{01}.\theta^2_5}, \quad \lambda^2 = \frac{\theta^2_{03}.\theta^2_{23}}{\theta^2_{12}.\theta^2_{01}}, \quad \mu^2 = \frac{\theta^2_{03}.\theta^2_4}{\theta^2_{12}.\theta^2_5},$$

$$\varkappa_1^2 = \frac{\theta^2_2.\theta^2_{34}}{\theta^2_{01}.\theta^2_5}, \quad \lambda_1^2 = \frac{\theta^2_0.\theta^2_2}{\theta^2_{12}.\theta^2_{01}}, \quad \mu_1^2 = \frac{\theta^2_2.\theta^2_{34}}{\theta^2_{12}.\theta^2_5},$$

$$\lambda_\varkappa^2 = \frac{\theta^2_{14}.\theta^2_2.\theta^2_{23}}{\theta^2_{12}.\theta^2_{01}.\theta^2_5}, \quad \mu_\lambda^2 = \frac{\theta^2_{14}.\theta^2_0.\theta^2_{03}}{\theta^2_{12}.\theta^2_{01}.\theta^2_5}, \quad \mu_\varkappa^2 = \frac{\theta^2_{14}.\theta^2_{34}.\theta^2_4}{\theta^2_{12}.\theta^2_{01}.\theta^2_5},$$

wo $\lambda_\varkappa$, μ_λ, $\mu_\varkappa$ nach Herrn *Richelot* durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$\lambda_\varkappa^2 = \varkappa^2 - \lambda^2,$$
$$\mu_\lambda^2 = \lambda^2 - \mu^2,$$
$$\mu_\varkappa^2 = \varkappa^2 - \mu^2.$$

Führen wir nun mit Hülfe der oben aufgestellten Gleichungen statt der θ mit doppeltem Modul die ϑ mit einfachem Modul ein, so erhält man:

$$\varkappa^2 = \frac{(\vartheta^2_5 - \vartheta^2_{34})^2 - (\vartheta^2_0 - \vartheta^2_{12})^2}{(\vartheta^2_5 + \vartheta^2_{34})^2 - (\vartheta^2_0 + \vartheta^2_{12})^2} = \left(\frac{\vartheta^2_2 - \vartheta^2_{01}}{\vartheta^2_2 + \vartheta^2_{01}}\right)^2,$$

wie sich nach einigen Transformationen ergiebt, in welchen die von Herrn *Rosenhain* für die ϑ-Functionen mit den Nullwerthen der Argumente aufgestellten Relationen, auf welche ich jedoch hier nicht näher eingehen kann, zu benutzen sind. Ebenso erhält man nach ähnlichen Transformationen:

$$\lambda^2 = \frac{\vartheta_5\vartheta_{12} - \vartheta_0\vartheta_{34}}{\vartheta_5\vartheta_{12} + \vartheta_0\vartheta_{34}} \, \frac{\vartheta^2_5 + \vartheta^2_0 - \vartheta^2_{12} - \vartheta^2_{34}}{\vartheta^2_5 - \vartheta^2_0 - \vartheta^2_{12} + \vartheta^2_{34}} = \frac{(\vartheta_5\vartheta_{12} - \vartheta_0\vartheta_{34})(\vartheta^2_{23} + \vartheta^2_{14})(\vartheta^2_{01} - \vartheta^2_2)}{(\vartheta_5\vartheta_{12} + \vartheta_0\vartheta_{34})(\vartheta^2_{23} - \vartheta^2_{14})(\vartheta^2_{01} + \vartheta^2_2)},$$

$$\mu^2 = \frac{\vartheta_5\vartheta_{12} - \vartheta_0\vartheta_{34}}{\vartheta_5\vartheta_{12} + \vartheta_0\vartheta_{34}} \, \frac{\vartheta^2_5 - \vartheta^2_0 + \vartheta^2_{12} - \vartheta^2_{34}}{\vartheta^2_5 + \vartheta^2_0 + \vartheta^2_{12} + \vartheta^2_{34}} = \frac{(\vartheta_5\vartheta_{12} - \vartheta_0\vartheta_{34})(\vartheta^2_{23} - \vartheta^2_{14})(\vartheta^2_{01} - \vartheta^2_2)}{(\vartheta_5\vartheta_{12} + \vartheta_0\vartheta_{34})(\vartheta^2_{23} + \vartheta^2_{14})(\vartheta^2_{01} + \vartheta^2_2)},$$

oder wenn man statt der ϑ-Functionen ihre Werthe durch c, l, m ausgedrückt setzt:

$$\varkappa^2 = \left(\frac{m_1 - c_1 l_1}{m_1 + c_1 l_1}\right)^2,$$

$$\lambda^2 = \frac{1 - m_1}{1 + m_1} \cdot \frac{m_1 - c_1 l_1}{m_1 + c_1 l_1} \cdot \frac{m_1 cl + m_c m_l}{m_1 cl - m_c m_l},$$

$$\mu^2 = \frac{1 - m_1}{1 + m_1} \cdot \frac{m_1 - c_1 l_1}{m_1 + c_1 l_1} \cdot \frac{m_1 cl - m_c m_l}{m_1 cl + m_c m_l},$$

*) Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes par M. *G. Rosenhain.* 1846.

also genau diejenigen Moduln, welche wir in der Abhandlung des Herrn *Richelot* Band 16, S. 275 finden.

Untersuchen wir nun die algebraische Transformation selbst: Um unsere in §. 1 zwischen den ϑ-Functionen und den oberen Grenzen der Integrale aufgestellten Relationen anwenden zu können, müssen wir die Integralgrenzen in den beiden in diesem §. aufgestellten Gleichungssystemen, die wir nach Herrn *Richelot* gewählt haben, um die Resultate unmittelbar vergleichen zu können, ändern. Man sieht leicht, dass in dem ersten Gleichungssystem, wenn wir:

$$a_0 = \frac{1}{m^2}, \quad a_1 = \frac{1}{l^2}, \quad a_2 = \frac{1}{c^2}, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 0$$

setzen, die unteren Integrationsgrenzen

$$a_1 = \frac{1}{l^2}, \quad a_3 = 1$$

werden, wenn wir zu u_1

$$\int_{a_3}^{a_4} \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} - \int_{\infty}^{a_1} \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} + \int_{\infty}^{a_3} \frac{dy}{\sqrt{R(y)}},$$

zu u_2

$$\int_{a_3}^{a_4} \frac{y\,dy}{\sqrt{R(y)}} - \int_{\infty}^{a_1} \frac{y\,dy}{\sqrt{R(y)}} + \int_{\infty}^{a_3} \frac{y\,dy}{\sqrt{R(y)}}$$

addiren, oder wie nicht schwer zu sehen ist,

$$v_1 \quad \text{um} \quad -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\tau_{11} + \tfrac{1}{2}\tau_{12}$$
$$v_2 \quad \text{um} \quad -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\tau_{21} + \tfrac{1}{2}\tau_{22}$$

vermehren.

Ebenso werden im zweiten Gleichungssystem die unteren Grenzen

$$a_1 = \frac{1}{\lambda^2}, \quad a_3 = 1$$

werden, wenn wir zu u_1

$$\int_{a_3}^{a_4} \frac{(\alpha + \beta z)\,dz}{\sqrt{R_1(z)}} - \int_{\infty}^{a_1} \frac{(\alpha + \beta z)\,dz}{\sqrt{R_1(z)}},$$

zu u_2

$$\int_{a_3}^{a_4} \frac{(\gamma + \delta z)\,dz}{\sqrt{R_1(z)}} - \int_{\infty}^{a_1} \frac{(\gamma + \delta z)\,dz}{\sqrt{R_1(z)}}$$

addiren, also

$$v_1 \quad \text{um} \quad -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\tau_{11}$$
$$v_2 \quad \text{um} \quad 1 - \tfrac{1}{2}\tau_{21}$$

vermehren.

Es sind also nun die ϑ-Functionen durch die im §. 1 angegebenen algebraischen Ausdrücke zu ersetzen, nachdem auf sie im ersten Gleichungssystem die dreizehnte Substitution der in §. 2 aufgestellten Tabelle, im zweiten die achte Substitution angewandt ist. Wir könnten sodann aus den oben aufgestellten Gleichungen die Transformation unmittelbar herleiten; doch würden theils die Ausdrücke zu complicirt, theils würde eine unmittelbare Vergleichung mit den Resultaten von *Richelot* schwierig sein, welche die Ueberführung *eines* Integrals des ersten Systems in die Summe zweier des zweiten Systems liefern; wir wollen also in dem ersten System $y_2 = 1$ setzen und erhalten dann:

$$\frac{\sqrt{(1-\mu^2 z_1)(1-\mu^2 z_2)}}{\sqrt{(1-\lambda^2 z_1)(1-\lambda^2 z_2)}} \cdot \frac{\sqrt{\lambda . \lambda_1 . \lambda_x}}{\sqrt{\mu . \mu_1 . \mu_x}} = -\frac{\theta(2v_1, 2v_2)_2}{\theta(2v_1, 2v_2)_{34}}$$

$$= \frac{\vartheta(v_1, v_2)_{34}\, \vartheta(v_1, v_2)_5 - \vartheta(v_1, v_2)_{12}\, \vartheta(v_1, v_2)_0}{\vartheta(v_1, v_2)_{34}\, \vartheta(v_1, v_2)_5 + \vartheta(v_1, v_2)_{12}\, \vartheta(v_1, v_2)_0} \cdot \frac{\theta_{34}}{\theta_2};$$

führen wir mit Beachtung dessen, was eben über die Integralgrenzen gesagt wurde, die algebraischen Ausdrücke ein, so erhalten wir nach einigen Umformungen, auf die wir hier nicht näher eingehen,

$$\frac{\sqrt{(1-\mu^2 z_1)(1-\mu^2 z_2)}}{\sqrt{(1-\lambda^2 z_1)(1-\lambda^2 z_2)}} = \frac{cm_l - lm_c}{cm_l + lm_c} \frac{\mu_1 . \mu_x}{\lambda_1 . \lambda_x} = \frac{\vartheta_0 \vartheta_{12} - \vartheta_{34} \vartheta_5}{\vartheta_0 \vartheta_{12} + \vartheta_{34} \vartheta_5} \frac{\mu_1 . \mu_x}{\lambda_1 . \lambda_x}$$

$$= -\frac{\theta_2^2}{\theta_{34}^2} \frac{\mu_1 . \mu_x}{\lambda_1 . \lambda_x} = \frac{\theta_4 . \theta_{01}}{\theta_3 . \theta_{23}} = \frac{\mu}{\lambda},$$

also ergiebt sich

$$\frac{(1-\mu^2 z_1)(1-\mu^2 z_2)}{(1-\lambda^2 z_1)(1-\lambda^2 z_2)} = \frac{\mu^2}{\lambda^2}$$

oder

$$z_1 z_2 = \frac{1}{\lambda^2 \mu^2}$$ (s. *Richelot*, Band 16, S. 282, No. 38).

Ebenso erhalten wir:

$$\frac{\sqrt{(1-x^2 z_1)(1-x^2 z_2)}}{\sqrt{(1-z_1)(1-z_2)}} \frac{\sqrt{\lambda_1 \mu_1}}{\sqrt{\lambda_x . \mu_x . x}} = \frac{\theta(2v_1, 2v_2)_0}{\theta(2v_1, 2v_2)_{14}}$$

$$= \frac{\vartheta(v_1, v_2)_0\, \vartheta(v_1, v_2)_5 + \vartheta(v_1, v_2)_{12}\, \vartheta(v_1, v_2)_{34}}{\vartheta(v_1, v_2)_0\, \vartheta(v_1, v_2)_5 - \vartheta(v_1, v_2)_{12}\, \vartheta(v_1, v_2)_{34}} \cdot \frac{\theta_{14}}{\theta_0};$$

ähnlich wie oben ergiebt sich:

$$\frac{\sqrt{(1-x^2 z_1)(1-x^2 z_2)}}{\sqrt{(1-z_1)(1-z_2)}} = \frac{\sqrt{\lambda_x . \mu_x . x}}{\sqrt{\lambda_1 \mu_1}} \cdot \frac{\theta_{14}}{\theta_0} \cdot \frac{l_1 + c_1}{l_1 - c_1} \left\{\frac{1-(1-c_1 l_1) y_1}{1-(1+c_1 l_1) y_1}\right\}$$

$$= \frac{\lambda_x \mu_x}{\lambda_1 \mu_1} \cdot \frac{\vartheta_0 \vartheta_5 + \vartheta_{34} \vartheta_2}{\vartheta_0 \vartheta_5 - \vartheta_{34} \vartheta_2} \left\{\frac{1-(1-c_1 l_1) y_1}{1-(1+c_1 l_1) y_1}\right\} = \frac{\lambda_x \mu_x}{\lambda_1 \mu_1} \cdot \frac{\theta_0^2}{\theta_{14}^2} \left\{\frac{1-(1-c_1 l_1) y_1}{1-(1+c_1 l_1) y_1}\right\}$$

oder

$$\frac{(1-\varkappa^2 z_1)(1-\varkappa^2 z_2)}{(1-z_1)(1-z_2)} = \varkappa^2 \left\{\frac{1-(1-c_1 l_1) y_1}{1-(1+c_1 l_1) y_1}\right\}^2$$ (s. *Richelot* S. 282, No. 36, 37);

aus diesen beiden eben gewonnenen Resultaten ergiebt sich für die Gleichung

$$\int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-c^2 y)(1-l^2 y)(1-m^2 y)}}$$

$$= \int_0^{z_1} \frac{(\alpha+\beta z)\,dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z)}} + \int_\infty^{z_2} \frac{(\alpha+\beta z)\,dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z)}}$$

die algebraische Beziehung:

$$z^2 + z\left[\frac{2(m_1^2-c_1^2 l_1^2)(1-m_1^2) y_1 (1-y_1) - 4m_1^2(1-(1-c_1^2 l_1^2) y_1)}{y_1(1-y_1)(m_1-c_1 l_1)^2(1-m_1)^2}\right] + \left[\frac{(m_1+c_1 l_1)(1+m_1)}{(m_1-c_1 l_1)(1-m_1)}\right]^2 = 0,$$

während die Moduln durch die oben angegebenen Beziehungen ausgedrückt sind. Die Grössen α, β werden durch algebraisches Einsetzen der Substitution bestimmt (s. *Richelot* S. 281, No. 34).

Ebenso erhält man:

$$\int_1^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = \int_0^{z'_1} \frac{(\alpha+\beta z)\,dz}{\sqrt{R_1(z)}} + \int_\infty^{z'_2} \frac{(\alpha+\beta z)\,dz}{\sqrt{R_1(z)}},$$

wo zwischen y_2, z'_1, z'_2 dieselben Gleichungen wie die zwischen y_1, z_1, z_2 eben aufgestellten bestehen. Addiren wir diese beiden Gleichungen und verwandeln rechts die Summe der vier Integrale nach dem *Abel*schen Theorem in die Summe zweier, so ist durch zwei quadratische Gleichungen die vollständige Transformation hergestellt.

Wir sind somit von den Relationen, die zwischen den transformirten ϑ-Functionen bestehen, ausgehend zu denselben Resultaten gelangt, welche Herr *Richelot* durch unmittelbare Transformation der Integrale hergeleitet hat und erlangen hierdurch eine deutliche Einsicht, weshalb bei den *Abel*schen Integralen erster Ordnung nur von einer Transformation eines solchen Integrals in die Summe zweier derselben Ordnung die Rede sein kann.

Greifswald, den 1. April 1864.

Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

Die Classe von *Abel*schen Functionen, mit welcher eine algebraische ebene Curve n^{ter} Ordnung zusammenhängt, wird durch die Zahl $p = \frac{n-1.n-2}{2}$ bestimmt, wenn die Curve keine Doppel- und Rückkehrpunkte besitzt, und ich habe im 63sten Bande dieses Journal pag. 189 eine Reihe von Resultaten angeführt, welche sich auf diese Bemerkung stützen. Dabei wurde vorzugsweise der Satz benutzt, dass die Summen gewisser *Abel*scher Integrale immer verschwinden, sobald eine Reihe von Puncten der gegebenen Curve den vollständigen Durchschnitt derselben mit einer andern algebraischen Curve bildet.

Wenn nun die Curve Doppelpunkte oder Rückkehrpunkte besitzt, so erniedrigt sich der Werth von p um die Anzahl derselben; die erwähnten Integrale gehen zum Theil in *Abel*sche Integrale niederer Classe über, zum Theil aber auch in Integrale dritter Gattung. Die für die vorliegende Untersuchungen wichtigste Folgerung aus diesem Umstande ist, dass zwischen den Periodicitätsmoduln der modificirten Integrale lineare Relationen eintreten; und es ergeben sich daraus Erniedrigungen für die Zahlen, die ich a. a. O. für die möglichen Lösungen der behandelten Probleme gefunden habe.

Statt die algebraischen Curven nach Ordnungen einzutheilen, und in diesen Unterabtheilungen zu machen nach der Anzahl der Doppel- und Rückkehrpunkte, welche dieselben aufweisen, kann man dieselben in *Geschlechter* eintheilen nach der Zahl p; zu dem ersten Geschlecht also alle diejenigen für welche $p = 0$, zum zweiten diejenigen, für welche $p = 1$, u. s. w. Dann erscheinen umgekehrt die verschiedenen Ordnungen als Unterabtheilungen in den Geschlechtern; und zwar kommt jede Ordnung in allen Geschlechtern vor bis zu $p = \frac{n-1.n-2}{2}$, wo dann die allgemeinste, d. h. von Doppel- und Rückkehrpunkten völlig freie Curve n^{ter} Ordnung ihre Stelle findet.

Die zu demselben Geschlechte gehörigen Curven kann man, wie a. a. O. gezeigt ist, auch dadurch definiren, dass ihre homogenen Coordinaten sich als rationale ganze Functionen von zwei Parametern s, z darstellen lassen, zwischen

denen eine algebraische Gleichung

$$f(s, z) = 0$$

besteht, die eine entsprechende Classe *Abel*scher Functionen begründet. Insbesondere für $p = 0$ kann man s durch z rational ausdrücken; für $p = 1$ erfordert diese Darstellung die Quadratwurzel aus einem Ausdruck dritten oder vierten Grades, u. s. w.

In diesem Aufsatze werde ich mich mit dem ersten Geschlechte beschäftigen, für welches $p = 0$, für welches also die Doppel- und Rückkehrpunkte die ihrer Ordnung nach höchste erreichbare Anzahl besitzen. Diese Curven hat Herr *Salmon* bereits in seinem „Treatise on higher plane curves" kurz discutirt (p. 94). Ich werde einige weitere Eigenschaften derselben angeben.

Dass jede Curve n^{ter} Ordnung, welche $\frac{n-1.n-2}{2}$ Doppelpunkte besitzt, wirklich die rationale Darstellung ihrer Coordinaten durch einen Parameter gestattet, sieht man auf folgende Weise ein. Durch die Doppelpunkte und durch $\frac{h.h+3}{2} - \frac{n-1.n-2}{2}$ andere Punkte der Curve ist, wenn $h < n$, eine Curve h^{ter} Ordnung vollständig bestimmt. Damit diese Punkte zugleich den vollständigen Durchschnitt beider Curven bilden, muss

$$\frac{h.h+3}{2} + \frac{n-1.n-2}{2} = hn$$

sein, d. h. $h = n-1$ oder $h = n-2$.

Legt man also ein System $u + \lambda v = 0$ von Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch die Doppelpunkte und durch $2n-3$ feste Punkte der gegebenen Curve, so schneidet jede Curve des Systems die gegebene noch in *einem* beweglichen Punkte. Man muss also die Coordinaten dieses Punktes durch λ rational ausdrücken können.

Legt man ebenso ein System $u + \lambda v = 0$ von Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung durch die Doppelpunkte und durch $n-3$ feste Punkte der gegebenen Curve, so schneidet abermals jede Curve des Systems die gegebene Curve nur noch in *einem* beweglichen Punkte, und man kann also die Coordinaten dieses Punktes durch λ rational ausdrücken.

So kann man also diese Darstellung auf zwei verschiedene Arten in jedem Falle sofort leisten.

---

§. 1.

Die Singularitäten derjenigen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind.

Betrachten wir eine Curve, deren homogene Coordinaten in der Form ausdrückbar sind:

$$(1.)\quad \begin{cases} x_1 = f_1(\lambda, \mu), \\ x_2 = f_2(\lambda, \mu), \\ x_3 = f_3(\lambda, \mu), \end{cases}$$

wo f_1, f_2, f_3 ganze homogene Functionen n^{ter} Ordnung von λ und μ sind, welche sich nicht als homogene Functionen niedrigerer Ordnung von zwei ganzen rationalen Functionen von λ, μ darstellen lassen. Jedem Punkte der Curve entspricht dann ein gewisser Werth des Verhältnisses $\frac{\lambda}{\mu}$, und im Allgemeinen auch nur ein einziger. Die Functionen f_1, f_2, f_3 dürfen als von einem allen gemeinschaftlichen Factor frei angesehen werden. Die Curve ist daher von der n^{ten} Ordnung, da jede Linie

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 = 0$$

sie in den n Punkten schneidet, deren Parameter sich aus der Gleichung n^{ten} Grades:

$$(2.)\quad u_1f_1+u_2f_2+u_3f_3 = 0$$

ergeben.

Die Gleichung der Curve in Liniencoordinaten findet man, wenn man die Discriminante von (2.) bildet, also wenn man λ und μ aus den beiden Gleichungen

$$(3.)\quad \begin{cases} u_1\dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda}+u_2\dfrac{\partial f_2}{\partial \lambda}+u_3\dfrac{\partial f_3}{\partial \lambda} = 0, \\ u_1\dfrac{\partial f_1}{\partial \mu}+u_2\dfrac{\partial f_2}{\partial \mu}+u_3\dfrac{\partial f_3}{\partial \mu} = 0 \end{cases}$$

eliminirt. Diese Discriminante ist im Allgemeinen von dem Grade $2(n-1)$, und also die Curve im Allgemeinen von der $2(n-1)^{\text{ten}}$ Classe. Aber insbesondere können solche Werthe von λ, μ existiren, für welche

$$(4.)\quad \begin{cases} l\dfrac{\partial f_1}{\partial \lambda} = m\dfrac{\partial f_1}{\partial \mu} = a_1, \\ l\dfrac{\partial f_2}{\partial \lambda} = m\dfrac{\partial f_2}{\partial \mu} = a_2, \\ l\dfrac{\partial f_3}{\partial \lambda} = m\dfrac{\partial f_3}{\partial \mu} = a_3. \end{cases}$$

Die Discriminante muss dann nothwendig den Factor $u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3$ enthalten, durch dessen Verschwinden beide Gleichungen (2.) befriedigt werden. Die a sind nach (1.) die zu einem solchen Parameter $\frac{\lambda}{\mu}$ gehörigen Coordinaten. Ist $\varkappa$ die Anzahl von Lösungen, welche die Gleichungen (4.) zulassen, so ist die Classe der Curve $2(n-1)-\varkappa$.

Aus den Gleichungen (3.) ergeben sich für die Coordinaten der Tangente (oder für die den Gleichungen (1.) analoge Darstellung der Curve in Liniencoordinaten):

$$(5.)\quad \begin{cases} \varrho u_1 = \dfrac{\partial f_2}{\partial\lambda}\dfrac{\partial f_3}{\partial\mu} - \dfrac{\partial f_3}{\partial\lambda}\dfrac{\partial f_2}{\partial\mu}, \\ \varrho u_2 = \dfrac{\partial f_3}{\partial\lambda}\dfrac{\partial f_1}{\partial\mu} - \dfrac{\partial f_1}{\partial\lambda}\dfrac{\partial f_3}{\partial\mu}, \\ \varrho u_3 = \dfrac{\partial f_1}{\partial\lambda}\dfrac{\partial f_2}{\partial\mu} - \dfrac{\partial f_2}{\partial\lambda}\dfrac{\partial f_1}{\partial\mu}, \end{cases}$$

so dass die Gleichung der Tangente folgende ist:

$$(6.)\quad \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial f_2}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial f_3}{\partial\lambda} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial\mu} & \dfrac{\partial f_2}{\partial\mu} & \dfrac{\partial f_3}{\partial\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Dieser Ausdruck wird unbestimmt, wenn λ, μ ein System von Lösungen der Gleichungen (4.) sind. Dividirt man aber in der Gleichung (6.), welche für den Augenblick durch $\Omega = 0$ bezeichnet sein mag, zuerst durch einen der Coefficienten, so nehmen die anderen die Form $\frac{0}{0}$ an, und indem man dann nach der gewöhnlichen Regel entweder nach λ oder nach μ differentiirt, mit dem reducirten Nenner aber wieder heraufmultiplicirt, findet man die Gleichung der Tangente in der Form $\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} = 0$ oder $\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} = 0$, oder endlich, wenn p, q beliebige Grössen sind, in der Form

$$p\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} + q\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} = 0.$$

Die Ausführung für die Function Ω giebt dann:

$$0 = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ p\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda^2} + q\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda\partial\mu} & p\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda^2} + q\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda\partial\mu} & p\dfrac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda^2} + q\dfrac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda\partial\mu} \\ p\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda\partial\mu} + q\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\mu^2} & p\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda\partial\mu} + q\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\mu^2} & p\dfrac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda\partial\mu} + q\dfrac{\partial^2 f_3}{\partial\mu^2} \end{vmatrix}$$

oder, was dasselbe ist:

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \lambda^2} & q^2 \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda \partial \mu} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \lambda \partial \mu} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \lambda \partial \mu} & -pq \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \mu^2} & p^2 \\ X_1 & X_2 & X_3 & 0 \end{vmatrix}$$

Nun kann man die Gleichungen (4.) auch in die Gestalt bringen:

$$(7.)\quad \begin{cases} l\lambda \frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda^2} + (l\mu - m\lambda)\frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda \partial \mu} - m\mu \frac{\partial^2 f_1}{\partial \mu^2} = 0, \\ l\lambda \frac{\partial^2 f_2}{\partial \lambda^2} + (l\mu - m\lambda)\frac{\partial^2 f_2}{\partial \lambda \partial \mu} - m\mu \frac{\partial^2 f_2}{\partial \mu^2} = 0, \\ l\lambda \frac{\partial^2 f_3}{\partial \lambda^2} + (l\mu - m\lambda)\frac{\partial^2 f_3}{\partial \lambda \partial \mu} - m\mu \frac{\partial^2 f_3}{\partial \mu^2} = 0. \end{cases}$$

Aus diesen folgt, dass erstlich die Determinante

$$(8.)\quad \varDelta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial \lambda \partial \mu} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial \mu^2} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \lambda \partial \mu} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial \mu^2} \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \lambda \partial \mu} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial \mu^2} \end{vmatrix}$$

für die betreffenden Werthe $\frac{\lambda}{\mu}$ immer verschwindet; und zweitens, dass sich immer drei Grössen r_1, r_2, r_3 so bestimmen lassen, dass

$$(9.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varDelta}{\partial \frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda^2}} = l\lambda . r_i, \\ \dfrac{\partial \varDelta}{\partial \frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda \partial \mu}} = (l\mu - m\lambda) r_i, \\ \dfrac{\partial \varDelta}{\partial \frac{\partial^2 f_i}{\partial \mu^2}} = -m\mu . r_i. \end{cases}$$

Durch die Einführung dieser Werthe geht endlich, mit Uebergehung eines unwesentlichen Factors $(p\lambda - q\mu)(pl + qm)$ die Gleichung der Tangente für einen solchen Punkt in die bestimmte Form über:

$$(10.)\quad X_1 r_1 + X_2 r_2 + X_3 r_3 = 0.$$

Doppelpunkte der Curve sind diejenigen, für welche zwei Werthsysteme λ, μ; λ', μ' dieselben Werthe der Coordinaten ergeben. Man hat also für sie

$$(11.)\quad \begin{cases} x f_1(\lambda,\mu) = x' f_1(\lambda',\mu'), \\ x f_2(\lambda,\mu) = x' f_2(\lambda',\mu'), \\ x f_3(\lambda,\mu) = x' f_3(\lambda',\mu'). \end{cases}$$

Setzen wir nun

$$(12.)\quad \frac{f_2(\lambda,\mu).f_3(\lambda',\mu')-f_3(\lambda,\mu).f_2(\lambda',\mu')}{\lambda\mu'-\lambda'\mu} = \Phi_1(\lambda,\mu;\lambda',u'),$$

u. s. w.

wo denn Φ_1, Φ_2, Φ_3 symmetrische Functionen der Werthepaare λ, μ; λ', μ' sind, und zwar für jedes Werthepaar homogen von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, so bestehen die identischen Gleichungen:

$$(13.)\quad \begin{cases} \Phi_1.f_1(\lambda,\mu)+\Phi_2.f_2(\lambda,\mu)+\Phi_3.f_3(\lambda,\mu) = 0, \\ \Phi_1.f_1(\lambda',\mu')+\Phi_2.f_2(\lambda',\mu')+\Phi_3.f_3(\lambda',\mu') = 0. \end{cases}$$

Wenn man aus Φ_1, Φ_2 etwa λ', μ' eliminirt, so ergiebt sich für $\frac{\lambda}{\mu}$ eine Gleichung des Grades $2(n-1)^2$. Für die Lösungen derselben und die zugehörigen Werthe von $\frac{\lambda'}{\mu'}$ verschwindet nun entweder auch Φ_3; und dann hat man einen Doppelpunkt vor sich; oder es verschwinden $f_3(\lambda,\mu)$, $f_3(\lambda',\mu')$, und die betreffende Lösung ist der Frage fremd. In der That zieht das Verschwinden der letzten beiden Grössen, wie man aus (12.) sieht, das Verschwinden von Φ_1, Φ_2 nach sich, ausser wenn $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\lambda'}{\mu'}$. Es entstehen also so $n(n-1)$ Lösungen der Gleichungen Φ_1, Φ_2, welche der Frage fremd sind, und es bleiben also $n-1.n-2$ Werthe von $\frac{\lambda}{\mu}$ übrig, welche Doppelpunkten entsprechen, oder es giebt $\frac{n-1.n-2}{2}$ Doppelpunkte auf der Curve, wie dies a priori aus der Grösse der Zahl p klar ist.

Die Elimination von $\frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\lambda'}{\mu'}$ aus $\Phi_1=0$, $\Phi_2=0$ muss nach dem Obigen zunächst auf eine Gleichung der Form

$$\frac{\lambda'}{\mu'} = F\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

führen; sodann aber auf die Endgleichung:

$$(f_3(\lambda,\mu))^{n-1}.\psi(\lambda,\mu) = 0,$$

wo nun $\psi=0$ die gesuchte Gleichung $n-1.n-2^{\text{ten}}$ Grades ist. Aber die Lösung derselben erfordert nur die Lösung einer Gleichung des $\frac{n-1.n-2^{\text{ten}}}{2}$ Grades. Denn ausser durch $\frac{\lambda}{\mu}$ wird diese Gleichung auch noch durch $\frac{\lambda'}{\mu'}=F\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ erfüllt, wo $\frac{\lambda'}{\mu'}$ zu demselben Doppelpunkt gehört, welcher durch $\frac{\lambda}{\mu}$ bezeichnet wird. Es ist daher auch nothwendig

$$\frac{\lambda}{\mu} = F\left(\frac{\lambda'}{\mu'}\right),$$

und die Gleichung $\psi=0$ kann daher nach *Abel* auf eine Gleichung $\frac{n-1.n-2^{\text{ten}}}{2}$ Grades, und auf $\frac{n-1.n-2}{2}$ quadratische Gleichungen zurückgeführt werden.

Ich will jetzt untersuchen, unter welchen Umständen ein Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt übergehen kann. Für diesen Fall muss die Gleichung (6.) der Tangente für beide im Doppelpunkt sich schneidende Zweige dieselbe sein, man muss also die Gleichungen haben:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f_2}{\partial\lambda}\frac{\partial f_3}{\partial\mu}-\frac{\partial f_3}{\partial\lambda}\frac{\partial f_2}{\partial\mu}\right) &= m\left(\frac{\partial f_2}{\partial\lambda'}\frac{\partial f_3}{\partial\mu'}-\frac{\partial f_3}{\partial\lambda'}\frac{\partial f_2}{\partial\mu'}\right),\\
\left(\frac{\partial f_3}{\partial\lambda}\frac{\partial f_1}{\partial\mu}-\frac{\partial f_1}{\partial\lambda}\frac{\partial f_3}{\partial\mu}\right) &= m\left(\frac{\partial f_3}{\partial\lambda'}\frac{\partial f_1}{\partial\mu'}-\frac{\partial f_1}{\partial\lambda'}\frac{\partial f_3}{\partial\mu'}\right),\\
\left(\frac{\partial f_1}{\partial\lambda}\frac{\partial f_2}{\partial\mu}-\frac{\partial f_2}{\partial\lambda}\frac{\partial f_1}{\partial\mu}\right) &= m\left(\frac{\partial f_1}{\partial\lambda'}\frac{\partial f_2}{\partial\mu'}-\frac{\partial f_2}{\partial\lambda'}\frac{\partial f_1}{\partial\mu'}\right),
\end{aligned}$$

wo die Functionen f links mit den Variablen λ, μ, rechts mit den Variablen λ', μ' zu nehmen sind. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$(14.)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial\lambda'} & \frac{\partial f_1}{\partial\lambda} & \frac{\partial f_1}{\partial\mu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial\lambda'} & \frac{\partial f_2}{\partial\lambda} & \frac{\partial f_2}{\partial\mu} \\ \frac{\partial f_3}{\partial\lambda'} & \frac{\partial f_3}{\partial\lambda} & \frac{\partial f_3}{\partial\mu} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial\mu'} & \frac{\partial f_1}{\partial\lambda} & \frac{\partial f_1}{\partial\mu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial\mu'} & \frac{\partial f_2}{\partial\lambda} & \frac{\partial f_2}{\partial\mu} \\ \frac{\partial f_3}{\partial\mu'} & \frac{\partial f_3}{\partial\lambda} & \frac{\partial f_3}{\partial\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Aber diese Gleichungen sagen nicht Anderes aus, als dass $\frac{\lambda}{\mu}$ und $\frac{\lambda'}{\mu'}$ Doppelwurzeln der Gleichung seien, von welcher die Parameter der Doppelpunkte abhängen. Dies sieht man sofort, wenn man die Bedingung aufstellt, dass die Gleichungen (11.) ausser für x, x', λ, μ, λ', μ' auch noch für $x+dx$, x', $\lambda+d\lambda$, μ, $\lambda'+d\lambda'$, μ' und für $x+dx$, x', λ, $\mu+d\mu$, λ', $\mu'+d\mu'$ bestehen sollen. Hiebei sind also zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden. Einmal nämlich

können $\frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\lambda'}{\mu'}$ zwei verschiedene Doppelwurzeln sein, und zweitens können $\frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\lambda'}{\mu'}$ einander gleich werden und so das Paar gleicher Wurzeln repräsentiren. Im ersten Falle tritt kein Rückkehrpunkt ein, sondern zwei unendlich nahe Doppelpunkte, wobei denn freilich auch die beiden Tangenten in eine zusammenfallen. Dieses Vorkommen erfordert *zwei* Bedingungen zwischen den Coefficienten, und führt keine weitere Reduction der *Classe* mit sich, als diesen zwei Doppelpunkten überhaupt zukommt. Im zweiten Falle dagegen erhält man einen wirklichen Rückkehrpunkt, und zugleich eine Reduction der Classe. Ist nämlich $\frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\lambda}{\mu} + \varepsilon$, und convergirt ε gegen Null, so gehen die Gleichungen (14.) in die eine Gleichung (8.)

$$\varDelta = 0$$

über. Es wird also wirklich nur eine Bedingung erfordert. Zugleich gehen die Gleichungen (11.) in die Gleichungen (4.) über. *Die oben betrachteten $\varkappa$ Punkte, für welche eine Reduction der Classe eintritt, fallen also in der That mit den Rückkehrpunkten zusammen.*

Nicht blos $\varDelta$ selbst verschwindet für jeden Rückkehrpunkt, sondern auch sein Differential, so dass der einem Rückkehrpunkte entsprechende Parameter jederzeit eine Doppelwurzel von $\varDelta = 0$ ist. Man hat nämlich:

$$d\varDelta = \frac{\partial \varDelta}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \varDelta}{\partial \mu} d\mu$$

$$= \Sigma_i \left\{ \frac{\partial \varDelta}{\partial \frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda^2}} d\frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial \varDelta}{\partial \frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda \partial \mu}} d\frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda \partial \mu} + \frac{\partial \varDelta}{\partial \frac{\partial^2 f_i}{\partial \mu^2}} d\frac{\partial^2 f_i}{\partial \mu^2} \right\}$$

oder nach (9.):

$$= \Sigma_i r_i \left\{ l\lambda\, d\frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda^2} + (l\mu - m\lambda)\, d\frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda \partial \mu} - m\mu\, d\frac{\partial^2 f_i}{\partial \mu^2} \right\}$$

$$= (n-2) \Sigma_i r_i \left(l\, d\frac{\partial f_i}{\partial \lambda} - m\, d\frac{\partial f_i}{\partial \mu} \right).$$

Und dieser Ausdruck verschwindet, da nach (8.), (9.) folgende Gleichungen bestehen:

$$\Sigma r_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda^2} = 0,$$

$$\Sigma r_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda \partial \mu} = 0,$$

$$\Sigma r_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial \mu^2} = 0.$$

Diese Betrachtungen werden von Wichtigkeit bei der Bestimmung der Wendepunkte. Sind $\frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\lambda'}{\mu'}$, $\frac{\lambda''}{\mu''}$ die Parameter dreier Punkte der Curve, welche auf einer Geraden liegen, so müssen dieselben der Bedingung genügen:

$$(15.)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\begin{vmatrix} f_1(\lambda,\mu) & f_1(\lambda',\mu') & f_1(\lambda'',\mu'') \\ f_2(\lambda,\mu) & f_2(\lambda',\mu') & f_2(\lambda'',\mu'') \\ f_3(\lambda,\mu) & f_3(\lambda',\mu') & f_3(\lambda'',\mu'') \end{vmatrix}}{\lambda'\mu''-\mu'\lambda''.\lambda''\mu-\mu''\lambda.\lambda\mu'-\mu\lambda'} \\ \quad = \Psi(\lambda,\mu;\lambda',\mu';\lambda'',\mu''). \end{cases}$$

Für einen Wendepunkt muss diese Gleichung erfüllt sein, wenn man $\frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\lambda'}{\mu'}$, $\frac{\lambda''}{\mu''}$ unendlich wenig von einander verschieden annimmt, und da zu gleicher Zeit die Gleichung (15.) in

$$-\frac{\varDelta}{2n(n-1)^2} = 0$$

übergeht, so findet man die Wendepunkte aus der Gleichung $\varDelta = 0$. *Die Zahl der Wendepunkte beträgt somit im Allgemeinen* $3(n-2)$. Aber da, wie oben bewiesen, der Parameter jedes Rückkehrpunkts eine Doppelwurzel dieser Gleichung wird, *so ist, wenn x Doppelpunkte zu Rückkehrpunkten werden, die Anzahl der übrigbleibenden Wendepunkte* $3(n-2)-2x$.

Diese Zahl giebt eine obere Grenze für die Anzahl von Rückkehrpunkten, welche eine Curve besitzen kann. Man sieht nämlich daraus, *dass die Anzahl der Rückkehrpunkte einer Curve n^{ter} Ordnung die Zahl* $\frac{3}{2}(n-2)$ *niemals übersteigen kann.* Es scheint, dass diese Grenze (oder vielmehr die grösste darin enthaltene ganze Zahl) wirklich erreicht werden kann; wenigstens tritt dies bei den Curven dritter und vierter Ordnung ein.

Die Berührungspunkte der Tangenten, welche sich von einem äusseren Punkte an die Curve ziehen lassen, findet man aus (6.) mit Hülfe einer Gleichung $2n-2^{ten}$ Grades für $\frac{\lambda}{\mu}$. Ist aber in (5.) X ein Punkt der Curve selbst, und bezeichnen wir seine Parameter durch λ^0, μ^0, ebenso die Functionen f für diese Werthe durch denselben Index, so geht die Gleichung (6.) über in:

$$(16.)\quad \begin{vmatrix} f_1^0 & \frac{\partial f_1}{\partial\lambda} & \frac{\partial f_1}{\partial\mu} \\ f_2^0 & \frac{\partial f_2}{\partial\lambda} & \frac{\partial f_2}{\partial\mu} \\ f_3^0 & \frac{\partial f_3}{\partial\lambda} & \frac{\partial f_3}{\partial\mu} \end{vmatrix} = 0,$$

was durch $(\lambda\mu^0-\lambda^0\mu)^2$ theilbar ist, und mit der Gleichung

$$0 = (\lambda\mu^0-\lambda^0\mu)^2.\Psi(\lambda,\mu;\lambda,\mu;\lambda^0,\mu^0)$$

identisch wird. Nach Entfernung des ausgeschiedenen Factors bleibt eine Gleichung

$$(17.)\qquad \Psi(\lambda,\mu;\lambda,\mu;\lambda^0,\mu^0) = 0$$

vom $2n-4^{\text{ten}}$ Grade übrig; sie giebt die Berührungspunkte der $2n-4$ Tangenten, welche man von einem Punkte der Curve noch ziehen kann. Aber die Gleichung (16.) ist durch die Werthe von λ, μ erfüllt, welche den Gleichungen (4.) genügen. Die Anzahl der wirklichen Tangenten bleibt also $2n-4-\varkappa$.

Ist insbesondere der Punkt der Curve ein Wendepunkt, so ist

$$\Psi(\lambda^0,\mu^0;\lambda^0,\mu^0;\lambda^0,\mu^0) = 0.$$

Daher enthält die Gleichung (17.) noch eine weitere Wurzel $\frac{\lambda^0}{\mu^0}$, und die Anzahl der wirklichen Tangenten bleibt $2n-5-\varkappa$.

Ist dagegen der Punkt der Curve ein Doppelpunkt, und ist $\frac{\lambda^{(1)}}{\mu^{(1)}}$ der andere dem Doppelpunkte entsprechende Werth des Parameters, so kann man in (16.) statt $f^{(0)}$ auch $f^{(1)}$ schreiben, und $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\lambda^{(1)}}{\mu^{(1)}}$ ist daher auch eine Doppelwurzel von (16.). Von einem Doppelpunkt lassen sich also $2n-6-\varkappa$ Tangenten an die Curve ziehen.

Ist endlich der Punkt der Curve ein Rückkehrpunkt, von welchem aus Tangenten gezogen werden sollen, so ist $\frac{\lambda^0}{\mu^0}$ eine vierfache Wurzel der Gleichung (16.). In der That, bildet man etwa den dritten Differentialquotienten des Ausdrucks der linken Seite von (16.) nach λ, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} f_1^0 & \frac{\partial^4 f_1}{\partial\lambda^4} & \frac{\partial f_1}{\partial\mu} \\ f_2^0 & \frac{\partial^4 f_2}{\partial\lambda^4} & \frac{\partial f_2}{\partial\mu} \\ f_3^0 & \frac{\partial^4 f_3}{\partial\lambda^4} & \frac{\partial f_3}{\partial\mu} \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} f_1^0 & \frac{\partial^3 f_1}{\partial\lambda^3} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda\partial\mu} \\ f_2^0 & \frac{\partial^3 f_2}{\partial\lambda^3} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda\partial\mu} \\ f_3^0 & \frac{\partial^3 f_3}{\partial\lambda^3} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda\partial\mu} \end{vmatrix}$$

$$+3\begin{vmatrix} f_1^0 & \frac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^3 f_1}{\partial\lambda^2\partial\mu} \\ f_2^0 & \frac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^3 f_2}{\partial\lambda^2\partial\mu} \\ f_3^0 & \frac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^3 f_3}{\partial\lambda^2\partial\mu} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1^0 & \frac{\partial f_1}{\partial\lambda} & \frac{\partial^4 f_1}{\partial\lambda^3\partial\mu} \\ f_2^0 & \frac{\partial f_2}{\partial\lambda} & \frac{\partial^4 f_2}{\partial\lambda^3\partial\mu} \\ f_3^0 & \frac{\partial f_3}{\partial\lambda} & \frac{\partial^4 f_3}{\partial\lambda^3\partial\mu} \end{vmatrix}.$$

Von diesen Determinanten verschwinden hier die erste und die letzte für $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda^0}{\mu^0}$ wegen der Gleichungen (4.). Die Summe der beiden anderen kann man zugleich in der Form darstellen:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\begin{vmatrix} f_1 & \frac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda\partial\mu} \\ f_2 & \frac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda\partial\mu} \\ f_3 & \frac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda\partial\mu} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial\lambda} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial\lambda\partial\mu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial\lambda} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial\lambda\partial\mu} \\ \frac{\partial f_3}{\partial\lambda} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial\lambda\partial\mu} \end{vmatrix}\right\}_{\lambda=\lambda^0,\,\mu=\mu^0}$$

$$= \left(\frac{1}{n.n-1}\frac{\partial.\lambda^2\Delta}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=\lambda^0,\,\mu=\mu^0},$$

was nach dem Früheren für einen Rückkehrpunkt ebenfalls verschwindet. Das Verschwinden des ersten und zweiten Differentialquotienten der linken Seite von (16.) wird noch leichter ähnlich gezeigt; es ist also wirklich $\frac{\lambda^0}{\mu^0}$ hier eine vierfache Wurzel. Aber unter diesen ist schon eine der $\varkappa$ Wurzeln enthalten, die wegen der $\varkappa$ Rückkehrpunkte in Abzug zu bringen sind. Man sieht also, dass sich von einem Rückkehrpunkte noch $2n-5-\varkappa$ Tangenten an die Curve ziehen lassen.

Es bleiben endlich die Doppeltangenten zu untersuchen. Sind die Parameter ihrer Berührungspunkte $\frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\lambda^0}{\mu^0}$, so finden nach (16.), (17.) die beiden Gleichungen statt:

$$(18.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{(\lambda\mu^0-\lambda^0\mu)^2}\cdot\begin{vmatrix} f_1^0 & \frac{\partial f_1}{\partial\lambda} & \frac{\partial f_1}{\partial\mu} \\ f_2^0 & \frac{\partial f_2}{\partial\lambda} & \frac{\partial f_2}{\partial\mu} \\ f_3^0 & \frac{\partial f_3}{\partial\lambda} & \frac{\partial f_3}{\partial\mu} \end{vmatrix} = -n\Psi(\lambda,\mu;\lambda,\mu;\lambda^0,\mu^0), \\[2em] \dfrac{1}{(\lambda\mu^0-\lambda^0\mu)^2}\cdot\begin{vmatrix} f_1 & \frac{\partial f_1^0}{\partial\lambda^0} & \frac{\partial f_1^0}{\partial\mu^0} \\ f_2 & \frac{\partial f_2^0}{\partial\lambda^0} & \frac{\partial f_2^0}{\partial\mu^0} \\ f_3 & \frac{\partial f_3^0}{\partial\lambda^0} & \frac{\partial f_3^0}{\partial\mu^0} \end{vmatrix} = -n\Psi(\lambda^0,\mu^0;\lambda^0,\mu^0;\lambda,\mu). \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen ist die erste vom $(n-2)^{\text{ten}}$, die zweite vom $2(n-2)^{\text{ten}}$ Grade für $\frac{\lambda^0}{\mu^0}$, und die erste vom $2(n-2)^{\text{ten}}$, die zweite vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade für $\frac{\lambda}{\mu}$. Eliminirt man also eine dieser Grössen etwa $\frac{\lambda^0}{\mu^0}$, so erhält man eine Gleichung in $\frac{\lambda}{\mu}$ vom Grade $5(n-2)^2$. Aber diese Gleichung enthält eine Reihe von Factoren, welche der Frage fremd sind.

Erstlich ist das Eliminationsresultat, nach einer schon von *Abel* in Bezug auf solche Gleichungen gemachten Bemerkung, durch $\Psi(\lambda, \mu; \lambda, \mu; \lambda, \mu)$, d. h. durch Δ theilbar, so dass der Rest vom Grade $5(n-2)^2-3(n-2)$ bleibt. Ferner ist sie theilbar durch die Gleichung $\psi(\lambda, \mu)=0$, von welcher die Doppelpunkte abhängen, weil mit den Gleichungen (11.) auch die Gleichungen (18.) erfüllt sind. Der übrigbleibende Factor ist dann vom Grade $5(n-2)^2-3(n-2)-(n-1)(n-2)=4(n-2)(n-3)$.

Diese Zahl erhält aber eine weitere Reduction, wenn Rückkehrpunkte vorhanden sind. Die Gleichungen (18.) werden nämlich offenbar noch erfüllt, wenn $\frac{\lambda^0}{\mu^0}$ und $\frac{\lambda}{\mu}$ zwei verschiedenen Rückkehrpunkten entsprechen, und wenn eine dieser Grössen einem Rückkehrpunkte entspricht, die andere dem Berührungspunkte einer von einem Rückkehrpunkte aus gezogenen Tangente. Zu einem Werthe $\frac{\lambda}{\mu}$, welcher einem Rückkehrpunkte entspricht, gehören also noch $x-1+2n-5-x$ Werthe $\frac{\lambda^0}{\mu^0}$, welche der übrig gebliebenen Gleichung genügen; jeder solche Werth $\frac{\lambda}{\mu}$ ist also eine $(2n-6)$fache Wurzel der Gleichung. Und jeder Werth $\frac{\lambda}{\mu}$, der einer von einem Rückkehrpunkte gezogenen Tangente entspricht, genügt jener Gleichung ebenfalls. Sie enthält also noch zwei fremde Factoren, beziehungsweise von den Graden $x(2n-6)$ und $(2n-5-x)x$, so dass nach Ausscheidung derselben eine Gleichung vom Grade

$$4(n-3)(n-2-x)+x(x-1)$$

zurückbleibt. *Die Anzahl aller Doppeltangenten ist also*

$$2(n-3)(n-2-x)+\frac{x.x-1}{2};$$

und da je zwei zusammengehörige Wurzeln der soeben aufgestellten Gleichung aus (18.) rational durch einander ausgedrückt werden können, so findet man diese Doppeltangenten durch eine Gleichung des Grades $2(n-3)(n-2-x)+\frac{x.x-1}{2}$, und die Berührungspunkte jeder einzelnen durch eine quadratische Gleichung.

Die angegebenen Zahlen stimmen mit denjenigen überein, welche aus den *Plücker*schen Gleichungen folgen. Aber es ist von Interesse auf dem vorliegenden Wege gesehen zu haben, wie man die zur Auffindung dieser Singularitäten nöthigen Gleichungen wirklich zu bilden, und durch Gleichungen von möglichst niedrigem Grade aufzulösen hat.

Dass die Curve (1.) wirklich die allgemeinste ist, welche $\frac{n-1.n-2}{2}$ Doppelpunkte besitzt, kann man sich auch folgendermassen deutlich machen. Die Ausdrücke (1.) enthalten $3n+3$ willkürliche Constanten. Durch eine lineare Transformation von der Form

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{p\lambda'+q\mu'}{r\lambda'+s\mu'}$$

kann man diese auf $3n-1$ reduciren. Aber es ist

$$3n-1 = \frac{n.n+3}{2} - \frac{n-1.n-2}{2},$$

d. h. gleich der Anzahl Bestimmungsstücke, welche eine allgemeine Curve n^{ter} Ordnung fordert, weniger der Anzahl von Bedingungen, welcher die geforderte Anzahl von Doppelpunkten mit sich führt. Die Anzahl von willkürlichen Constanten ist also ebenso gross, wie die Zahl der Bedingungen, welche die allgemeinste Curve der gegebenen Art noch zu erfüllen im Stande ist.

§. 2.

Das *Abel*sche Theorem und das Problem der *Abel*schen Functionen für den Fall, in welchem die *Abel*schen Integrale durch Logarithmen und algebraische Functionen ausdrückbar sind.

Im Folgenden setze ich $\mu=1$, da die Differentiation nach dieser Grösse die Beibehaltung des Zeichens nicht mehr erheischt. Sodann bezeichne ich durch $a^{(1)}, b^{(1)}; a^{(2)}, b^{(2)}; \ldots a^{(\nu)}, b^{(\nu)}$ $\left(\nu=\frac{n-1.n-2}{2}\right)$ die den verschiedenen Doppelpunkten entsprechenden Werthepaare von λ. Die Durchschnitte der gegebenen Curve mit einer Curve m^{ter} Ordnung

$$(19.) \qquad \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

werden gefunden, indem man in dieser Gleichung für die x ihre Werthe (1.) setzt. Man erhält dann eine Gleichung in λ:

$$(20.) \qquad \Omega(\lambda) \equiv c(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_{nm}) \equiv \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{nm}$ den nm Durchschnittspunkten entsprechen. Setzen wir in

(20.) λ einmal $a^{(i)}$, das andere Mal $b^{(i)}$, so bleiben die x bis auf einen gemeinschaftlichen Factor $c^{(i)}$, also auch φ und Ω bis auf den Factor $c^{(i)^m}$ dadurch ungeändert, und man erhält $\Omega(a^{(i)}) = c^{(i)^m}\Omega(b^{(i)})$, oder

$$(21.)\qquad \frac{a^{(i)}-\lambda_1 . a^{(i)}-\lambda_2 \dots a^{(i)}-\lambda_{nm}}{b^{(i)}-\lambda_1 . b^{(i)}-\lambda_2 \dots b^{(i)}-\lambda_{nm}} = c^{(i)^m}.$$

Diese Gleichung, welche ν verschiedene vertritt, ist für die Theorie der vorliegenden Curven von der höchsten Wichtigkeit. Sie vertritt für diese Curven die Stelle derjenigen, welche ich im allgemeinen Falle aus dem *Abel*schen Theoreme abgeleitet habe (dieses Journal Band 63, pag. 189). Die ν Gleichungen (21.) versehen die Stelle der ν Relationen, welche erfüllt sein müssen damit die nm Schnittpunkte wirklich auf einer Curve m^{ter} Ordnung liegen; und man hat daher den Satz:

Wenn nm Punkte der Curve (1.) *auf einer Curve m^{ter} Ordnung liegen sollen, so ist es nöthig und hinreichend, dass ihre Parameter den Gleichungen* (21.) *genügen.*

Die Gleichung (21.) erhält eine leichte Modification, wenn einer der Doppelpunkte in einen Rückkehrpunkt übergeht. Man hat dann $a^{(i)} = \alpha^{(i)}$, $b^{(i)} = \alpha^{(i)} + \varepsilon$, $c^{(i)} = 1 - \varkappa^{(i)}\varepsilon$, wo ε unendlich klein ist, und also

$$\frac{a^{(i)}-\lambda}{b^{(i)}-\lambda} = 1 - \frac{\varepsilon}{\alpha^{(i)}-\lambda} \dots .$$

Die Gleichung (21.) geht daher über in folgende:

$$(22.)\qquad \frac{1}{\alpha^{(i)}-\lambda_1} + \frac{1}{\alpha^{(i)}-\lambda_2} + \dots + \frac{1}{\alpha^{(i)}-\lambda_{nm}} = m\varkappa^{(i)}.$$

Die Integralsummen, welche, gleich Null gesetzt, die Stelle dieser Gleichungen vertreten (a. a. O. p. 197) findet man, indem man (21.) (22.), ersteres logarithmisch, differentiirt, und dann von $\varrho^{(i)}$ bis λ, beziehungsweise $\sigma^{(i)}$ bis λ, integrirt. Man findet so statt (21.) (22.) die folgenden Gleichungen:

$$(23.)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\varrho^{(i)}}^{\lambda_1} \frac{(a^{(i)}-b^{(i)})\,d\lambda}{a^{(i)}-\lambda . b^{(i)}-\lambda} + \int_{\varrho^{(i)}}^{\lambda_2} \frac{(a^{(i)}-b^{(i)})\,d\lambda}{a^{(i)}-\lambda . b^{(i)}-\lambda} + \dots + \int_{\varrho^{(i)}}^{\lambda_{nm}} \frac{(a^{(i)}-b^{(i)})\,d\lambda}{a^{(i)}-\lambda . b^{(i)}-\lambda} = 0, \\ \displaystyle\int_{\sigma^{(i)}}^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{(\alpha^{(i)}-\lambda)^2} + \int_{\sigma^{(i)}}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{(\alpha^{(i)}-\lambda)^2} + \dots + \int_{\sigma^{(i)}}^{\lambda_{nm}} \frac{d\lambda}{(\alpha^{(i)}-\lambda)^2} = 0, \end{cases}$$

und die unteren Grenzen ϱ, σ bestimmen sich aus der Vergleichung mit (21.), (22.) durch die Gleichungen:

$$(24.)\qquad \frac{a^{(i)}-\varrho^{(i)}}{b^{(i)}-\varrho^{(i)}} = (c^{(i)})^{\frac{1}{n}}, \qquad \frac{1}{\alpha^{(i)}-\sigma^{(i)}} = \frac{\varkappa^{(i)}}{n}.$$

Durch Veränderung des Integrationsweges kann man auf der rechten Seite der ersten dieser Gleichungen 0 in $2mi\pi$ verwandeln, so dass diese Integralsummen die Periode $2i\pi$ zulassen. Die Integrale der zweiten Gleichung aber haben immer die Periode Null, da sie nur paarweise zusammenfallende Unstetigkeitspunkte besitzen. Dies kommt damit überein, dass man rechts in (22.) $(c^{(i)})^m . e^{2hi\pi}$ für $(c^{(i)})^m$ setzen kann, während $mx^{(i)}$ auf der rechten Seite von (23.) sich durch nichts Anderes ersetzen lässt. Man kann also folgenden Satz aussprechen:

Für eine Curve n^{ter} Ordnung mit $\frac{n-1.n-2}{2}$ Doppelpunkten, respective Rückkehrpunkten, ist, wenn in der Darstellung (1.) $a^{(i)}$, $b^{(i)}$ *die Parameter eines Doppelpunktes sind, immer die Summe gleichartiger Integrale*

$$\int_e^\lambda \frac{d\lambda(a^{(i)}-b^{(i)})}{a^{(i)}-\lambda . b^{(i)}-\lambda}$$

gleich $2hi\pi$, *hingegen, wenn* $a^{(i)}$ *der Parameter eines Rückkehrpunktes ist, die Summe der Integrale*

$$\int_a^\lambda \frac{d\lambda}{(a^{(i)}-\lambda)^2}$$

gleich Null; wenn die Summen auf alle Parameter erstreckt werden, die den Schnittpunkten der Curve mit einer algebraischen Curve entsprechen.

Hieraus geht sofort hervor, dass alle Aufgaben, welche ich a. a. O. mit Hülfe der Theilung der *Abel*schen Transcendenten gelöst habe, für die vorliegenden Curven auf *Kreistheilung* zurückkommen, und auf die Auflösung einer Gleichung ν^{ten} Grades.

In der That lässt sich dasselbe aus den Gleichungen (22.), (23.) direct nachweisen. In allen jenen Aufgaben sind nämlich $nm-\mu\nu$ Schnittpunkte gegeben, während von den übrigen ν mal μ zusammenfallen sollen. Bezeichnen wir die den ersten entsprechenden (gegebenen) Parameter durch $l_1, l_2, \ldots l_{nm-\mu\nu}$, die der gesuchten Punkte durch $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_\nu$, so gehen die Gleichungen (22.) über in:

$$(24.)\begin{cases} \dfrac{a^{(i)}-\lambda_1 . a^{(i)}-\lambda_2 \ldots a^{(i)}-\lambda_\nu}{b^{(i)}-\lambda_1 . b^{(i)}-\lambda_2 \ldots b^{(i)}-\lambda_\nu} = e^{\frac{2h^{(i)}i\pi}{\mu}} \sqrt[\mu]{c^{(i)m} . \dfrac{b^{(i)}-l_1 . b^{(i)}-l_2 \ldots b^{(i)}-l_{nm-\mu\nu}}{a^{(i)}-l_1 . a^{(i)}-l_2 \ldots a^{(i)}-l_{nm-\mu\nu}}}, \\ \dfrac{1}{a^{(i)}-\lambda_1}+\dfrac{1}{a^{(i)}-\lambda_2}+\cdots+\dfrac{1}{a^{(i)}-\lambda_\nu} = \dfrac{1}{\mu}\left\{mx^{(i)}-\dfrac{1}{a^{(i)}-l_1}-\dfrac{1}{a^{(i)}-l_2}-\cdots-\dfrac{1}{a^{(i)}-l_{nm-\mu\nu}}\right\}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen, deren man im Ganzen ν hat, genügen völlig, um die symmetrischen Functionen der λ durch bekannte Grössen auszudrücken, und eine Gleichung ν^{ten} Grades für dieselben anzusetzen.

Man bemerkt, dass der Einfluss eines Rückkehrspunktes darin besteht, eine der ν Perioden verschwinden zu machen. Wenn, wie dies bei den Curven vierter Ordnung noch geschehen kann, sämmtliche Doppelpunkte in Rückkehrpunkte übergehen, so hört die Benutzung der Kreistheilung überhaupt auf.

Dass hierher gehörige Umkehrungsproblem ist in den Gleichungen enthalten:

$$(25.)\quad \sum_{h=1}^{h=\frac{n-1.n-2}{2}} \int_{\varrho}^{\lambda_h} \frac{(a^{(i)}-b^{(i)})\,d\lambda}{a^{(i)}-\lambda . b^{(i)}-\lambda} = u^{(i)} \quad \left(i=1,2\dots\frac{n-1.n-2}{2}\right),$$

deren einige auch ersetzt sein können durch Gleichungen von der Form

$$(26.)\quad \sum_{h=1}^{h=\frac{n-1.n-2}{2}} \int_{\varrho}^{\lambda_h} \frac{d\lambda}{(\alpha^{(i)}-\lambda)^2} = v^{(i)},$$

welche aus jener hervorgeht, wenn $a^{(i)}=\alpha^{(i)}$, $b^{(i)}=\alpha^{(i)}+\varepsilon$, $v^{(i)}=-\frac{u_{(i)}}{\varepsilon}$ gesetzt wird. Die Auflösung des Umkehrungsproblems ist sodann durch die Gleichungen gegegeben $\left(\nu=\frac{n-1.n-2}{2}\right)$:

$$(27.)\quad \frac{a^{(i)}-\lambda_1 . a^{(i)}-\lambda_2 \dots a^{(i)}-\lambda_\nu}{b^{(i)}-\lambda_1 . b^{(i)}-\lambda_2 \dots b^{(i)}-\lambda_\nu} = e^{u^{(i)}}\left(\frac{a^{(i)}-\varrho}{b^{(i)}-\varrho}\right)^{\nu} = e^{u^{(i)}}(c^{(i)})^{\frac{\nu}{n}}; -$$

nur wenn der Doppelpunkt a, b in einen Rückkehrpunkt α übergeht, ist diese Gleichung zu ersetzen durch

$$(27^a.)\quad \frac{1}{\alpha^{(i)}-\lambda_1}+\frac{1}{\alpha^{(i)}-\lambda_2}+\dots+\frac{1}{\alpha^{(i)}-\lambda_\nu} = v^{(i)}+\frac{\nu}{\alpha^{(i)}-\sigma^{(i)}} = v^{(i)}+\frac{\nu x^{(i)}}{n}.$$

Die Grössen c, also auch die ϱ, drückt man leicht durch die a, b aus. Man braucht nämlich nur zu bemerken, dass, wenn man einen Doppelpunkt absondert, die übrigen den vollständigen Durchschnitt der Curve n^{ter} Ordnung mit der Curve $n-3^{\text{ter}}$ Ordnung bilden, welche sich durch jene $\frac{n.n-3}{2}$ Doppelpunkte legen lässt. Setzt man also in (21.) $m=n-3$, so kann man zugleich den $n.n-3$ Grössen λ die $n.n-3$ Werthe a, b beilegen, welche den Index i nicht haben; es besteht also, wenn man der Kürze wegen

$$(28.)\quad \begin{cases} z-a^{(1)}.z-a^{(2)}\dots z-a^{(\nu)} = \varphi(z), \\ z-b^{(1)}.z-b^{(2)}\dots z-b^{(\nu)} = \psi(z) \end{cases}$$

setzt, die Gleichung:

$$(29.)\quad (c^{(i)})^{n-3} = -\frac{\varphi'(a^{(i)}).\psi(a^{(i)})}{\psi'(b^{(i)}).\varphi(b^{(i)})}$$

Untersuchen wir nun, unter welchen Umständen ein System von Grössen $u^{(i)}$ Summen von nur $\nu-1$ Integralen (25.) gleich werden kann. In diesem Falle ist an Stelle von (27.) die Gleichung zu setzen:

$$(30.)\quad \begin{cases} \dfrac{a^{(i)}-\lambda_1 . a^{(i)}-\lambda_2 \dots a^{(i)}-\lambda_{\nu-1}}{b^{(i)}-\lambda_1 . b^{(i)}-\lambda_2 \dots b^{(i)}-\lambda_{\nu-1}} = e^{u^{(i)}} . (c^{(i)})^{\frac{\nu-1}{n}} = e^{u^{(i)}} . (c^{(i)})^{\frac{n-3}{2}} \\ \qquad = e^{u^{(i)}} . \sqrt{\dfrac{\varphi'(a^{(i)}) . \psi(a^{(i)})}{\psi'(b^{(i)}) . \varphi(b^{(i)})}} = \zeta^{(i)}. \end{cases}$$

Dieses sind ν Gleichungen, aus denen man die $\nu-1$ symmetrischen Functionen der λ eliminiren kann, und zwar wird das Resultat der Elimination die Gleichung:

$$(31.)\quad \begin{vmatrix} a^{(1)^{\nu-1}}-\zeta^{(1)} b^{(1)^{\nu-1}} & a^{(1)^{\nu-2}}-\zeta^{(1)} b^{(1)^{\nu-2}} & \dots & 1-\zeta^{(1)} \\ a^{(2)^{\nu-1}}-\zeta^{(2)} b^{(2)^{\nu-1}} & a^{(2)^{\nu-2}}-\zeta^{(2)} b^{(2)^{\nu-2}} & \dots & 1-\zeta^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{(\nu)^{\nu-1}}-\zeta^{(\nu)} b^{(\nu)^{\nu-2}} & a^{(\nu)^{\nu-2}}-\zeta^{(\nu)} b^{(\nu)^{\nu-2}} & \dots & 1-\zeta^{(\nu)} \end{vmatrix} = 0.$$

Ordnet man diese Gleichung nach den ζ, und ersetzt dieselben durch die in (30.) gegebenen Werthe, so ergiebt sich eine Gleichung in den e^u, welche jede dieser Grössen nur auf lineare Weise enthält. Bezeichnet man nun die Grössen e^u in irgend welcher Folge durch die Indices $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_i, \beta_{i+1}, \beta_{i+2}, \dots \beta_\nu$, so ist leicht zu zeigen, dass die in der Entwicklung von (31.) auftretenden Glieder

$$e^{u^{(\alpha_1)}+u^{(\alpha_2)}+\dots+u^{(\alpha_i)}}, \quad e^{u^{(\beta_{i+1})}+u^{(\beta_{i+2})}+\dots+u^{(\beta_\nu)}}$$

gleiche aber entgegengesetzte Coefficienten besitzen, und dass man also der Gleichung (31.) die Form geben kann

$$(32.)\quad 0 = \Sigma C_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_i}\left(e^{u^{(\alpha_1)}+u^{(\alpha_2)}+\dots+u^{(\alpha_i)}} - e^{S-u^{(\alpha_1)}-u^{(\alpha_2)}-\dots-u^{(\alpha_i)}}\right),$$

wo S die Summe aller u bezeichnet.

In der That: der Coefficient von $e^{u^{(\alpha_1)}+u^{(\alpha_2)}+\dots+u^{(\alpha_i)}}$ in (31.) ist $(-1)^i$ multiplicirt erstlich in den Ausdruck, welcher entsteht, wenn man in der Determinante

$$(33.)\quad \begin{vmatrix} a^{(1)^{\nu-1}} & a^{(1)^{\nu-2}} & \dots & 1 \\ a^{(2)^{\nu-1}} & a^{(2)^{\nu-2}} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{(\nu)^{\nu-1}} & a^{(\nu)^{\nu-2}} & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a^{(1)}-a^{(2)} . a^{(1)}-a^{(3)} \dots a^{(1)}-a^{(\nu)} \\ \quad . a^{(2)}-a^{(3)} \dots a^{(2)}-a^{(\nu)} \\ \quad \dots \\ \quad\quad . a^{(\nu-1)}-a^{(\nu)} \end{array}$$

die mit einem Index α behafteten a durch die betreffenden b ersetzt; multiplicirt zweitens in das Product:

$$(34.)\quad \{c^{(\alpha_1)}.c^{(\alpha_2)}\dots c^{(\alpha_i)}\}^{\frac{n-3}{2}} = \sqrt{(-1)^i.\frac{\varphi'(a^{(\alpha_1)}).\varphi'(a^{(\alpha_2)})\dots\psi(a^{(\alpha_1)}).\psi(a^{(\alpha_2)})\dots}{\psi'(b^{(\alpha_1)}).\psi'(b^{(\alpha_2)})\dots\varphi(b^{(\alpha_1)}).\psi(b^{(\alpha_2)})\dots}}.$$

Der Coefficient von

$$e^{S-u^{(\alpha_1)}-u^{(\alpha_2)}\dots} = e^{u^{(\beta_{i+1})}+u^{(\beta_{i+2})}+\dots+u^{(\beta_\nu)}}$$

unterscheidet sich von diesem dadurch, dass $(-1)^{\nu-i}$ an Stelle von $(-1)^i$ tritt, dass in der Determinante die a mit einem Jndex β durch die entsprechenden b ersetzt werden, und endlich, dass in dem Product der c überall die Indices β statt der Indices α auftreten. Statt dieses Productes aber denke ich mir das Product sämmtlicher $c^{\frac{n-3}{2}}$ gesetzt, dividirt durch den Ausdruck (33.).

Der Quotient der so gebildeten Coefficienten muss gleich 1 sein. Bezeichnen wir durch Π Differenzenproducte, so nimmt nach dem Vorigen dieser Quotient folgenden Werth an:

$$\frac{\Pi(b^{(\alpha_i)}-b^{(\alpha_k)}).\Pi(b^{(\alpha_i)}-a^{(\beta_k)}).\Pi(a^{(\beta_i)}-a^{(\beta_k)})}{\Pi(a^{(\alpha_i)}-a^{(\alpha_k)}).\Pi(a^{(\alpha_i)}-b^{(\beta_k)}).\Pi(b^{(\beta_i)}-b^{(\beta_k)})}.\frac{1}{(c^{(1)}.c^{(2)}\dots c^{(\nu)})^{\frac{n-3}{2}}}$$
$$.\frac{\Pi(a^{(\alpha_i)}-a^{(\alpha_k)})^2.\Pi(a^{(\beta_i)}-a^{(\alpha_k)}).\Pi(b^{(\alpha_i)}-a^{(\alpha_k)}).\Pi(b^{(\beta_i)}-a^{(\alpha_k)})}{\Pi(b^{(\alpha_i)}-b^{(\alpha_k)})^2.\Pi(b^{(\beta_i)}-b^{(\alpha_k)}).\Pi(a^{(\alpha_i)}-b^{(\alpha_k)}).\Pi(a^{(\beta_i)}-b^{(\alpha_k)})}.$$

Aber dies geht sofort, wenn A das Differenzenproduct sämmtlicher a, B das sämmtlicher b ist, über in

$$\frac{A}{B}.\frac{1}{(c^{(1)}.c^{(2)}\dots c^{(\nu)})^{\frac{n-3}{2}}}.$$

Dies ist wirklich 1, da, wie leicht zu sehen, das Product sämmlicher c^{n-3} gleich $\frac{A^2}{B^2}$ ist, und also das Product aller $c^{\frac{n-3}{2}}$ gleich $\frac{A}{B}$, wenn nur, was immer geschehen kann, eine passende Combination der Vorzeichen der Quadratwurzeln vorausgesetzt wird.

Wir haben so den Satz:

Soll ein System von ν Grössen $u^{(i)}$ den Summen von je $(\nu-1)$ Integralen gleich werden, so ist es nöthig und hinreichend, dass zwischen den u die Gleichung (31.) *oder* (32.) *bestehe.*

Sind insbesondere sämmtliche Grössen u ganze Vielfache von $i\pi$, also alle Grössen e^u gleich ± 1, so reducirt sich die Gleichung (32.) auf

$$(35.)\quad e^S = 1,$$

d. h. *die Summe sämmtlicher u muss dann einem geraden Vielfachen von $i\pi$ gleich sein.*

Es bleiben die Modificationen zu untersuchen, welche diese Betrachtungen erfahren, wenn einige Doppelpunkte in Rückkehrpunkte übergehen. Was zunächst die Bestimmung der den wirklichen Doppelpunkten entsprechenden c betrifft, so hebt sich in der Formel (29.) alles von den Rückkehrpunkten Herrührende (wo $a = b = \alpha$) einfach auf, und es genügt also dann, die Functionen φ, ψ auf diejenigen Factoren zu beschränken, die den wirklichen Rückkehrpunkten entsprechen. Die x bestimmt man aus (22.), wie oben die c aus (21.), und findet also, wenn noch

$$(36.)\qquad \chi(z) = z-\alpha^{(1)}.z-\alpha^{(2)}\dots$$

gesetzt wird:

$$(37.)\qquad x^{(i)} = \frac{1}{n-3}\left\{\frac{\chi''(\alpha^{(i)})}{2\chi'(\alpha^{(i)})}+\frac{\varphi'(\alpha^{(i)})}{\varphi(\alpha^{(i)})}+\frac{\psi'(\alpha^{(i)})}{\psi(\alpha^{(i)})}\right\}.$$

Ferner tritt, wenn man die Substitutionen $u^{(i)} = -\varepsilon v^{(i)}$, $c^{(i)} = 1-\varepsilon x^{(i)}$, $a^{(i)} = \alpha^{(i)}$, $b^{(i)} = \alpha^{(i)}+\varepsilon$ macht, und ε gegen Null convergiren lässt, an Stelle der betreffenden Reihe

$$a^{\nu-1}-\zeta b^{\nu-1},\quad a^{\nu-2}-\zeta b^{\nu-2},\quad \dots\quad a-\zeta b,\quad 1-\zeta$$

in (31.) immer eine Reihe von der Form:

$$\alpha^{\nu-2}-\vartheta\alpha^{\nu-1},\quad 2\alpha^{\nu-3}-\vartheta\alpha^{\nu-2},\quad \dots\quad (\nu-1)-\vartheta\alpha,\quad -\vartheta,$$

wo

$$(38.)\qquad \vartheta^{(i)} = v^{(i)}+\frac{n-3}{2}x^{(i)}.$$

Sind insbesondere die v sämmtlich gleich Null, und die u ganze Vielfache von $i\pi$, so zeigt sich aus (35.), *dass alsdann die Summe aller den Doppelpunkten entsprechenden u ein gerades Vielfaches von $i\pi$ sein muss.*

§. 3.

Geometrische Resultate.

Nach diesen allgemeinen Vorbereitungen ist es leicht, die Modificationen anzugeben, welche die Lösungen der a. a. O. behandelten Probleme in dem vorliegenden Falle erfahren.

Die Lösung dieser Probleme stützt sich immer auf die Gleichungen (21.), (22.):

$$(39.)\qquad \begin{cases} \dfrac{a^{(i)}-\lambda_1.a^{(i)}-\lambda_2\dots a^{(i)}-\lambda_{nm}}{b^{(i)}-\lambda_1.b^{(i)}-\lambda_2\dots b^{(i)}-\lambda_{nm}} = c^{(i)m}, \\ \dfrac{1}{a^{(i)}-\lambda_1}+\dfrac{1}{a^{(i)}-\lambda_2}+\dots+\dfrac{1}{a^{(i)}-\lambda_{nm}} = mx^{(i)}. \end{cases}$$

Die erste besteht für $\frac{n-1.n-2}{2}-\varkappa$ Werthe von λ, die zweite, den Rückkehrpunkten entsprechend, für $\varkappa$ Werthe.

I. Für $m \overline{\overline{>}} n-2$ ist folgende Aufgabe immer lösbar:

Es seien $mn-\nu r$ $\left(\nu=\frac{n-1.n-2}{2}\right)$ Punkte auf der Curve n^{ter} Ordnung gegeben; man soll durch sie eine Curve m^{ter} Ordnung legen, welche die Curve n^{ter} Ordnung in ν Punkten r-punktig berührt.

Hier sind $mn-\nu r$ Grössen λ gegeben; von den übrigen νr sollen je r zusammenfallen. Aus (39.) sind also, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu$ die den Berührungspunkten entsprechenden Parameter sind, die Ausdrücke

$$\left(\frac{a^{(i)}-\lambda_1 . a^{(i)}-\lambda_2 \ldots a^{(i)}-\lambda_\nu}{b^{(i)}-\lambda_1 . b^{(i)}-\lambda_2 \ldots b^{(i)}-\lambda_\nu}\right)^r, \quad r\left(\frac{1}{\alpha^{(i)}-\lambda_1}+\frac{1}{\alpha^{(i)}-\lambda_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha^{(i)}-\lambda_\nu}\right)$$

gegeben, und man findet die λ aus einer Gleichung ν^{ten} Grades. Da man den ersten der obigen Ausdrücke durch Ausziehen einer r^{ten} Wurzel bestimmt, und da dieselbe Operation $\nu-\varkappa$ mal vorkommt, *so ist die Gesammtzahl aller Lösungen des Problems gleich $r^{\nu-\varkappa}$.*

Bezeichnen wir die gegebenen Parameter durch $l_1, l_2, \ldots l_{mn-\nu r}$. Die Gleichungen, aus denen die λ gefunden werden, sind dann:

$$\frac{a^{(i)}-\lambda_1 . a^{(i)}-\lambda_2 \ldots a^{(i)}-\lambda_\nu}{b^{(i)}-\lambda_1 . b^{(i)}-\lambda_2 \ldots b^{(i)}-\lambda_\nu} \sqrt[r]{\frac{a^{(i)}-l_1 . a^{(i)}-l_2 \ldots}{b^{(i)}-l_1 . b^{(i)}-l_2 \ldots}} = e^{\frac{2h^{(i)}i\pi}{r}} c^{(i)\frac{m}{r}},$$

$$\frac{1}{\alpha^{(i)}-\lambda_1}+\frac{1}{\alpha^{(i)}-\lambda_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha^{(i)}-\lambda_\nu}+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\alpha^{(i)}-l_1}+\frac{1}{\alpha^{(i)}-l_2}\cdots\right)=\frac{m}{r}\varkappa^{(i)}.$$

Denken wir uns diese Gleichungen für r verschiedene Systeme von Lösungen hingeschrieben, und sodann die aus der ersten Gleichung hervorgehenden mit einander multiplicirt, die aus der zweiten hervorgehenden addirt. Ist dann nur die Summe der den verschiedenen Systemen entsprechenden h durch r theilbar (was immer durch passende Wahl der h des letzten Systems erreicht wird), so sagen die resultirenden Gleichungen aus, dass die r Systeme von Berührungspunkten mit den gegebenen Punkten auf einer Curve m^{ter} Ordnung liegen. Man hat also den Satz:

Wenn man durch die gegebenen Punkte und durch die Berührungspunkte von $r-1$ verschiedenen Berührungscurven eine Curve m^{ter} Ordnung legt, so schneidet sie die gegebene Curve in solchen Punkten, in denen wieder eine Berührungscurve berührt.

Dabei können die verschiedenen Curven, welche benutzt werden, ebensowohl verschieden als auch gleich sein; nur muss dann im letzteren Falle die Curve m^{ter} Ordnung die gegebene Curve in entsprechender Weise berühren.

II. Lässt man von den $mn-\nu r$ Punkten nur $mn-(\nu+\mu)r$ Punkte wirklich gegeben sein, und legt den übrigen μr nur die Bedingung auf, dass μ mal r zusammenfallen sollen, so wird das Problem unbestimmt, und man erhält *Systeme* von Curven m^{ter} Ordnung, welche durch $mn-(\nu+\mu)r$ gegebene Punkte der Curve n^{ter} Ordnung gehen, und diese Curve in $(\nu+\mu)$ Punkten r-punktig berühren. Die verschiedenen Systeme unterscheiden sich dadurch, dass bei der Bestimmung der Ausdrücke

$$\frac{a^{(i)}-\lambda_1 \,.\, a^{(i)}-\lambda_2 \ldots a^{(i)}-\lambda_{\nu+\mu}}{b^{(i)}-\lambda_1 \,.\, b^{(i)}-\lambda_2 \ldots b^{(i)}-\lambda_{\nu+\mu}}$$

verschiedene r^{te} Wurzeln der Einheit angewendet werden; die Anzahl aller Systeme ist also $r^{\nu-\varkappa}$. Ueber die Berührungspunkte besteht der oben bewiesene Satz fort.

III. Es kann endlich $mn-(\nu+\mu)r$ gleich Null werden, so dass die Systeme der Berührungscurve nur noch von der Natur der gegebenen Curve selbst abhängen. Ueber die Lage der Berührungspunkte gilt noch immer der vorige Satz; aber die Zahl der Systeme kann sich reduciren, wenn man alle diejenigen Systeme ausschliesst, deren Curven aus mehrfach gerechneten Curven niedrigerer Ordnung bestehen. Nach der Betrachtung des §. 6 der angeführten Abhandlung, welche hier entsprechend dem unter I., II. eingeschlagenen Verfahren modificirt wird, bleibt, wenn $m=m's$, $r=r's$, und wenn m', r' relative Primzahlen sind, die Anzahl der eigentlichen Systeme $r^{\nu-\varkappa}-r'^{\nu-\varkappa}$; und nur wenn m, r relative Primzahlen sind, ist die Anzahl der Systeme wirklich gleich $r^{\nu-\varkappa}$.

IV. Im Vorigen wurde immer $m \overline{\overline{>}} n-2$ vorausgesetzt. Für $m=n-3$ entsteht die Aufgabe:

Die Curve n^{ter} Ordnung soll von einer Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung überall wo sie derselben begegnet, also in $\frac{n.n-3}{2}$ Punkten, zweipunktig berührt werden.

Die Gleichungen (39.) nehmen für diesen Fall die Form an:

$$\frac{a^{(i)}-\lambda_1 \,.\, a^{(i)}-\lambda_2 \ldots a^{(i)}-\lambda_{\nu-1}}{b^{(i)}-\lambda_1 \,.\, b^{(i)}-\lambda_2 \ldots b^{(i)}-\lambda_{\nu-1}} = c^{(i)\frac{n-3}{2}} . e^{h^{(i)}i\pi},$$

$$\frac{1}{a^{(i)}-\lambda_1}+\frac{1}{a^{(i)}-\lambda_2}+\cdots+\frac{1}{a^{(i)}-\lambda_{\nu-1}} = \frac{n-3}{2} . \varkappa^{(i)}.$$

Die Gleichungen sind um eine zahlreicher, als die unbekannten λ. Aber man hat den am Ende des §. 2 behandelten Fall vor sich, wo alle Grössen $e^{\pi^{(i)}}$

gleich ± 1, alle $v^{(i)}$ gleich Null waren. Es ist daher für das Zusammenbestehen dieser Gleichungen nur die Bedingung zu erfüllen, dass die Summe aller h gerade sei. Hiedurch wird das letzte h bestimmt, wenn die übrigen beliebig gewählt sind. *Die Anzahl aller Berührungscurven ist also*

$$2^{\nu-\varkappa-1} = 2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa}$$

Nur dann giebt diese Zählung kein richtiges Resultat, wenn der Exponent negativ wird, d. h. wenn *alle* Doppelpunkte in Rückkehrpunkte übergehen. Dies kann nur bei den Curven dritter und vierter Ordnung stattfinden, da die Anzahl der Rückkehrpunkte (vgl. §. 1) nicht grösser sein kann als $\frac{3(n-2)}{2}$. Da nun das vorliegende Problem bei den Curven dritter Ordnung überhaupt nicht eintritt, so bleibt nur der Fall der Curven vierter Ordnung mit drei Rückkehrpunkten übrig; und die obige Abzählung ist durch das bekannte Resultat (vgl. auch §. 1) zu ergänzen, dass diese Curven *eine* Doppeltangente besitzen.

Ueber die Lage der Berührungspunkte und die Beziehungen dieser Curven, welche die gegebenen überall zweipunktig berühren, findet man leicht Sätze wie in §. 8. der angeführten Abhandlung.

Ich begnüge mich zum Schluss einige dieser Resultate für Curven dritter und vierter Ordnung zu specialisiren.

Eine *Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte* besitzt *ein* System von Kegelschnitten, deren jeder die Curve in 3 Punkten berührt. Legt man durch drei Berührungspunkte einen Kegelschnitt, so trifft derselbe die Curve in den Berührungspunkten eines neuen Berührungskegelschnitts. Ebenso besitzt diese Curve *zwei* Systeme von Curven dritter Ordnung, welche die Curve in drei Punkten dreipunktig berühren. Sie besitzt *drei* Grade, welche sie dreipunktig berühren (Wendetangenten).

Geht der Doppelpunkt in einen *Rückkehrpunkt* über, so giebt es noch *ein* System von Berührungskegelschnitten, *kein* System von dreipunktig berührenden Curven dritter Ordnung und *eine* Wendetangente.

Eine *Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten* besitzt *vier* Doppeltangenten, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen. Sie besitzt *sieben* Systeme von Kegelschnitten, welche die Curve in 4 Punkten berühren. Die Berührungspunkte je zweier Kegelschnitte desselben Systems liegen auf einem Kegelschnitt. Drei dieser Systeme enthalten je zwei Paare von Doppeltangenten und können aus denselben abgeleitet werden; die vier übrigen ent-

halten keine Doppeltangenten. Die Curve besitzt sodann *acht* Systeme von Curven dritter Ordnung, welche die Curve in 6 Punkten berühren. Legt man durch die Berührungspunkte einer Curve eine Curve dritter Ordnung, so schneidet sie in den Berührungspunkten einer anderen desselben Systems. Vier Systeme haben die Eigenschaft, dass die Berührungspunkte mit dem Berührungspunkte einer Doppeltangente in einem Kegelschnitte liegen, die anderen haben diese Eigenschaft nicht. Es giebt 26 Systeme von Curven dritter Ordnung, welche in vier Punkten dreipunktig berühren u. s. w.

Geht ein Doppelpunkt in einen *Rückkehrpunkt* über, so hat man noch *zwei* Doppeltangenten; es giebt dann *drei* Systeme von Berührungskegelschnitten, deren eines das Paar von Doppeltangenten enthält. Die Curve hat *vier* Systeme von Curven dritter Ordnung, welche in 6 Punkten berühren; zwei Systeme haben die Eigenschaft, dass ihre Berührungspunkte mit den Berührungspunkten einer Doppeltangente in einem Kegelschnitt liegen. Es giebt 8 Systeme von Curven dritter Ordnung, die in vier Punkten dreipunktig berühren u. s. w.

Bei *zwei* Rückkehrpunkten hat man noch *eine* Doppeltangente und *ein* System von Berührungskegelschnitten, deren Berührungspunkte aber mit denen der Doppeltangente nicht in einem Kegelschnitt liegen. Es giebt *zwei* Systeme von Curven dritter Ordnung, die in 6 Punkten berühren; die Berührungspunkte *eines* Systems liegen mit denen der Doppeltangente in einem Kegelschnitt. Es giebt *zwei* Systeme von Curven dritter Ordnung, die in vier Punkten dreipunktig berühren, u. s. w.

Endlich bei *drei* Rückkehrpunkten giebt es zwar noch eine Doppeltangente, aber kein System von Berührungskegelschnitten mehr. Es giebt ein System von Curven dritter Ordnung, die in 6 Punkten berühren, und die 6 Berührungspunkte liegen mit denen der Doppeltangente in einem Kegelschnitt. Ein System von dreipunktig berührenden Curven dritter Ordnung existirt nicht mehr.

Giessen, den 28. Mai 1864.

Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen.

(Von Herrn *Kummer*.)

(Abgedruckt aus dem Monatsbericht der Berliner Akademie vom 16. Juli 1863.)

Die allgemeine Untersuchung aller Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten Statt haben, und welche darum als durch Bewegung eines veränderlichen Kegelschnitts entstanden betrachtet werden können, stützt sich hauptsächlich auf folgenden Satz:

Wenn eine Ebene aus irgend einer Fläche eine Curve mit Doppelpunkten ausschneidet, so ist jeder dieser Doppelpunkte entweder ein Doppelpunkt der Fläche, oder ein Berührungspunkt der Ebene und der Fläche.

Unter Doppelpunkten einer Curve oder Fläche sind hier alle diejenigen singulären Punkte zu verstehen, für welche die ersten Ableitungen gleich Null werden; eine continuirliche Reihe solcher Doppelpunkte auf einer Fläche bildet eine Doppelpunktscurve derselben. Der Begriff der Berührung ist im engeren Sinne gefasst, so dass nicht jede durch einen Doppelpunkt einer Fläche gehende Ebene als eine in diesem Punkte berührende angesehen wird, sondern nur diejenigen Punkte als eigentliche Berührungspunkte gelten, deren unendlich nahe Punkte nach allen Richtungen hin als zugleich auf der Fläche und der Ebene liegend zu betrachten sind, in so fern in denselben die Abstände der Fläche von der Ebene unendlich kleine Grössen höherer Ordnungen sind.

Wenn eine Ebene aus einer Fläche vierten Grades einen Kegelschnitt ausschneidet, so muss sie zugleich einen zweiten Kegelschnitt ausschneiden. Ein solches Kegelschnittpaar, als Curve vierten Grades betrachtet, hat nothwendig vier Doppelpunkte, welche real oder imaginär, oder auch unendlich entfernt sein können, und von denen auch zwei oder mehrere in einen zusammenfallen können, wenn die beiden Kegelschnitte sich berühren. Zerfällt einer dieser beiden Kegelschnitte in zwei grade Linien, so sind fünf Doppelpunkte vorhanden, und wenn beide Kegelschnitte in grade Linien zerfallen, so bilden sie sechs Doppelpunkte. Umgekehrt, wenn eine Ebene aus einer Fläche vierten Grades eine Curve mit vier, oder mehr als vier Doppelpunkten

ausschneidet, so besteht diese Curve vierten Grades nothwendig aus Curven niederer Grade, weil eine irreductible Curve vierten Grades nicht mehr als drei Doppelpunkte haben kann. Diese Curven niederen Grades sind, wenn nicht mehr als vier Doppelpunkte vorhanden sind, und wenn nicht drei derselben in einer graden Linie liegen, nothwendig zwei Kegelschnitte, wenn aber drei dieser vier Doppelpunkte in grader Linie liegen, so zerfällt die Curve vierten Grades nur in eine grade Linie und eine Curve dritten Grades mit einem Doppelpunkte. Hat der Schnitt der Ebene und der Fläche vierten Grades fünf Doppelpunkte, so besteht er aus einem Kegelschnitt und zwei graden Linien, hat er sechs Doppelpunkte, so besteht er aus vier graden Linien.

Um die uneigentlichen Flächen vierten Grades, welche aus zwei Flächen zweiten Grades bestehen, von der folgenden Untersuchung überall auszuschliessen, braucht man den Satz, dass diejenigen Flächen vierten Grades, aus welchen alle beliebigen Ebenen Kegelschnittpaare ausschneiden, nur aus zwei Flächen zweiten Grades bestehen können, oder noch besser den folgenden mehr aussagenden Satz, dessen strenger Beweis auf algebraischem Wege ohne besondere Schwierigkeit geführt werden kann:

Wenn alle durch einen festen Punkt gehenden Ebenen aus einer Fläche vierten Grades Kegelschnittpaare ausschneiden, so besteht dieselbe aus zwei Flächen zweiten Grades, mit Ausnahme des einen Falles, wo sie ein Kegel vierten Grades ist, und die schneidenden Ebenen alle durch den Mittelpunkt desselben gehen.

Es werden nun folgende Fälle besonders behandelt: erstens, wo die Schaar der Ebenen, welche Kegelschnittpaare ausschneiden, nicht eine Schaar von berührenden Ebenen der Fläche ist; zweitens, wo alle Ebenen dieser Schaar Tangentialebenen mit *einem* Berührungspunkte sind, und drittens, wo dieselben *doppelt* berührende Ebenen sind. Es würden eigentlich noch die beiden Fälle hinzuzunehmen sein, wo eine Schaar von Ebenen die Fläche dreifach berührt, und wo sie die Fläche in einer graden Linie berührt; die dreifach berührenden Ebenen, welche hier nur solche sein können, die durch eine auf der Fläche liegende grade Linie gehen, ergeben aber keine bemerkenswerthen Schaaren von Kegelschnittpaaren auf Flächen vierten Grades, und eine Schaar von Ebenen, welche in einer ganzen Linie berühren, findet nur auf den abwickelbaren Flächen vierten Grades Statt, von welchen unmittelbar klar ist, dass eine jede ihrer Tangentialebenen ausser einer graden Doppellinie noch einen Kegelschnitt ausschneidet.

1. Die Flächen vierten Grades, aus welchen Schaaren von nicht berührenden Ebenen Kegelschnitte ausschneiden.

Wenn eine Schaar von Ebenen, welche eine Fläche vierten Grades nicht berühren, aus derselben Kegelschnittpaare ausschneiden soll, so muss jede Ebene dieser Schaar nothwendig durch vier Doppelpunkte der Fläche hindurch gehen. Ist nun keiner dieser vier Doppelpunkte für alle Ebenen der Schaar derselbe, sondern alle vier Doppelpunkte von einer Ebene zur andern veränderlich, so muss die Fläche vierten Grades nothwendig eine Doppelpunktscurve vierten Grades haben. Hieraus folgt weiter, dass alle beliebigen, auch jener Schaar nicht angehörenden Ebenen aus der Fläche Curven mit vier Doppelpunkten, also Kegelschnittpaare ausschneiden müssen, dass also die Fläche vierten Grades nur aus zwei Flächen zweiten Grades bestehen kann.

Ist einer der vier Doppelpunkte für alle Ebenen der Schaar derselbe, so müssen die drei anderen, von einer Ebene zur andern veränderlichen Doppelpunkte eine Doppelpunktscurve dritten Grades für die Fläche bilden, welche diesen einen festen Doppelpunkt der Fläche nicht enthält; es müssen darum alle durch diesen festen Punkt gehenden Ebenen Curven vierten Grades mit vier Doppelpunkten, also Kegelschnittpaare ausschneiden, welches nach dem oben aufgestellten Satze nur dann möglich ist, wenn die Fläche vierten Grades aus zwei Flächen zweiten Grades besteht, oder wenn sie eine Kegelfläche ist.

Sind von den vier Doppelpunkten, welche jede Ebene der Schaar aus der Fläche vierten Grades ausschneiden soll, zwei für alle Ebenen dieselben und nur zwei von einer Ebene zur andern veränderlich, so muss diese Fläche ausser den zwei festen Doppelpunkten, durch welche alle Ebenen der Schaar hindurchgehen, noch eine Doppelpunktscurve zweiten Grades haben; und umgekehrt, wenn sie eine Doppelpunktscurve zweiten Grades und ausserdem zwei einzelne Doppelpunkte hat, so schneiden alle durch diese beiden festen Doppelpunkte gehenden Ebenen Curven mit vier Doppelpunkten aus der Fläche aus, also Kegelschnittpaare, wenn nicht etwa die Verbindungslinie beider Doppelpunkte durch die Doppelpunktscurve hindurchgeht, in welchem Falle diese Verbindungslinie eine auf der Fläche liegende grade Linie sein müsste. Man hat also folgenden Satz:

Alle Flächen vierten Grades mit einer Doppelpunktscurve zweiten Grades und zwei einzelnen Doppelpunkten, deren Verbindungslinie nicht durch die Doppelpunktscurve hindurchgeht, werden von der Schaar der durch die beiden Doppelpunkte gehenden Ebenen in Kegelschnittpaaren geschnitten.

Die allgemeinste Form der Gleichung für alle Flächen vierten Grades, welche eine ebene Doppelpunktscurve zweiten Grades haben, ist:

$$\varphi^2 = 4p^2\psi,$$

wo φ und ψ ganze rationale Functionen zweiten Grades sind, und p eine lineare Function der drei Coordinaten. Nimmt man in derselben ψ als Product zweier linearen Functionen q und r, so erhält man

$$\varphi^2 = 4p^2qr,$$

und dieses ist die allgemeinste Form der Gleichung aller Flächen vierten Grades, welche ausser der Doppelpunktscurve zweiten Grades noch zwei Doppelpunkte haben, deren Verbindungslinie nicht eine auf der Fläche liegende grade Linie ist. Die Curve $\varphi = 0$, $p = 0$ ist die Doppelpunktscurve zweiten Grades, und die beiden Durchschnittspunkte der graden Linie $q = 0$, $r = 0$, mit der Fläche zweiten Grades $\varphi = 0$, sind die beiden Doppelpunkte der Fläche vierten Grades. Alle durch die Axe $q = 0$, $r = 0$ gehenden Ebenen schneiden Kegelschnittpaare aus der Fläche aus, die beiden Ebenen $q = 0$ und $r = 0$ schneiden Kegelschnittpaare aus, die sich decken, und sind singuläre Tangentialebenen der Fläche, welche dieselbe in diesen Kegelschnitten berühren.

Die Flächen vierten Grades, welche ausser der Doppelpunktscurve zweiten Grades noch zwei Paare von Doppelpunkten haben und zwei durch dieselben hindurchgehende Büschel von Ebenen, welche Kegelschnittpaare ausschneiden, sind alle in folgender Form enthalten:

$$(p^2 + qr - st)^2 = 4p^2qr,$$

oder was dasselbe ist:

$$(p^2 - qr + st)^2 = 4p^2st,$$

wo p, q, r, s, t beliebige lineare Functionen der Coordinaten sind, welche Gleichung auch in folgende einfache Form gesetzt werden kann:

$$p + \sqrt{qr} + \sqrt{st} = 0.$$

Die beiden Büschel von Ebenen, welche Kegelschnittpaare ausschneiden, sind $q + \lambda r = 0$ und $s + \mu t = 0$, für beliebige Werthe der Constanten λ und μ, die Ebenen $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$, $t = 0$ sind vier singuläre Tangentialebenen der Fläche, welche dieselbe in Kegelschnitten berühren, also einhüllen. Da diese Flächen ausser der Doppelpunktscurve zweiten Grades $p = 0$, $qr - st = 0$, noch vier einzelne Doppelpunkte haben, deren zwei durch die Gleichungen $q = 0$, $r = 0$, $p^2 - st = 0$, die beiden anderen durch die Gleichungen $s = 0$, $t = 0$,

$p^2 - qr = 0$ gegeben sind, und da diese vier Doppelpunkte auf sechs verschiedene Weisen sich zu zweien verbinden lassen, so könnte man erwarten, dass sechs verschiedene Schaaren von Kegelschnittpaaren, deren Ebenen durch die sechs Verbindungslinien der vier Doppelpunkte gehen, auf denselben Statt haben möchten; untersucht man aber die Lage der vier Doppelpunkte genauer, so findet man, dass von den sechs Verbindungslinien derselben vier durch die Doppelpunktscurve zweiten Grades hindurchgehen und darum auf der Fläche vierten Grades liegende grade Linien sind, und dass die beiden Ebenenbüschel $q + \lambda r = 0$, und $s + \mu t = 0$ die einzigen sind, welche Kegelschnittpaare ausschneiden.

In diese Kategorie von Flächen vierten Grades gehört unter anderen auch die zuerst von Herrn *Charles Dupin* behandelte und mit dem Namen *Cyclide* belegte Fläche, deren beide Schaaren von Krümmungslinien Kreise sind. Die Doppelpunktscurve zweiten Grades liegt bei derselben im Unendlichen, und von den vier einzelnen Doppelpunkten sind stets zwei imaginär, die beiden anderen aber können real sein. Die Gleichung dieser Fläche kann in folgende einfache Form gesetzt werden:

$$b^2 = \sqrt{(ax-ek)^2 + b^2y^2} + \sqrt{(ex-ak)^2 - b^2z^2}.$$

Die allgemeine Untersuchung führt nun weiter zu dem Falle, wo die Schaar von Ebenen, welche Kegelschnittpaare aus der Fläche vierten Grades ausschneiden sollen, durch drei oder mehrere feste Doppelpunkte der Fläche hindurchgeht. Eine Schaar solcher Ebenen kann aber nur dann Statt haben, wenn alle diese Doppelpunkte in grader Linie liegen, welche eine grade Doppelpunktslinie der Fläche ist. Dieser Fall giebt unmittelbar folgenden Satz:

Aus einer jeden Fläche vierten Grades, welche eine grade Doppelpunktslinie hat, schneiden alle durch die Doppelpunktslinie gelegten Ebenen Kegelschnitte aus.

Die Gleichungen der Flächen dieser Kategorie sind alle in folgender Form enthalten:

$$p^2\varphi + 2pq\varphi_1 + q^2\varphi_2 = 0$$

wo φ, φ_1, φ_2 beliebige Functionen zweiten Grades, p und q lineare Functionen der Coordinaten sind, $p = 0$, $q = 0$ ist die Linie der Doppelpunkte.

Endlich bleiben hier noch die Fälle zu untersuchen, dass von den vier Doppelpunkten der Kegelschnittpaare, welche von einer Schaar von Ebenen ausgeschnitten werden sollen, zwei oder mehrere in einem, oder in zwei festen Punkten vereinigt sind, in welchen diese Kegelschnittpaare sich be-

rühren. Die vollständige Erörterung aller dieser Fälle ergiebt zunächst nur eine speciellere Fläche der bereits gefundenen Art $\varphi^2 = 4p^2qr$, mit einer Doppelpunktscurve zweiten Grades und zwei Doppelpunkten, nämlich diejenige, in welcher die beiden Doppelpunkte unendlich nahe an einander liegen, ausserdem aber führt sie auf eine neue merkwürdige Art von Flächen vierten Grades, auf welchen eine Schaar von Kegelschnittpaaren liegen, die einen doppelten Contact haben. Es sind diess die Flächen vierten Grades, welche in zwei verschiedenen Punkten sich selbst berühren. Legt man nämlich durch die beiden Selbstberührungspunkte einer solchen Fläche irgend eine Ebene, so schneidet dieselbe eine Curve aus, welche in diesen beiden Punkten sich selbst berührt; eine Curve vierten Grades kann aber nicht zwei Punkte der Selbstberührung haben, ausser wenn sie aus zwei Kegelschnitten besteht, man hat also folgenden Satz:

> *Die Flächen vierten Grades, welche in zwei verschiedenen Punkten sich selbst berühren, haben die Eigenschaft, dass alle durch die beiden Selbstberührungspunkte gehenden Ebenen aus ihnen Kegelschnittpaare ausschneiden, welche sich in diesen beiden Punkten berühren.*

Die allgemeinste Form der Gleichung für diese Art von Flächen ist:

$$\varphi^2 = ap^4 + 4bp^3q + 6cp^2q^2 + 4dpq^3 + eq^4,$$

wo φ eine Function zweiten Grades ist, p und q lineare Functionen und a, b, c, d, e Constanten. Die beiden Punkte, in denen diese Fläche sich selbst berührt, sind die Durchschnittspunkte der graden Linie $p=0$, $q=0$ mit der Fläche zweiten Grades $\varphi = 0$. Alle Ebenen des Büschels $p+\lambda q = 0$ schneiden Kegelschnittpaare mit doppeltem Contact aus der Fläche aus, die vier Ebenen aber, in welche der Ausdruck vierten Grades

$$ap^4 + 4bp^3q + 6cp^2q^2 + 4dpq^3 + eq^4 = 0$$

zerfällt werden kann, schneiden aus der Fläche Kegelschnittpaare aus, die sich vollständig decken, sie sind also singuläre Tangentialebenen der Fläche, welche dieselbe in diesen Kegelschnitten berühren. Eine Doppelpunctscurve hat diese Art von Flächen im Allgemeinen nicht, sondern nur in dem speciellen Falle, wo zwei der vier singulären Tangentialebenen sich zu einer vereinigen, d. i. wenn jener Ausdruck vierten Grades zwei gleiche lineare Factoren hat.

Fasst man alle Fälle zusammen, in denen eine Schaar von Ebenen, welche nicht Tangentialebenen sind, aus einer Fläche vierten Grades Kegelschnitte ausschneidet, so ergiebt sich aus denselben das allgemeine Resultat:

Wenn eine Schaar von Ebenen, welche nicht berührende Ebenen einer Fläche vierten Grades sind, aus derselben Kegelschnitte ausschneidet, so gehen alle Ebenen dieser Schaar nothwendig durch eine feste grade Linie. Alle Flächen vierten Grades, aus welchen Schaaren von nicht berührenden Ebenen Kegelschnitte ausschneiden, können daher als durch Rotation eines veränderlichen Kegelschnitts um eine, in seiner Ebene liegende, feste Axe entstanden betrachtet werden.

2. Die Flächen vierten Grades, aus welchen Schaaren einfach berührender Ebenen Kegelschnitte ausschneiden.

Damit eine einfach berührende Ebene aus einer Fläche vierten Grades ein Kegelschnittpaar ausschneide, muss sie nothwendig durch drei Doppelpunkte der Fläche hindurchgehen und diese Bedingung ist zugleich hinreichend, wenn nicht der Berührungspunkt mit zweien dieser Doppelpunkte in einer graden Linie liegt, welche alsdann eine grade Linie der Fläche sein muss.

Wenn nun erstens die Ebenen der Schaar nicht alle durch einen festen Doppelpunkt der Fläche hindurchgehen, so bilden die von einer Ebene zur anderen veränderlichen drei Doppelpunkte, welche jede dieser Ebenen ausschneiden muss, eine Doppelpunktscurve dritten Grades; der Fall aber, dass der Berührungspunkt mit zweien der übrigen drei von der Tangentialebene ausgeschnittenen Doppelpunkten stets in grader Linie liegt, tritt allemal dann, und auch nur dann ein, wenn die Fläche vierten Grades eine gradlinige ist. Also alle Flächen vierten Grades, welche eine Doppelpunktscurve dritten Grades haben und welche nicht gradlinige Flächen sind, werden von allen ihren Tangentialebenen in Kegelschnittpaaren geschnitten, aus den gradlinigen Flächen vierten Grades aber schneiden die in einem Punkte berührenden Ebenen nur grade Linien mit Curven dritten Grades aus.

Untersucht man nun die besonderen Fälle, erstens, wo die Doppelpunktscurve dritten Grades eine Curve doppelter Krümmung ist, zweitens, wo sie aus einem Kegelschnitt und einer graden Linie besteht, und drittens, wo sie aus drei graden Linien besteht, so findet man:

Alle Flächen vierten Grades, welche eine Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade zur Doppelpunktscurve haben, sind nothwendig gradlinige Flächen.

Einen Kegelschnitt und eine grade Linie als Doppelpunktscurven kann eine Fläche vierten Grades nur dann enthalten, wenn die grade Linie den

Kegelschnitt in einem Punkte schneidet; alle Flächen dieser Art sind aber ebenfalls nur gradlinige.

Drei grade Doppelpunktslinien können Flächen vierten Grades nur in folgenden drei Fällen enthalten, erstens, wenn diese drei graden Linien, in eine zusammenfallend, eine dreifache Linie der Fläche bilden, zweitens, wenn zwei dieser graden Doppelpunktslinien nicht in einer Ebene liegen, die dritte aber diese beiden schneidet und drittens, wenn alle drei graden Doppelpunktslinien durch einen und denselben Punkt gehen. Der erste und zweite dieser Fälle kann aber wieder nur bei gradlinigen Flächen Statt haben, es bleibt daher nur der eine Fall übrig, wo die drei graden Doppelpunktslinien durch einen und denselben Punkt gehen, in welchem die Fläche vierten Grades im allgemeinen nicht eine gradlinige ist. Also:

Die Flächen vierten Grades, welche drei durch einen und denselben Punkt gehende grade Doppelpunktslinien besitzen, haben die Eigenschaft, dass alle Tangentialebenen aus denselben Kegelschnittpaare ausschneiden.

Die allgemeinste Form der Gleichung dieser Flächen ist:

$$Aq^2r^2+Br^2p^2+Cp^2q^2+2Dpqrs = 0,$$

wo p, q, r, s beliebige lineare Functionen der Coordinaten sind, und A, B, C, D beliebige Constanten. Die drei Ebenen $p=0$, $q=0$, $r=0$ sind diejenigen, deren drei Durchschnittslinien die Doppelpunktslinien der Fläche sind, der Durchschnittspunkt derselben $p=0$, $q=0$, $r=0$ ist ein dreifacher Punkt der Fläche. Auf dieser Fläche liegen unendlich viele Schaaren von Kegelschnitten, in der Art, dass durch jeden beliebigen Punkt des Raumes eine ganze Schaar von Ebenen geht, welche alle Kegelschnittpaare aus der Fläche ausschneiden. Alle Ebenen einer solchen Schaar hüllen einen Kegel sechsten Grades ein, welcher ein einhüllender Kegel der Fläche ist. Durch einen jeden Punkt auf der Fläche gehen unendlich viele Kegelschnitte, deren Ebenen einen Kegel vierten Grades einhüllen, welcher, wenn der Punkt auf einer der drei Doppelpunktslinien liegt, zu einem Kegel zweiten Grades wird.

Diese merkwürdige Art von Flächen vierten Grades, die einzige, auf welcher unendlich viele Schaaren von Kegelschnitten Statt haben, hat *Steiner* vor einer Reihe von Jahren entdeckt, er hat aber nichts davon veröffentlicht, sondern nur Herrn *Weierstrass* eine Construction derselben mitgetheilt, aus welcher dieser ihre Gleichungen in folgender Form berechnet hat:

$$x = \frac{K}{N}, \quad y = \frac{L}{N}, \quad z = \frac{M}{N},$$

wo K, L, M, N beliebige ganze Functionen zweiten Grades von zwei unabhängigen Veränderlichen sind; aus dieser Form aber lassen sich die Haupteigenschaften der Fläche, namentlich die drei graden Doppelpunktslinien und der ihnen gemeinsame dreifache Punkt, welche in der oben angegebenen Form klar am Tage liegen, nur schwer erkennen.

Wenn die Schaar der einfach berührenden Ebenen, welche aus einer Fläche vierten Grades Kegelschnittpaare ausschneiden sollen, durch einen festen Doppelpunkt der Fläche hindurchgeht, so sind nur zwei der drei Doppelpunkte der Fläche, welche ausgeschnitten werden müssen, von einer Ebene der Schaar zur anderen veränderlich, dieselben müssen daher eine Doppelpunktslinie zweiten Grades bilden, und umgekehrt:

Wenn eine Fläche vierten Grades eine ebene Doppelpunktscurve zweiten Grades und ausser dieser noch einen Doppelpunkt hat, so schneiden alle durch diesen Doppelpunkt gehenden Tangentialebenen Kegelschnittpaare aus derselben aus.

Die allgemeinste Form der Gleichung der Flächen vierten Grades, welche ausser einer Doppelpunktscurve zweiten Grades noch einen Doppelpunkt haben, erhält man, indem man in der Gleichung

$$\varphi^2 = 4p^2\psi$$

ψ und φ so wählt, dass $\psi = 0$ einen Kegel zweiten Grades darstellt, und dass die Fläche zweiten Grades $\varphi = 0$ durch den Mittelpunkt des Kegels $\psi = 0$ hindurchgeht. Der Mittelpunkt dieses Kegels ist alsdann Doppelpunkt der Fläche, und die Schaar der durch denselben hindurchgehenden und die Fläche vierten Grades berührenden Ebenen, welche Kegelschnittpaare aus derselben ausschneidet, ist dieselbe als die Schaar der berührenden Ebenen des Kegels $\psi = 0$. Derjenige Kegel zweiten Grades, welcher in dem festen Doppelpunkte an die Fläche vierten Grades sich am genausten anschliesst, kann ebenfalls als ein solcher angesehen werden, dessen Tangentialebenen zugleich berührende Ebenen der Fläche sind, aber die Berührungspunkte derselben fallen überall mit dem festen Doppelpunkte selbst zusammen, und jede der durch dieselben ausgeschnittenen Curven hat in diesem Punkte eine Spitze und ausserdem zwei Doppelpunkte, ist also nicht ein Kegelschnittpaar, sondern eine irreductible Curve vierten Grades.

Der Fall, dass eine Schaar berührender Ebenen durch zwei feste Doppelpunkte der Fläche hindurchgeht, welcher nur dann Statt haben kann, wenn die Verbindungslinie der beiden Doppelpunkte eine auf der Fläche liegende

grade Linie ist, führt auf keine besondere Art von Flächen vierten Grades mit Schaaren von Kegelschnitten.

3. Die Flächen vierten Grades, aus welchen Schaaren von zweifach berührenden Ebenen Kegelschnitte ausschneiden.

Jede zweifach berührende Ebene, welche ein Kegelschnittpaar aus einer Fläche vierten Grades ausschneiden soll, muss nothwendig durch zwei Doppelpunkte der Fläche hindurch gehen. Wenn nun eine ganze Schaar solcher Ebenen Statt haben soll, so können dieselben nicht alle durch einen festen Punkt gehen, die beiden Doppelpunkte müssen daher von einer Ebene der Schaar zur andern veränderlich sein und eine Doppelpunktscurve zweiten Grades bilden, also:

Die Flächen vierten Grades, welche eine ebene Doppelpunktscurve zweiten Grades haben, werden von allen doppelt berührenden Ebenen in Kegelschnittpaaren geschnitten.

Die schon oben aufgestellte Gleichung aller Flächen vierten Grades, welche eine ebene Doppelpunktscurve zweiten Grades haben, nämlich:

$$\varphi^2 = 4p^2\psi$$

kann man auch in folgende Form setzen:

$$(\varphi+2\lambda p^2)^2 = 4p^2(\psi+\lambda\varphi+\lambda^2 p^2),$$

in welcher λ eine ganz beliebige Constante ist. Bestimmt man diese Constante in der Art, dass die Fläche zweiten Grades

$$\psi+\lambda\varphi+\lambda^2 p^2 = 0$$

eine Kegelfläche wird, so ist diese Kegelfläche eine solche, welche die Fläche vierten Grades doppelt einhüllt, in der Art, dass jede Tangentialebene dieser Kegelfläche die Fläche vierten Grades in zwei verschiedenen Punkten berührt; die Schaar der diesen Kegel berührenden Ebenen ist also eine Schaar doppelt berührender Tangentialebenen der Fläche vierten Grades, welche Kegelschnittpaare aus derselben ausschneiden. Die leicht zu entwickelnde Bedingung, dass $\psi+\lambda\varphi+\lambda^2 p^2 = 0$ eine Kegelfläche darstelle, führt auf eine Gleichung fünften Grades für die Constante λ, deren fünf Wurzeln fünf Kegelflächen geben, also:

Es giebt im allgemeinen fünf verschiedene Kegel zweiten Grades, deren Tangentialebenen eine Fläche vierten Grades mit einer Doppelpunktscurve zweiten Grades doppelt berühren, und Kegelschnittpaare aus derselben ausschneiden.

Wenn die Gleichung fünften Grades für λ imaginäre Wurzeln hat, so werden die denselben entsprechenden Schaaren doppelt berührender Ebenen, welche Kegelschnittpaare ausschneiden, ebenfalls imaginär; wenn diese Gleichung aber zwei gleiche Wurzeln hat, so treten an die Stelle der entsprechenden Schaaren doppelt berührender Ebenen nur zwei singuläre Tangentialebenen der Fläche vierten Grades, welche dieselbe in Kegelschnitten berühren, oder auch eine Schaar einfach berührender Ebenen, welche aber alle durch einen festen Doppelpunkt der Fläche gehen. Hat die Fläche vierten Grades ausser der Doppelpunktscurve zweiten Grades noch ein oder zwei Paare von Doppelpunkten, deren Verbindungslinien nicht durch die Doppelpunktscurve hindurchgehen, und demgemäss eine oder zwei Schaaren von nicht berührenden Ebenen, welche Kegelschnittpaare ausschneiden, so bleiben von den fünf Schaaren doppelt berührender Ebenen stets nur drei oder eine übrig, weil die anderen zu singulären Tangentialebenen der Fläche werden.

Für die *Dupin*sche Cyclide hat die Gleichung fünften Grades, welche die fünf Schaaren doppelt berührender Ebenen bestimmt, zwei Paare gleicher Wurzeln, welchen die vier singulären Tangentialebenen dieser Fläche entsprechen (von denen zwei stets imaginär sind); die fünfte Wurzel dieser Gleichung aber giebt einen wirklichen Kegel zweiten Grades, dessen Tangentialebenen Kegelschnittpaare aus der Cyclide ausschneiden. Herr Stud. *Schwarz*, dem ich die Existenz dieser, wie ich glaube früher noch nicht bemerkten Schaar von Kegelschnitten auf der Cyclide mitgetheilt habe, hat gefunden, dass dieselbe stets eine Doppelschaar von Kreisen ist, dass also diese Fläche nicht nur auf zwei, sondern sogar auf vier verschiedene Weisen durch Bewegung eines veränderlichen Kreises erzeugt werden kann.

Endlich sind hier noch die gradlinigen Flächen vierten Grades zu erwähnen. Die doppelt berührenden Ebenen derselben gehen stets durch zwei der erzeugenden Graden, sie schneiden also ausser diesen beiden graden Linien nothwendig noch Kegelschnitte aus, welche auch selbst wieder in zwei grade Linien zerfallen können. Also:

Alle doppelt berührenden Ebenen der gradlinigen Flächen vierten Grades schneiden aus denselben zwei grade Linien und einen Kegelschnitt aus.

Berlin, im Juli 1863.

Note zur vorstehenden Abhandlung.

(Von Herrn *Weierstrass.*)

(Abgedruckt aus dem Monatsbericht der Berliner Akademie vom 16. Juli 1868.)

Auf die merkwürdige Fläche, welche Herr *Kummer* in seinem Vortrage als eine von *Steiner* entdeckte anführt, ist dieser, wie ich von ihm erfahren habe, gekommen, als er sich vor etwa fünfundzwanzig Jahren mit Untersuchungen über polare Beziehungen zwischen Punkten und Systemen von Linien und Flächen zweiten Grades beschäftigte. Da ich Grund habe zu bezweifeln, dass sich in den hinterlassenen Papieren unseres verstorbenen Collegen über diesen Gegenstand etwas Zusammenhängendes finden werde, so möge es mir gestattet sein, bei dieser Gelegenheit das mir vor einigen Jahren darüber Mitgetheilte, so unvollständig es sein möge, bekannt zu machen.

Die erwähnten Untersuchungen hatten *Steiner* zu folgendem Satze geführt, vermittelst dessen man, wenn man sich alle möglichen Flächen zweiten Grades denkt, jeder derselben einen bestimmten Punkt des Raumes zuordnen kann.

Man nehme eine solche Fläche $\mathfrak{P}_0$ willkührlich an, und auf derselben einen festen Punkt A; zieht man dann von diesem aus irgend drei Sehnen AL, AM, AN, welche dreien conjugirten Durchmessern einer andern Fläche $\mathfrak{P}$ parallel sind, und legt durch die Endpunkte L, M, N derselben eine Ebene, so geht diese stets durch einen Punkt P, dessen Lage — nachdem $\mathfrak{P}_0$ und A fixirt sind — bloss von der Fläche $\mathfrak{P}$ abhängt, und der Pol der letzteren heissen möge.

Ich muss jedoch bemerken, dass dieser interessante Satz, der sich nach *Steiners* Angabe synthetisch auf sehr einfache Weise ergeben soll, bereits im Jahre 1837 von Herrn *Hesse* veröffentlicht und analytisch bewiesen worden ist*). Betrachtet man nun die Schaar derjenigen Flächen $\mathfrak{P}$, welche durch die Schnittlinie zweier bestimmten, $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, gehen, und untersucht den geometrischen Ort ihrer Pole; so ergiebt sich, *dass derselbe ein Kegelschnitt ist.*

*) *Crelles* Journal Bd. 18, p. 110.

Dieses vorausgesetzt nehme man drei Flächen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ an und denke sich zunächst durch die Schnittlinie zweier von ihnen eine neue gelegt, und dann wieder eine durch den Durchschnitt dieser und der dritten; so gelangt man zu einem System von Fläche $\mathfrak{P}$, welche man den Punkten einer Ebene in der Art zuordnen kann, dass jeder graden Linie der letzteren eine vollständige Schaar solcher Flächen zweiten Grades entspricht, welche eine gemeinschaftliche Schnittlinie haben. Daraus folgt, nach dem vorhergehenden Satze, *dass die Pole der $\mathfrak{P}$ eine Fläche bilden, auf welcher unendlich viele Schaaren von Kegelschnitten liegen, oder welche — was dasselbe besagt — auf unendlich viele Arten durch Bewegung eines veränderlichen Kegelschnitts erzeugt werden kann.*

Diese Fläche ist nun identisch mit der von Herrn *Kummer* in der vorstehenden Abhandlung §. 2. aufgestellten, indem sie die charakteristischen Eigenschaften der letzteren besitzt. *Steiner* hatte nämlich gefunden, *dass, wenn man einen der angegebenen Kegelschnitte betrachtet, in der Ebene desselben stets noch ein zweiter liege,* und daraus den Schluss gezogen, *dass die Fläche vom vierten Grade sein müsse.* Ferner hatte er erkannt, *dass die Ebene zweier solcher Kegelschnitte in einem der vier Durchschnittspunkte derselben die Fläche berühre, und dass der geometrische Ort der drei anderen ein System von drei graden, in der Fläche liegenden und in einem ausgezeichneten Punkte derselben sich schneidenden Linien sei.*

Durch welche Betrachtungen *Steiner* diese Eigenschaften seiner Fläche ermittelt hat, kann ich nicht angeben. Analytisch sind sie leicht aufzufinden, indem man aus der hier angegebenen geometrischen Construction der Fläche die von Herrn *Kummer* aufgestellte Gleichung derselben ableitet, was bei einer passenden Wahl der Flächen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ in dem betrachteten System nicht schwer ist.

Ueber die *Steiner*sche Fläche vierten Grades.

(Von Herrn *Schröter* zu Breslau.)

(Abgedruckt aus dem Monatsbericht der Berliner Akademie vom 26. Nov. 1863.)

Die zu Herrn *Kummers* Abhandlung: *„über die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen“* *) hinzugefügten Bemerkungen des Herrn *Weierstrass* hinsichtlich der synthetischen Betrachtungen, welche *Steiner* zu jener merkwürdigen Fläche vierten Grades geführt haben, deren sämmtliche Berührungsebenen Kegelschnittpaare ausschneiden — wurden mir eine Veranlassung, den dort angedeuteten Weg weiter zu verfolgen und ich erlaube mir, die Ergebnisse dieser Untersuchung in dem Folgenden mitzutheilen.

1. Wenn man in der Ebene eines Kegelschnitts zu einem beliebigen Punkte x die Polare X bestimmt, auf derselben einen Punkt y nimmt und dessen Polare Y bestimmt, so ist der Schnittpunkt z von X, Y der Pol der Geraden Z, welche x, y verbindet. Solche drei Punkte heissen ein *Tripel* conjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt. Hält man x fest und verändert y auf X, so verändert sich auch z; die Punktenpaare y, z bilden ein Punktsystem (Involution) auf X, folglich die Strahlenpaare Y, Z ein, mit jenem perspectivisches Strahlsystem. Lässt man den Punkt x die ganze Ebene durchwandern, so durchstreift auch X die ganze Ebene; sie durchlaufen zwei auf einander liegende Gebilde von doppelter Unendlichkeit: ein Punktenfeld und Strahlenfeld, die in reciproker Beziehung zu einander stehen und in besonderer Weise auf einander liegen. Ein solches Doppelgebilde heisst ein ebenes *Polarsystem* und kann auch aufgefasst werden als eine Unendlichkeit von Tripeln in Bezug auf den Kegelschnitt. Dieser erscheint in der Ebene des Polarsystems nur als der Ort solcher besonderen Punkte x, deren Polaren X durch sie selbst hindurchgehen.

Nimmt man von irgend einem Punkte O des Raumes aus die Perspective eines ebenen Polarsystems, so erhält man in O ein Doppelgebilde von zwei in gewisser Weise concentrisch liegenden, reciproken Bündeln, einem Strahlenbündel und einem Ebenenbündel; ein solches Doppelgebilde

*) Monatsbericht der Berliner Akademie vom 16. Juli 1863.

heisse ein *Polarbündel* und kann auch aufgefasst werden als aus unendlich vielen Dreikanten (Tripeln conjugirter Strahlen) bestehend, die alle in dem gemeinsamen Mittelpunkte des Polarbündels zusammenlaufen und durch je ein Tripel des ebenen Polarsystems gehen.

Wenn man von allen Punkten x einer Ebene E die Polarebenen in Bezug auf eine beliebige Oberfläche zweiter Ordnung bestimmt, die sämmtlich durch einen Punkt O, den Pol von E laufen, und wenn die Polarebene von x in X die Ebene E schneidet, so bilden x, X ein ebenes Polarsystem, der Strahl Ox und die Polarebene zu x ein mit demselben perspectivisches Polarbündel. Das ebene Polarsystem ist auch hinsichtlich des Kegelschnitts, in welchem E von der Fläche zweiter Ordnung geschnitten wird, ein ebenes Polarsystem; es hört aber nicht auf, reell zu bestehen, wenn der ganze Kegelschnitt imaginär ist. Jede Ebene im Raume enthält daher in Bezug auf die Oberfläche zweiter Ordnung ein bestimmtes ihr zugehöriges Polarsystem und jeder Punkt im Raume ist Mittelpunkt eines bestimmten ihm zugehörigen Polarbündels; beide liegen perspectivisch, wenn Punkt und Ebene Pol und Polarebene sind. Wenn insbesondere die Ebene E die unendlich-entfernte ist, so ist der Pol derselben in Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung der Mittelpunkt der letzteren; das Polarbündel, welches ihm zugehört, als eine Unendlichkeit von Dreikanten aufgefasst, ist das System der conjugirten Durchmesser der Fläche.

2. Der a. a. O. von Herrn *Weierstrass* mitgetheilte erste *Steiner*sche Satz lautet in dem angegebenen Sinne erweitert, folgendermaassen:

Wenn man den Mittelpunkt eines Polarbündels in eine Fläche zweiter Ordnung verlegt, so geht die Verbindungsebene solcher drei Punkte, in welchen jedes Tripel conjugirter Strahlen dieselbe trifft, durch einen festen Punkt, und dies ist die unmittelbare Ausdehnung des bekannten Satzes in der Ebene:

Wenn man den Mittelpunkt eines Strahlsystems in die Peripherie eines Kegelschnitts verlegt, so geht die Verbindungslinie solcher zwei Punkte, in welchen je zwei conjugirte Strahlen des Strahlsystems den Kegelschnitt treffen, durch einen festen Punkt.

Nehmen wir zum Beweise einen beliebigen Strahl a und die conjugirte Ebene A des Polarbündels O und treffe ersterer die Fläche zweiter Ordnung $F^{(2)}$ in $\mathfrak{a}$ und letztere in dem Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$, so werden alle Strahlenpaare b, c in der Ebene A, welche mit a zusammen ein Tripel conjugirter Strahlen des Polarbündels sind, ein Strahlsystem bilden und daher den Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ in Punktenpaaren treffen, deren Verbindungslinien durch einen festen

Punkt α laufen. Die Verbindungsebenen der Durchschnittspunkte von $F^{(2)}$ mit solchen drei Tripelstrahlen, deren einer a fest bleibt, während die beiden anderen b, c in der Ebene A variiren, laufen daher durch eine feste Gerade $\mathfrak{a}\alpha$. Denken wir uns die Tangentialebene T im Punkte O an $F^{(2)}$ und den derselben conjugirten Strahl t im Polarbündel bestimmt, so muss letzterer die Gerade $\mathfrak{a}\alpha$ treffen; denn da die Schnittlinie s von T und A Tangente an $\mathfrak{A}^{(2)}$ ist und der dritte Tripelstrahl σ zu a und s erhalten wird, indem wir eine Ebene durch a, t legen, die A in σ schneidet, so muss die Verbindungslinie der Schnittpunkte des Paares s, σ mit $\mathfrak{A}^{(2)}$ σ selbst sein also durch α gehen, d. h. die durch a und t gelegte Ebene enthält α, also $\mathfrak{a}\alpha$ wird von t getroffen. Dasselbe gilt von allen auf gleiche Weise wie $\mathfrak{a}\alpha$ construirten Geraden. Nehmen wir nun im Polarbündel ein beliebiges zweites Paar b, B, welche in dem Punkt $\mathfrak{b}$ und dem Kegelschnitt $\mathfrak{B}^{(2)}$ der Fläche $F^{(2)}$ begegnen, und sei β der Punkt in der Ebene B, welcher in derselben Weise wie α in A erhalten wird, so müssen nicht nur $\mathfrak{a}\alpha$ und $\mathfrak{b}\beta$ von t getroffen werden, sondern auch sich selbst treffen. Die Ebenen A, B schneiden sich nämlich in einem Strahle c, dessen conjugirte Ebene C die durch a, b gelegte ist; der conjugirte Strahl zur Ebene (a, c) ist die Schnittlinie (A, C) und treffe $F^{(2)}$ in $\mathfrak{a}'$; der conjugirte Strahl zu (b, c) ist die Schnittlinie (B, C) und treffe $F^{(2)}$ in $\mathfrak{b}'$; die Linien $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$, welche in der Ebene C liegen, treffen sich in γ, und $\mathfrak{c}\gamma$ ist offenbar wiederum eine Linie der Art, wie $\mathfrak{a}\alpha$ und $\mathfrak{b}\beta$, muss also auch der Geraden t begegnen. Da nun die drei nach $\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ hingehenden Strahlen ein Tripel conjugirter Strahlen des Polarbündels sind, so muss α auf $\mathfrak{c}\mathfrak{a}'$ liegen, also $\alpha\mathfrak{c}\mathfrak{a}'\mathfrak{a}$ in einer Ebene und da γ auf $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ liegt, $\mathfrak{a}\alpha$ und $\mathfrak{c}\gamma$ in einer Ebene; aus gleichem Grunde auch $\mathfrak{b}\beta$ und $\mathfrak{c}\gamma$ in einer Ebene; wenn nun $\mathfrak{a}\alpha$ und $\mathfrak{b}\beta$ sich nicht träfen, so müsste die feste Gerade t, weil sie alle drei Geraden $\mathfrak{a}\alpha$, $\mathfrak{b}\beta$, $\mathfrak{c}\gamma$ treffen muss, entweder in der durch $\mathfrak{a}\alpha$, $\mathfrak{c}\gamma$ oder in der durch $\mathfrak{b}\beta$, $\mathfrak{c}\gamma$ bestimmten Ebene liegen und durch den Schnittpunkt der jedesmaligen anderen Geraden gehen. Die Paare a, A und b, B sind aber ganz willkührlich gewählt; verändern wir daher das eine, während wir das andere festhalten, so müsste t entweder mit $\mathfrak{a}\alpha$ oder mit $\mathfrak{b}\beta$ zusammenfallen, was widersinnig ist. Es müssen also $\mathfrak{a}\alpha$ und $\mathfrak{b}\beta$ selbst sich treffen und da t im Allgemeinen nicht mit beiden zugleich in derselben Ebene liegen wird, so muss t durch den Schnittpunkt beider hindurchgehen. Verändern wir nun das eine Paar b, B beliebig im Polarbündel, so müssen alle Geraden $\mathfrak{b}\beta$ durch einen festen Punkt, den Schnittpunkt von t mit $\mathfrak{a}\alpha$, gehen, also überhaupt die

Verbindungsebenen der Durchschnittspunkte von $F^{(2)}$ mit je drei Tripelstrahlen des Polarbündels durch einen festen Punkt laufen, w. z. b. w.

3. Wenn in der Ebene ein Büschel von Kegelschnitten $K^{(2)}$, welche durch dieselben vier (reellen oder imaginären) Schnittpunkte von zweien derselben hindurchgehen, gegeben ist, so bestimmt jeder dieser Kegelschnitte ein ebenes Polarsystem (1.) und wenn wir eine Fläche $F^{(2)}$ mit einem auf ihr befindlichen Punkt O beliebig annehmen, so liefert nach dem vorigen Satze (2.) jedes Polarsystem einen gewissen Punkt s im Raume als Durchschnittspunkt solcher Ebenen, welche je drei Schnittpunkte der Fläche $F^{(2)}$ mit drei von O nach den Tripeln des Polarsystems hin gezogenen Strahlen verbinden. Da also zu jedem Kegelschnitte $K^{(2)}$ des Büschels ein bestimmter Punkt s im Raume zugehört, so können wir nach dem Orte der Punkte s für sämmtliche Kegelschnitte des Büschels fragen. Bekanntlich haben alle Kegelschnitte eines Büschels *ein* gemeinschaftliches Tripel (Diagonalpunkte des von den vier Mittelpunkten des Büschels gebildeten vollständigen Vierecks); also wird diejenige Ebene, welche die Durchschnittspunkte von $F^{(2)}$ mit den drei von O nach dem gemeinschaftlichen Tripel gezogenen Strahlen verbindet, alle Punkte s enthalten; um nun einen Punkt s zu erhalten, ist es nur noch nöthig, die Tangentialebene in O an $F^{(2)}$ zu legen, welche die Ebene des Kegelschnittbüschels in einer Geraden $\mathfrak{L}$ schneiden wird, alsdann den Pol von $\mathfrak{L}$ in Bezug auf einen Kegelschnitt des Büschels mit O zu verbinden und den Schnittpunkt s dieser Verbindungslinie mit der vorhin ermittelten Ebene zu fixiren. Die sämmtlichen Pole von $\mathfrak{L}$ in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels liegen aber bekanntlich auf einem bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, der durch das gemeinschaftliche Tripel des Büschels hindurchgeht und der gesuchte Ort der Punkte s ist, daher der Durchschnitt der vorhin ermittelten Ebene mit den von O nach dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ gezogenen Kegelstrahlen, folglich *ein Kegelschnitt*. Dies kommt mit dem zweiten von Herrn *Weierstrass* a. a. O. mitgetheilten Satze überein, denn ein ebenes Polarsystem wird sowohl durch einen Kegelschnitt bestimmt, als auch durch eine beliebige Fläche zweiten Grades, die jenen Kegelschnitt enthält (1.); zu einer solchen Gruppe von Polarsystemen, wie sie zuletzt betrachtet ist, hätten wir anstatt mittelst eines Kegelschnittbüschels auch mittelst eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung gelangen können, welche durch dieselbe Raumcurve vierter Ordnung (Schnittcurve zweier bestimmter Flächen) gehen. Die erstere Auffassung scheint aber bequemer zu sein, weil dabei nur in der Ebene zu operiren ist und wir werden sie daher auch im Fol-

genden festhalten, da die Allgemeingültigkeit des Resultates nicht beeinträchtigt wird, obschon die Betrachtung nur für den Fall der Realität von Theilen der Figur, welche auch imaginär werden können, durchgeführt ist.

4. *Sind drei beliebige Kegelschnitte A, B, C in der Ebene gegeben, so ist der Ort solcher Punkte, deren drei Polaren in Bezug auf jene sich in einem Punkte treffen eine allgemeine Curve dritten Grades, welche durch die gemeinschaftlichen Tripel der paarweise zusammengenommenen Kegelschnitte (A, B) (B, C) (C, A) hindurchgeht und durch diese 9 Punkte vollständig bestimmt wird* *).

Seien $\alpha\alpha'\alpha''$, $\beta\beta'\beta''$, $\gamma\gamma'\gamma''$ die gemeinschaftlichen Tripel der Kegelschnittpaare (B, C), (C, A), (A, B), sei G eine beliebige Gerade, deren Pole in Bezug auf A, B, C respective $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ heissen mögen und bewegen wir auf G einen veränderlichen Punkt P, dessen Polaren in Bezug auf A, B, C respective a, b, c seien, so dreht sich a um $\mathfrak{a}$, b um $\mathfrak{b}$, c um $\mathfrak{c}$ und a, b, c beschreiben drei mit der von P durchlaufenen Punktreihe projectivische Strahlbüschel; der Ort des Schnittpunktes (b, c) ist daher ein Kegelschnitt, welcher durch $\alpha\alpha'\alpha''\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, der Ort des Schnittpunktes (c, a) ein zweiter Kegelschnitt, welcher durch $\beta\beta'\beta''\mathfrak{c}\mathfrak{a}$ geht; beide Kegelschnitte haben den Punkt $\mathfrak{c}$ mithin noch drei andere Punkte $QQ'Q''$ gemein, welche die verlangte Eigenschaft besitzen, dass für drei gewisse Punkte $PP'P''$ der Geraden G die drei Polaren in Bezug auf die gegebenen Kegelschnitte sich in je einem der Punkte Q, Q', Q'' treffen. Ein solches Paar P, Q heissen *conjugirte Punkte,* weil auch die Polaren von Q in Bezug auf die drei gegebenen Kegelschnitte durch P laufen. Die conjugirten Punkte $PP'P''$ sind auf der Geraden G leicht zu bestimmen, sobald man $QQ'Q''$ gefunden hat. Sobald nämlich P, Q ein Paar conjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt A sind (d. h. zwei solche Punkte, dass die Polare von P durch Q und also auch durch die Polare von Q durch P geht) und $P'Q'$ ein zweites Paar conjugirter Punkte in Bezug auf denselben Kegelschnitt, so ist leicht zu erweisen, dass die beiden Schnittpunkte der Verbindungslinien (PP', QQ') und (PQ', QP') nothwendig ein drittes Paar conjugirter Punkte in Bezug auf denselben Kegelschnitt sein müssen. Da nun diese Eigenschaft für unsere Punkte P, Q und $P'Q'$ in Bezug auf alle drei Kegelschnitte A, B, C stattfindet, so gilt sie auch für das dritte Paar.

---

*) Dieser Satz ist von Herrn *Hesse* im XXVIII. Bande dieses Journals Seite 105 angegeben und analytisch bewiesen.

Es giebt aber auf der Geraden PP' oder G nur einen einzigen dritten Punkt P'', dessen drei Polaren sich in demselben Punkte Q'' treffen, folglich muss P'' der Schnittpunkt sein, in welchem QQ' die Gerade G trifft und Q'' der Schnittpunkt von PQ' und QP' d. h. P, P', P'' sind diejenigen drei Punkte, in welchen die Seiten des Dreiecks $QQ'Q''$ der Geraden G begegnen und zwar liegen $QQ'P''$, $Q'Q''P$, $Q''QP'$ in je einer Geraden oder die sechs Punkte $PP'P''QQ'Q''$ sind die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits.

Da auf der beliebigen Geraden G nur drei Punkte der verlangten Eigenschaft existiren, so ist der Ort sämmtlicher Punkte P, Q eine Curve dritten Grades, welche sich auch in folgender Weise construiren lässt: denken wir uns die Gerade G um einen beliebigen festen Punkt O gedreht, so verändern sich mit ihr die Punkte $QQ'Q''$; von den beiden Kegelschnitten, deren jedesmalige Schnittpunkte sie sind, geht der erste durch die drei festen Punkte $\alpha\alpha'\alpha''$, während die beiden Punkte $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ auf den Polaren von O in Bezug auf B und C zwei gerade Punktreihen durchlaufen; da der Schnittpunkt α_0 dieser beiden Polaren nothwendig auch auf dem Kegelschnitte liegt, so beschreibt dieser bei seiner Veränderung ein Kegelschnittbüschel von vier festen Punkten $\alpha\alpha'\alpha''\alpha_0$; ebenso beschreibt der zweite Kegelschnitt ein Büschel von vier Punkten $\beta\beta'\beta''\beta_0$, wenn β_0 den Schnittpunkt der Polaren von O in Bezug auf die Kegelschnitte C und A bezeichnet; der veränderliche Punkt $\mathfrak{c}$, den beide Kegelschnitte gemein haben, liegt auf der festen Verbindungslinie $\alpha_0\beta_0$ der Polare von O in Bezug auf C. Hieraus folgt, dass die beiden Büschel projectivisch sind, also der Ort ihrer drei anderen jedesmaligen Schnittpunkte $QQ'Q''$ eine allgemeine Curve dritten Grades ist, welche durch $\alpha\alpha'\alpha''\beta\beta'\beta''$, aber nicht durch $\alpha_0\beta_0$ geht. Die Punkte $\gamma\gamma'\gamma''$ des gemeinschaftlichen Tripels von A und B liegen auch auf dieser Curve dritten Grades, denn die Polaren von γ in Bezug auf A und B fallen zusammen in die Linie $\gamma'\gamma''$, folglich schneiden sich alle drei Polaren von γ in Bezug auf A, B, C in einem Punkte. Durch die neun Punkte $\alpha\alpha'\alpha''\beta\beta'\beta''\gamma\gamma'\gamma''$ ist die Curve dritten Grades vollständig bestimmt d. h. es können keine zwei Curven dritten Grades durch dieselben gehen; sonst müsste nämlich ein ganzes Büschel Curven dritten Grades hindurchgehen und da $\alpha\alpha'\alpha''\beta\beta'\beta''$ sechs Punkte eines Kegelschnitts sind, weil zwei Tripel desselben Kegelschnitts C immer auf einem Kegelschnitt liegen, so müssten $\gamma\gamma'\gamma''$ auf einer Geraden liegen; dies ist aber unmöglich, weil drei Tripelpunkte im Allgemeinen nicht in einer Geraden liegen; also kann nur eine Curve dritten Grades durch jene neun Punkte gehen.

Aus dem Vorigen folgt zugleich, dass ein dritter durch die Punkte $\gamma\gamma'\gamma''ab$ gelegter Kegelschnitt die Punkte $QQ'Q''$ enthalten muss; und da dieser Kegelschnitt auch als der Ort der Pole der Geraden G in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte des durch A und B bestimmten Büschels angesehen werden kann, so folgt ein Satz, von dem wir später Gebrauch machen:

Drei beliebige Kegelschnitte A, B, C bestimmen drei Büschel (B, C), (C, A), (A, B); *die Pole einer Geraden G in Bezug auf alle Kegelschnitte eines Büschels liegen auf einem Kegelschnitt; die auf diese Weise für die drei Büschel erhaltenen Kegelschnitte laufen durch dieselben drei Punkte.*

5. Die drei Kegelschnitte A, B, C geben zu zweien combinirt drei Kegelschnittbüscheln (B, C), (C, A), (A, B) ihre Entstehung; die vorhin ermittelten Punkte $QQ'Q''$ als die conjugirten zu gewissen drei auf einer gegebenen Geraden G liegenden $PP'P''$ stehen noch in folgender merkwürdigen Beziehung zu den Büscheln. Die Polaren von Q in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels (B, C) gehen durch P, folglich wird die Gerade $PQ'Q''$ die Polare von Q in Bezug auf einen besondern Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ des Büschels (B, C) sein und ebenfalls in Bezug auf einen besondern Kegelschnitt $\mathfrak{B}$ des Büschels (C, A) und einen besondern $\mathfrak{C}$ des Büschels (A, B). Die Kegelschnitte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ sind vollständig und eindeutig durch diese Bedingung bestimmt. Für die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ muss daher Q ein Punkt des gemeinsamen Tripels sein und $Q'Q''$ seine Polare; die Polare von Q' in Bezug auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ muss daher durch Q gehen, zugleich aber auch durch P', den conjugirten Punkt zu Q' in Bezug auf alle drei Kegelschnitte A, B, C also auch in Bezug auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$; da nun $P'QQ''$ in einer Geraden liegen, so ist QQ'' die Polare von Q' für beide Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, folglich $QQ'Q''$ das gemeinsame Tripel der Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und in gleicher Weise der Kegelschnitte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$; diese drei neuen Kegelschnitte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ müssen daher demselben Büschel angehören, weil zwei Kegelschnitte immer nur ein gemeinschaftliches Tripel haben können. Da nun umgekehrt leicht einzusehen ist, dass zwei beliebige den Büscheln (B, C) und (C, A) entnommene Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ein gemeinsames Tripel $QQ'Q''$ haben, welches auf der in (4.) ermittelten Curve dritten Grades liegen muss, so folgt zunächst ein Satz, von welchem später Gebrauch gemacht wird:

Sind B, C, $\mathfrak{A}$ drei Kegelschnitte eines Büschels und C, A, $\mathfrak{B}$ drei Kegelschnitte eines zweiten Büschels, welches den Kegelschnitt C mit dem vorigen gemein hat, so giebt es einen Kegelschnitt $\mathfrak{C}$, der sowohl in dem durch

A und B bestimmten Büschel, als auch in dem durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bestimmten Büschel liegt, d. h. die acht Mittelpunkte der Büschel (A, B) *und* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *liegen auf einem Kegelschnitt* $\mathfrak{C}$, und weiter, da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei willkührlich aus den drei Büscheln (B, C), (C, A), (A, B) entnommene Kegelschnitte bedeuten, deren gemeinschaftliches Tripel $QQ'Q''$ ist, dass der Ort dieser unendlichen Mannigfaltigkeit von Tripeln ein und dieselbe Curve dritten Grades ist, welche bereits (4.) als der Ort der in Bezug auf die drei Kegelschnitte A, B, C gleichzeitig conjugirten Punktpaare P, Q gefunden wurde. Diese Curve heisse daher kurzweg *Tripelcurve* und solche drei Punkte, wie $QQ'Q''$ ein *Tripel der Tripelcurve*. Also:

Ein Tripel $QQ'Q''$ der Tripelcurve liegt immer so auf derselben, dass die drei ihnen conjugirten Punkte $PP'P''$ auf einer Geraden sich befinden und die jedesmaligen dritten Schnittpunkte der Dreiecksseiten des Tripels $QQ'Q''$ mit der Tripelcurve sind *)

und auch umgekehrt. Die sechs Punkte $PP'P''QQ'Q''$ bilden daher zu dreien vier Tripel der Tripelcurve und liegen zu dreien auf vier Geraden:

$QQ'Q''$	ein Tripel	$PP'P''$	auf	einer	Geraden
$QP'P''$	- -	$PQ'Q''$	-	-	-
$Q'P''P$	- -	$P'Q''Q$	-	-	-
$Q''PP'$	- -	$P''QQ'$	-	-	-

6. Die drei Kegelschnitte A, B, C geben nicht nur drei Büscheln (B, C) (C, A) (A, B) ihre Entstehung sondern unendlich vielen, indem irgend drei aus letzteren herausgenommene Kegelschnitte wiederum drei Büschel bestimmen u. s. f. Die Totalität der allen diesen Büscheln angehörenden Kegelschnitte heisst ein *Kegelschnittnetz:* um dieselben anschaulicher zu übersehen, denken wir uns aus dem Büschel (B, C) einen veränderlichen Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ entnommen, denselben mit A zur Bildung eines neuen Büschels $(A, \mathfrak{A})$ zusammengestellt und dann die Kegelschnitte des Büschels $(A, \mathfrak{A})$ aufgefasst; indem wir $\mathfrak{A}$ sich verändern lassen, erhalten wir unendlich viele Büschel also eine Schaar-Schaar von Kegelschnitten, welches die sämmtlichen Kegelschnitte des Netzes sind. Selbstverständlich gehören dem Netze auch ABC an und es lässt sich zeigen, dass wenn wir drei beliebige andere Kegelschnitte des Netzes, die nicht demselben Büschel angehören, in der eben angegebenen

---

*) Vergl. *Steiner:* Sätze über Curven zweiter und dritter Ordnung in diesem Journal Bd. XXXII, Seite 300 ff.

Weise zur Bildung des Netzes verwenden, keine neuen Kegelschnitte mehr hervorgehen, sondern nur die früheren, aber *in anderer Anordnung* zu Büscheln vereinigt. Nehmen wir zunächst einen beliebigen Kegelschnitt $\mathfrak{B}$ aus dem Büschel (C, A) und bilden das veränderliche Büschel $(B, \mathfrak{B})$, so muss, weil B, C, $\mathfrak{A}$ einem Büschel und C, A, $\mathfrak{B}$ einem zweiten Büschel angehören, welches mit dem ersten den Kegelschnitt C gemein hat, nach dem vorhin (5.) bewiesenen Satze ein Kegelschnitt existiren, der den Büscheln $(A, \mathfrak{A})$ und $(B, \mathfrak{B})$ gemeinschaftlich ist. Verändern wir nun $\mathfrak{A}$, so giebt es in jedem Büschel $(A, \mathfrak{A})$ einen Kegelschnitt, der bei beliebig gewählten $\mathfrak{B}$ dem Büschel $(B, \mathfrak{B})$ angehört und umgekehrt verändern wir $\mathfrak{B}$, so giebt es in jedem Büschel $(B. \mathfrak{B})$ einen Kegelschnitt, der bei beliebig gewähltem $\mathfrak{A}$ dem Büschel $(A, \mathfrak{A})$ angehört; also jeder Kegelschnitt aus dem veränderlichen Büschel $(A, \mathfrak{A})$ ist gleichzeitig in den aus dem veränderlichen Büschel $(B, \mathfrak{B})$ hervorgehenden Kegelschnitten enthalten und umgekehrt, also die Schaar-Schaar von Kegelschnitten ist dieselbe, ob wir (B, C) und A, oder (C, A) und B, oder (A, B) und C zur Bildung des Netzes verwenden. Nehmen wir zweitens irgend einen Kegelschnitt D, der einem bestimmten Büschel $(A, \mathfrak{A}_0)$ der unendlich vielen Büschel $(A, \mathfrak{A})$ angehört, heraus, so liegen einmal D, A, $\mathfrak{A}_0$ in einem Büschel. zweitens auch B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_0$ in einem Büschel (B, C), also haben nach dem obigen Satze $(A, \mathfrak{A})$ und (B, D) einen Kegelschnitt gemein d. h. alle Büschel $(A, \mathfrak{A})$ können auch bestimmt werden durch Kegelschnitte aus dem Büschel (B, D) und umgekehrt, d. h. (B, C) und A, oder (B, D) und A zur Bildung des Netzes verwendet liefern dieselbe Schaar-Schaar von Kegelschnitten. Hieraus ergiebt sich, dass ebenso wie $(A. B)$ und C auch (A, B) und D dieselbe Schaar-Schaar liefert und folglich auch (B, D) und A, oder (B, D) und E, oder (D, E) und B, oder (D, E) und F, wenn D, E, F drei beliebige Kegelschnitte des Netzes sind, die nicht demselben Büschel angehören, w. z. b. w. *)

7. Sind P, Q gleichzeitig conjugirte Punkte in Bezug auf jeden der drei ursprünglichen Kegelschnitte A, B, C, so dass also für jeden die Polare von P durch Q geht und umgekehrt, dann ist es ersichtlich, dass sie in Bezug auf alle Kegelschnitte des Netzes conjugirte Punkte sein werden. Die Tripelcurve ist also immer dieselbe, welche drei Kegelschnitte des Netzes

*) Die Schaar-Schaar Kegelschnitte eines Netzes werden analytisch durch die Gleichung $f+\lambda\varphi+\mu\psi=0$ repräsentirt, wo $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$ die Gleichungen dreier beliebiger Kegelschnitte und λ, μ zwei willkührliche Constanten bedeuten.

man auch zur Bildung desselben wähle; sie enthält mithin sämmtliche gemeinschaftlichen Tripel irgend zweier Kegelschnitte des Netzes und da sich die letzteren in unendlich mannichfacher Weise zu Büscheln zusammenfassen lassen, so giebt es auch eine unendliche Mannichfaltigkeit von Tripeln der Tripelcurve. Irgend zwei Punkte Q und Q', willkührlich auf der Tripelcurve gewählt, können als zwei Punkte des gemeinschaftlichen Tripels eines bestimmten Büschels des Netzes aufgefasst werden und es giebt dann nur ein einziges Büschel, welches zu seinem gemeinschaftlichen Tripel dieses willkührlich gewählte Tripel der Tripelcurve hat; man erhält den dritten zugehörigen Tripelpunkt Q'', indem man zu Q und Q' respective die conjugirten Punkte P und P' auf der Tripelcurve aufsucht und den Schnittpunkt von PQ' und QP' bestimmt, welcher Q'' ist. Das diesem Tripel $QQ'Q''$ zugehörige Büschel des Netzes erhält man, indem man denjenigen Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ des Büschels (B, C) aufsucht, für welchen Q und PQ' Pol und Polare sind und ebenso denjenigen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{B}$ des Büschels (C, A) für welchen dasselbe stattfindet; die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bestimmen das gesuchte Büschel, wie aus 5. folgt. Nimmt man nur einen Punkt Q willkührlich auf der Tripelcurve, so giebt es unendlich viele Tripel derselben, welche den Punkt Q enthalten; die Verbindungslinie der jedesmaligen beiden anderen Tripelpunkte läuft durch einen festen Punkt P der Tripelcurve, den conjugirten zu Q.

Fassen wir zwei beliebige Tripel $QQ'Q''$ und $Q_1Q_1'Q_1''$ der Tripelcurve auf, so lassen sich nach dem Vorigen die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ respective aus den Büscheln (B, C) und (C, A) ermitteln, für welche $QQ'Q''$ das gemeinschaftliche Tripel ist und gleichfalls aus denselben beiden Büscheln die Kegelschnitte $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$, deren gemeinschaftliches Tripel $Q_1Q_1'Q_1''$ ist; da nun C, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ einem Büschel (B, C) und C, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ einem Büschel (C, A) angehören, und der Kegelschnitt C beiden Büscheln gemeinschaftlich ist, so müssen nach dem obigen Satze (5.) die Büschel $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1)$ einen Kegelschnitt gemein haben. Hieraus folgt:

Zwei beliebige Büschel des Netzes haben immer einen und nur einen Kegelschnitt gemein.

Da in Bezug auf diesen gemeinschaftlichen Kegelschnitt sowohl $QQ'Q''$ als auch $Q_1Q_1'Q_1''$ ein Tripel ist und zwei Tripel eines Kegelschnitts bekanntlich immer selbst auf einem Kegelschnitte liegen, so folgt:

Irgend zwei Tripel der Tripelcurve liegen immer auf einem Kegelschnitt.

Aber auch umgekehrt wird ein durch die drei Punkte eines Tripels der Tripelcurve willkührlich gelegter Kegelschnitt dieselbe in drei neuen Punkten treffen, von denen nach dem Vorigen zwei als Tripelpunkte eines bestimmten andern Tripels angesehen werden dürfen; der dritte zugehörige Tripelpunkt muss aber sowohl auf dem Kegelschnitt nach dem letzten Satze, als auch auf der Tripelcurve liegen, mithin der sechste Schnittpunkt sein; daher:

Ein beliebiger durch ein Tripel der Tripelcurve gelegter Kegelschnitt trifft dieselbe in drei neuen Punkten, welche wieder ein Tripel der Tripelcurve bilden.

Die Totalität sämmtlicher Tripel der Tripelcurve lässt sich hiernach leicht umfassen durch die Schaar-Schaar von Kegelschnitten, welche durch drei feste Punkte irgend eines Tripels hindurchgehen, und da zu jedem Tripel der Tripelcurve nur ein einziges Büschel des Netzes gehört, so haben wir auch eine Schaar-Schaar von Büscheln des Netzes. In diesen vertheilen sich aber die Kegelschnitte des Netzes, indem sie sich in verschiedenen Büscheln immer wieder reproduciren, derart, dass sie auch nur eine Schaar-Schaar bilden.

Nennen wir den Ort der Pole einer Geraden in Bezug auf alle Kegelschnitte eines Büschels den Polarkegelschnitt der Geraden, so sagt der am Schlusse von (4.) bewiesene Satz aus, dass die drei Polarkegelschnitte einer Geraden in Bezug auf die drei Büschel (B, C), (C, A), (A, B) sich in denselben drei Punkten treffen und lässt sich jetzt dahin verallgemeinern, dass *die Polarkegelschnitte derselben Geraden in Bezug auf sämmtliche Büschel eines Netzes durch drei feste Punkte gehen, welche ein Tripel der Tripelcurve bilden und die conjugirten Punkte zu den drei Schnittpunkten der Geraden mit der Tripelcurve sind.*

Denn nehmen wir aus den Büscheln (B, C) und (C, A) zwei beliebige Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heraus, so bestimmen $(C, \mathfrak{A})$ dasselbe Büschel wie (B, C) und $(C, \mathfrak{B})$ dasselbe wie (C, A), folglich muss der Polarkegelschnitt der Geraden für das neue Büschel $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ durch die vorigen drei festen Punkte gehen w. z. b. w.*).

8. Wir kehren jetzt zu der in (4.) abgebrochenen Betrachtung zurück. Nehmen wir auf einer beliebigen Fläche zweiter Ordnung $F^{(2)}$ einen festen

*) Die Eigenschaften der Tripelcurve sind von Hrn. *Hesse* auf analytischem Wege abgeleitet worden. Vergl. den Aufsatz: Ueber Curven dritten Grades etc. in diesem Journal Bd. XXXVI, p. 143 etc.

Punkt O und denken uns in einer Ebene E ein Kegelschnittnetz mit seiner Schaar-Schaar von Kegelschnitten gegeben, so wird jeder Kegelschnitt desselben in der Ebene E ein Polarsystem bestimmen, welches mit O verbunden ein Polarbündel giebt, und nach dem Satze (2.) liefert ein solches einen bestimmten Punkt s im Raume. Wir fragen nach dem Ort derjenigen Punkte s, welche sämmtlichen Kegelschnitten des Netzes entsprechen. Nach dem früheren Satze (3.) liegen solche Punkte s, welche den Kegelschnitten eines Büschels entsprechen, selbst auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ und da die Kegelschnitte des Netzes sich in doppelt unendlicher Weise zu Büscheln zusammenfassen lassen (7.), so bilden die Punkte s des gesuchten Ortes doppelt unendlich viele Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, die in gewisser Weise im Raume vertheilt sind. Um einen solchen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ zu erhalten, haben wir nach (3.) nur nöthig, die Tangentialebene an $F^{(2)}$ in O zu construiren, welche die Ebene E in der Geraden t schneide; dann wird der Polarkegelschnitt von t in Bezug auf ein Büschel des Netzes mit O verbunden einen Kegel liefern, welcher die Verbindungsebene der drei Schnittpunkte der $F^{(2)}$ mit den von O nach dem gemeinschaftlichen Tripel des Büschels hingehenden drei Strahlen in dem gesuchten Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ schneidet. Da nun nach (7.) die Polarkegelschnitte der Geraden t in Bezug auf alle Büschel des Netzes durch drei feste Punkte $Q_0 Q'_0 Q''_0$ gehen, so müssen alle Kegel, welche O mit diesen Polarkegelschnitten verbinden, durch drei feste Strahlen OQ_0, OQ'_0, OQ''_0 gehen, welche $g g' g''$ heissen mögen, und da jeder Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ des gesuchten Ortes auf einem solchen Kegel liegen muss, *so treffen alle Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ dieselben drei festen Geraden $g g' g''$, welche in O zusammenlaufen.*

Diese drei Geraden erscheinen selbst doppelt gezählt als drei specielle Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ des gesuchten Ortes (zusammenfallende Linienpaare), denn seien $P_0 P'_0 P''_0$ diejenigen drei Punkte, in welchen t der Tripelcurve des Netzes begegnet, so sind sie nach (5.) die conjugirten Punkte der Tripelcurve zu $Q_0 Q'_0 Q''_0$ und es bilden diese sechs Punkte vier Tripel der Tripelcurve:

$$Q_0 Q'_0 Q''_0, \quad Q_0 P'_0 P''_0, \quad Q'_0 P''_0 P_0, \quad Q''_0 P_0 P'_0.$$

Nehmen wir das Tripel $Q_0 P'_0 P''_0$ verbinden es mit O und suchen die drei Schnittpunkte dieser Strahlen mit $F^{(2)}$ auf, so fallen zwei derselben in O hinein, weil $OP'P''$ Tangentialebene an $F^{(2)}$ ist, der dritte aber ist der Schnittpunkt von OQ_0 oder g mit $F^{(2)}$; die Verbindungsebene dieser drei Schnittpunkte wird also unbestimmt, muss aber durch g gehen. Der Polarkegelschnitt der Geraden t in Bezug auf das Büschel, dessen gemeinschaftliches Tripel $Q_0 P'_0 P''_0$

ist, zerfällt in ein Linienpaar $Q_0P'_0$ und $Q_0P''_0$, welches mit O verbunden ein Ebenenpaar giebt; dieses Ebenenpaar geht selbst durch die Gerade g, hat also mit der vorhin aufgesuchten Ebene die Gerade g doppelt gemein und diese ist daher als ein zusammenfallendes Linienpaar anzusehen, welches einen speciellen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ bildet, den Ort solcher Punkte s, welche allen Kegelschnitten des Büschels entsprechen, dessen gemeinschaftliches Tripel $Q_0P'_0P''_0$ ist. Ebenso liefern die Kegelschnitte der beiden anderen Büschel, welche $Q'_0P''_0P_0$ und $Q''_0P_0P'_0$ zu gemeinschaftlichen Tripeln haben, als Ort der ihnen entsprechenden Punkte s die doppelt zu nehmenden Geraden g' und g''.

Die Ebene eines Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ enthält immer noch einen zweiten Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$, der ebenfalls dem gesuchten Orte angehört; denn die drei von O nach irgend einem Tripel der Tripelcurve gezogenen Strahlen treffen $F^{(2)}$ in drei Punkten, deren Verbindungsebene $\mathfrak{E}$ den drei festen Strahlen $gg'g''$ in drei solchen Punkten begegnet, dass diese sechs Punkte auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ liegen, die Ebene $\mathfrak{E}$ schneidet aber $F^{(2)}$ in einem Kegelschnitt K, und der von O durch K gelegte Kegel trifft die Tripelcurve ausser in den ersten drei Tripelpunkten noch in drei neuen Punkten, welche (7.) ein zweites Tripel der Tripelcurve sind; die Strahlen von O nach den letzteren gezogen treffen die Fläche $F^{(2)}$ in drei Punkten, welche auf K liegen, deren Verbindungsebene also dieselbe Ebene $\mathfrak{E}$ ist und diese Punkte müssen mit den vorigen Schnittpunkten von $\mathfrak{E}$ und den Strahlen $gg'g''$ in einem zweiten Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$ liegen, der offenbar zum gesuchten Orte gehört. Die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, welche in derselben Ebene liegen, schneiden sich ausser in den drei auf $gg'g''$ befindlichen Punkten noch in einem vierten Punkte; dieser entspricht dem einzigen Kegelschnitt, welcher beiden Büscheln des Netzes gemeinschaftlich ist (7.), die $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ liefern.

Es ist ferner ersichtlich, dass alle Punkte, in welchen der von O durch die Tripelcurve gelegte Kegel dritten Grades der $F^{(2)}$ begegnet, die also auf einer Raumcurve sechsten Grades liegen, dem gesuchten Orte angehören müssen, weil die Tripelcurve der Ort der gemeinschaftlichen Tripel für alle Büschel des Netzes ist. Die Punkte $Q_0Q'_0Q''_0$ bilden ein besonderes Tripel, dessen zugehöriges Büschel einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_0$ liefert, der durch diejenigen Punkte geht, in welchen $gg'g''$ die $F^{(2)}$ treffen. Die Ebene dieses Kegelschnittes schneidet $F^{(2)}$ in einem Kegelschnitte K_0 und der von O durch K_0 gelegte Kegel trifft die Tripelcurve in drei neuen Punkten, die auch ein Tripel der Tripelcurve sind. Das diesem Tripel zugehörige Büschel des Netzes

liefert aber einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_0'$, der offenbar mit K_0 zusammenfällt; folglich *enthält der gesammte Ort der Punkte s 1) in doppelt unendlichvielen Ebenen Kegelschnittpaare* $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ *2) drei bestimmte doppelt zu nehmende Gerade $gg'g''$, welche in einem Punkte O zusammenlaufen und auf denen sich je zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ treffen 3) auf der Fläche $F^{(2)}$ eine bestimmte Raumcurve sechsten Grades, die Durchschnittscurve mit demjenigen Kegel dritten Grades, welcher O mit der Tripelcurve des Netzes verbindet, und noch einen besonderen Kegelschnitt K_0, welchen die Ebene ausschneidet, die durch die drei Schnittpunkte der Doppelpunktlinien $gg'g''$ mit $F^{(2)}$ gelegt wird.*

9. Da sich die Schaar-Schaar sämmtlicher Kegelschnitte des Netzes in der Weise (6.) zusammenfassen lässt, dass wir von drei beliebigen Kegelschnitten A, B, C, die nicht demselben Büschel angehören, ausgehen, einen veränderlichen Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ des Büschels (B, C) mit A zu einem Büschel $(A, \mathfrak{A})$ zusammenstellen und dann die Kegelschnitte sämmtlicher Büschel $(A, \mathfrak{A})$ als die Schaar-Schaar Kegelschnitte des Netzes erhalten, so wird auch der ganze Ort der Punkte s als eine continuirliche Reihe von Kegelschnitten $\mathfrak{K}$ im Raume angesehen werden können, die den Büscheln $(A, \mathfrak{A})$ entsprechen. Diese $\mathfrak{K}$ gehen sämmtlich durch einen Punkt s_a, der dem Kegelschnitte A entspricht, und durch eine Reihe von Punkten $s_{\mathfrak{a}}$, die auf einem bestimmten Kegelschnitte $\mathfrak{K}_{(B,C)}$ liegen, dessen Punkte den sämmtlichen Kegelschnitten $\mathfrak{A}$ des Büschels (B, C) entsprechen. Die Ebenen der $\mathfrak{K}$ umhüllen also einen gewissen Kegel, den wir ermitteln wollen; jede solche Ebene enthält unmittelbar nur einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ des Ortes, aber die Kegelschnitte der andern Ebenen begegnen ihr in Punktenpaaren, die ebenfalls zum Orte gehören. Da wir von jedem dieser Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ vorerst nur zwei Punkte s_a und $s_{\mathfrak{a}}$ kennen, so müssen wir zur Bestimmung seiner Ebene noch einen dritten Punkt zu ermitteln suchen; dies gelingt in folgender Weise: Denken wir uns aus dem Büschel (C, A) des Netzes einen beliebigen Kegelschnitt $\mathfrak{B}$ gewählt, so muss nach dem oben bewiesenen Satze (5.), weil C, B, $\mathfrak{A}$ einem Büschel und C, A, $\mathfrak{B}$ einem zweiten Büschel angehören, welches mit dem ersten den Kegelschnitt C gemein hat, den beiden Büscheln $(A, \mathfrak{A})$ und $(B, \mathfrak{B})$ ein einziger bestimmter Kegelschnitt gemeinschaftlich sein, welcher $\mathfrak{A}'$ heisse. Es verändert sich mit $\mathfrak{A}$ auch $\mathfrak{A}'$, während beide respective den Büscheln (B, C) und $(B, \mathfrak{B})$ angehören und zwei zusammengehörige $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ schneiden sich in je vier Punkten auf dem Kegelschnitte A. Fällt insbesondere $\mathfrak{A}$ mit B zusammen, so fällt auch $\mathfrak{A}'$ mit B zusammen. Wir haben mithin die Kegelschnitte $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ zweier

Büschel (B, C) und $(B, \mathfrak{B})$ so auf einander bezogen, dass zwei entsprechende in dem gemeinschaftlichen Kegelschnitte B zusammenfallen und alle übrigen Paare entsprechender Kegelschnitte sich in je vier Punkten eines festen Kegelschnitts A schneiden; hieraus folgt (als specieller Fall des Erzeugnisses zweier projectivischen Kegelschnittbüschel, welches eine Curve vierten Grades ist, die hier in zwei Kegelschnitte zerfällt), dass die beiden Büschel, welche $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ durchlaufen, in projectivischer Beziehung stehen, dass also auch die beiden von den Punkten s_a und s_a durchlaufenen krummen Punktreihen auf den Kegelschnitten $\mathfrak{K}_{(B,C)}$ und $\mathfrak{K}_{(B,\mathfrak{B})}$, die jenen Büscheln hinsichtlich $F^{(2)}$ zugehören, projectivisch sein und einen Punkt s_b gemeinschaftlich haben müssen, in welchem gleichzeitig zwei entsprechende Punkte der krummen Punktreihen zusammenfallen. Hieraus ergiebt sich, dass die durch den unveränderlichen Punkt s_a und je zwei entsprechende Punkte s_a und $s_{a'}$ gelegte Ebene einen *Kegel dritter Classe mit einer Doppeltangentialebene* also nur vierten Grades umhüllen wird*). Der Ort der Ebenen aller in obiger Weise gruppirten Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ ist daher dieser Kegel dritter Klasse mit einer Doppeltangentialebene; die letztere enthält zwei von den betrachteten Kegelschnitten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, jede andere Tangentialebene nur einen. Denken wir uns nun durch den Punkt s_a, an dessen Stelle jeder andere Punkt des gesuchten Ortes treten kann, eine beliebige Gerade G gezogen, so gehen durch dieselbe im Allgemeinen drei Tangentialebenen des so eben ermittelten Kegels und jede derselben enthält einen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, der durch s_a geht; folglich enthält die Gerade G von dem gesammten Ort der Punkte s höchstens vier, den Punkt s_a und die drei anderen Schnittpunkte der drei durch s_a gehenden soeben ermittelten Kegelschnitte. Da aber s_a ganz willkührlich gewählt ist, so schliessen wir, dass jede beliebige Gerade im Allgemeinen vier Punkte s des gesuchten Ortes enthält, dass also *der Ort sämmtlicher Punkte s eine Fläche vierten Grades* bildet. Die Punktenpaare, in welchen die Ebene eines bestimmten Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ von allen übrigen Kegelschnitten $\mathfrak{K}$ getroffen wird, müssen daher einen zweiten Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$ bilden, wie wir dies schon früher erkannt haben. Eine solche Ebene, welche die Fläche vierten Grades in zwei Kegelschnitten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ schneidet, ist als Tangentialebene derselben anzusehen; von den vier Schnittpunkten der Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ sind nämlich drei die auf den Doppelkanten $gg'g''$ der Fläche

*) Siehe dieses Journal Bd. 54, Seite 31 ff.

liegenden wirklichen Doppelpunkte (8.), der vierte muss aber Berührungspunkt der Ebene mit der Fläche sein, weil von ihm aus nach zwei verschiedenen Richtungen zwei unendlich nahe Punkte der Fläche (auf $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$) zugleich in der Ebene liegen; da die durch den ganz willkührlichen Punkt s_a der Fläche vierten Grades gehende Doppeltangentialebene des vorhin ermittelten Kegels dritter Klasse zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ enthält, die durch s_a gehen, so ist sie Berührungsebene der *Steiner*schen Fläche in diesem Punkte und wir können schliessen, dass jede Berührungsebene der *Steiner*schen Fläche dieselbe in einem Kegelschnittpaar schneidet. Hieraus lässt sich auch ermitteln, von der wievielsten Classe die *Steiner*sche Fläche vierten Grades ist; denn treffe sie eine beliebige Gerade G in den vier Punkten $\alpha\beta\gamma\delta$, so gehen nach dem Vorigen durch den Punkt α und die Gerade G im Allgemeinen drei Ebenen $E_1 E_2 E_3$, welche drei Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ enthalten; diese müssen in den Punkten $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$ die Gerade G treffen; jede der Ebenen enthält aber noch einen zweiten Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$ und diese müssen, weil es nur vier Punkte s auf der Geraden G giebt, respective durch $\gamma\delta$, $\beta\delta$, $\beta\gamma$ gehen; die drei Kegelschnittpaare in den Ebenen $E_1 E_2 E_3$ schneiden also die Gerade G in folgender Weise:

das Kegelschnittpaar in E_1 trifft G in den Punktenpaaren $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$
- - - E_2 - - - - - $\alpha\gamma$ - $\beta\delta$
- - - E_3 - - - - - $\alpha\delta$ - $\beta\gamma$.

Durch den Punkt β und die Gerade G giebt es nun auch nur drei Ebenen, welche drei Kegelschnittpaare enthalten, die in den Punkten $\beta\gamma$ und $\delta\alpha$, $\beta\delta$ und $\alpha\gamma$, $\beta\alpha$ und $\gamma\delta$ der Geraden G begegnen müssen; da aber die vorigen Ebenen diese Eigenschaft besitzen, so sind sie mit den neuen identisch; es giebt daher durch eine beliebige Gerade G im Allgemeinen nur drei Ebenen, welche Kegelschnittpaare aus der *Steiner*schen Fläche ausschneiden, also dieselbe berühren; die *Steiner*sche Fläche vierten Grades ist also nur *dritter Classe*. Hieraus folgt auch, dass es durch einen beliebigen Punkt im Raume unendlich viele Ebenen giebt, welche Kegelschnittpaare aus der *Steiner*schen Fläche ausschneiden und dass dieselben einen Kegel dritter Classe also im Allgemeinen sechsten Grades umhüllen; dieser ist aber nur vom vierten Grade, weil er eine Doppeltangentialebene enthält, sobald der angenommene Punkt auf der Fläche selbst liegt, und er degenerirt in einen Kegel zweiter Classe, also auch zweiten Grades, sobald der Punkt auf einer der drei Doppellinien $gg'g''$ liegt; was denn auch mit den von Herrn *Kummer* a. a. O. mitgetheilten Resultaten übereinkommt.

Ueber die Elimination aus zwei Gleichungen dritten Grades.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

Es seien $u=0$, $v=0$ zwei homogene Gleichungen dritten Grades mit den Variabeln x_1, x_2. Das Resultat der Elimination von x_1, x_2 aus beiden Gleichungen lässt sich dann in folgender bemerkenswerthen Weise darstellen. Sei immer, wenn f eine homogene Function n^{ter} Ordnung ist:

$$f_{ikh\dots} = \frac{1}{n.n-1.n-2\dots}\cdot\frac{\partial^\mu f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_h \dots}.$$

Dann ist zunächst

$$J = u_{111}v_{222}-3u_{112}v_{122}+3u_{122}v_{112}-u_{222}v_{111}$$

eine simultane Invariante von u und v. Bilden wir ferner die Covarianten

$$U=\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22}\end{vmatrix}, \qquad V=\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22}\end{vmatrix},$$

und setzen

$$K = \begin{vmatrix} v_{111}U_{22}-2v_{112}U_{12}+v_{122}U_{11} & u_{111}V_{22}-2u_{112}V_{12}+u_{122}V_{11} \\ v_{112}U_{22}-2v_{122}U_{12}+v_{222}U_{11} & u_{112}V_{22}-2u_{122}V_{12}+u_{222}V_{11}\end{vmatrix},$$

so ist das gesuchte Eliminationsresultat:

$$(1.)\qquad J^3+27K = 0.$$

Diese Formel ist sehr leicht zu verificiren. Nehmen wir an $u=0$, $v=0$ hätten die gemeinsame Wurzel $x_2=0$; man kann die beiden Gleichungen dann noch so combiniren, dass neben u_{222}, v_{222} auch u_{111} und v_{122} verschwinden. Es ist nur zu zeigen, dass (1.) dann erfüllt wird; und dass ausserdem die Gleichung (1.) ungeändert bleibt, wenn man $u+\lambda v$, $u+\mu v$ an Stelle von u und v setzt. Was den ersten Punkt betrifft, so findet sich sofort:

$$U = -(u_{112}^2 x_1^2+u_{112}u_{122}x_1x_2+u_{122}^2x_2^2),$$
$$V = -v_{112}^2x_1^2,$$

daher

$$J=3u_{122}v_{112},\qquad K=-u_{122}^3v_{112}^3,$$

also

$$J^3+27K=0,\quad \text{q. e. d.}$$

Was den zweiten Punkt angeht, so wird durch die Einführung von $u+\lambda v$, $u+\mu v$ an Stelle von u, v zunächst J offenbar in $(\mu-\lambda)J$ übergeführt. Sodann bemerke man, dass U, V auch in der Form geschrieben werden können:

$$U=\begin{vmatrix} u_{111} & u_{112} & x_2^2 \\ u_{112} & u_{122} & -x_1x_2 \\ u_{122} & u_{222} & x_1^2 \end{vmatrix}, \qquad V=\begin{vmatrix} v_{111} & v_{112} & x_2^2 \\ v_{112} & v_{122} & -x_1x_2 \\ v_{122} & v_{222} & x_1^2 \end{vmatrix}$$

Setzt man also

$$F=\begin{vmatrix} u_{111} & u_{112} & v_{111} & v_{112} \\ u_{112} & u_{122} & v_{112} & v_{122} \\ u_{122} & u_{222} & v_{122} & v_{222} \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = Aa+Bb+Cc+Dd,$$

so ist $K=AD-BC$. Durch die erwähnte Substitution geht nun F, wie man sogleich einsieht, in

$$(\mu-\lambda)[a(\mu A-C)+b(\mu B-D)+c(C-\lambda A)+d(D-\lambda B)]$$

über, also K in:

$$(\mu-\lambda)^2\begin{vmatrix} \mu A-C & C-\lambda A \\ \mu B-D & D-\lambda B \end{vmatrix} = (\mu-\lambda)^3 K.$$

Die Gleichung (1.) erhält also nur den Factor $(\mu-\lambda)^3$, q. e. d. —

Die gegebene Form des Eliminationsresultats liefert eine interessante Anwendung, wenn u, v die Differentialquotienten einer Function f der vierten Ordnung sind. Dann wird

$$J=f_{1111}f_{2222}-4f_{1112}f_{1222}+3f_{1122}^2=i$$

die eine Invariante der Function und

$$F=\begin{vmatrix} f_{1111} & f_{1112} & f_{1112} & f_{1122} \\ f_{1112} & f_{1122} & f_{1122} & f_{1222} \\ f_{1122} & f_{1222} & f_{1222} & f_{2222} \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

geht in $(c-b)j$ über, wo j die zweite Invariante von f bedeutet. Man hat also $K=-j^2$, und aus (1.) die Discriminante der Function vierter Ordnung in der üblichen Form

$$i^3-27j^2. —$$

Sind u, v Functionen dritter Ordnung mit drei Variabeln, und ist neben denselben eine lineare Gleichung

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3 = 0$$

gegeben, so geschieht die Elimination der x mit Hülfe der Gleichung (1.) leicht

nach Vorschrift des Satzes dieses Journal, Band 59, pag. 30. Hiernach stellt man J und K symbolisch als Aggregate von Determinantenproducten dar, und erweitert jede Determinante zu drei Reihen, indem man die α als neue Reihe hinzufügt. Ich will annehmen, es sei v die *Hesse*sche Determinante von u. Das vorgelegte Problem kommt dann mit der Aufgabe überein, *das Product der Gleichungen sämmtlicher Wendepunkte der Curve $u=0$ in den Liniencoordinaten α darzustellen.* Dabei müsste J in eine zugehörige Form übergehen, welche für die Variabeln vom dritten und für die Coefficienten vom vierten Grade wäre; da eine solche nicht existirt, so ist $J=0$, und die gesuchte Gleichung reducirt sich auf $K=0$. Inzwischen hat man statt U, V nach dem erwähnten Prozesse zu setzen:

$$U = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \end{vmatrix} = \Sigma\Sigma U_{ik} x_i x_k,$$

$$V = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \alpha_1 \\ v_{21} & v_{22} & v_{32} & \alpha_2 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \end{vmatrix} = \Sigma\Sigma V_{ik} x_i x_k;$$

an Stelle der Gleichung $K=0$ aber tritt die Gleichung:

$$(2.) \qquad K = 0 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}.$$

wo φ_i, ψ_i aus den symbolischen Ausdrücken

$$\varphi_i = v_i \begin{vmatrix} v_1 & U_1 & \alpha_1 \\ v_2 & U_2 & \alpha_2 \\ v_3 & U_3 & \alpha_3 \end{vmatrix}^2, \quad \psi_i = u_i \begin{vmatrix} u_1 & V_1 & \alpha_1 \\ u_2 & V_2 & \alpha_2 \\ u_3 & V_3 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

entstehen, indem man in denselben $v_i v_k v_h$, $u_i u_k u_h$, $U_i U_k$, $V_i V_k$ durch v_{ikh}, u_{ikh}, U_{ik}, V_{ik} ersetzt. Die Gleichung (2.) ist die Gleichung des gesuchten Productes; sie gestattet noch mannigfache Transformationen, so dass sie namentlich mit der Functionaldeterminante der *Aronhold*schen Functionen S, T und F übereinkommt.

Giessen, den 15. April 1864.

Ueber die Singularitäten algebraischer Curven.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

Die *Plücker*schen Formeln (vgl. *Salmon*, treatise an higher plane curves, p. 91) lehren die Ordnung und Classe einer Curve, sowie die Zahl ihrer Wendepunkte, Doppeltangenten, Doppelpunkte und Rückkehrpunkte kennen, wenn drei unter diesen Zahlen bekannt sind. In einer grossen Anzahl von Fällen aber kann man eine weitere Relation hinzufügen, so dass dann die Bestimmung sämmtlicher Singularitäten nur die Kenntniss zweier derselben erfordert. Zu dieser Relation führt die Verbindung der Curventheorie mit der Theorie der *Abel*schen Functionen, welche ich in meiner Abhandlung dieses Journal Band 63, pag. 189 begründet habe.

Nach den dort gegebenen Principien kann man die Curven in *Geschlechter* eintheilen nach der Classe *Abel*scher Functionen, auf welche sie führen, oder nach dem ihnen entsprechenden Werthe der Zahl p. Wenn nun aus der gegebenen Curve eine andere so abgeleitet wird, dass jedem Punkte oder jeder Tangente der einen Curve im Allgemeinen immer nur ein einziger Punkt oder eine einzige Tangente der andern entspricht, *so führen beide Curven auf dieselben Abelschen Integrale,* gehören also demselben *Geschlechte* an, und besitzen dasselbe p. In der That ist dieser Satz nur eine andere Einkleidung desjenigen, welchen Herr *Riemann* dieses Journal Band 54 pag. 133 gegeben hat.

Bezeichnen wir nach Herrn *Salmon* (a. a. O.) durch m die Ordnung, durch n die Classe einer Curve, durch ι, τ, δ, $\varkappa$ die Zahl ihrer Wendepunkte, Doppeltangenten, Doppelpunkte und Rückkehrpunkte, so ist

$$p = \frac{m-1.m-2}{2} - \delta - \varkappa = \frac{n-1.n-2}{2} - \tau - \iota.$$

Die Gleichheit beider Werthe folgt aus den *Plücker*schen Formeln selbst, kann aber auch aus dem eben erwähnten Princip abgeleitet werden, indem man bemerkt, dass jedem Punkte der Curve im Allgemeinen nur eine einzige Tangente in ihm entspricht, und umgekehrt. Da nun bei dem Uebergange von Punktcoordinaten zu Liniencoordinaten m mit n, δ mit τ, $\varkappa$ mit ι zu vertauschen ist, so folgt, dass der eine Ausdruck von p den anderen nach sich zieht.

Besitzt aber irgend eine Curve, welche mit der angegebenen Beschränkung aus der ursprünglichen abgeleitet ist, die charakteristischen Zahlen m',

n', δ', $\varkappa'$, τ', ι', so hat man auch:

$$p = \frac{m'-1.m'-2}{2} - \delta' - \varkappa' = \frac{n'-1.n'-2}{2} - \tau' - \iota',$$

und dieses ist die neue Relation, welche für solche Curven immer gilt.

Ein Beispiel giebt die Evolute. Man kann zeigen, dass für sie im Allgemeinen:

$$\iota' = \varkappa, \quad n' = m^2 - 2\delta - 3\varkappa$$

ist. Diese beiden Angaben genügen zur Bestimmung der übrigen Singularitäten. Man erhält dann:

$$m' = 3m(m-1) - 6\delta - 9\varkappa,$$

$$\varkappa' = 3m(2m-3) - 12\delta - 17\varkappa,$$

$$\tau' = \frac{m.m-1.m^2+m-3}{2} - 2\delta(m^2-2-\delta-3\varkappa) - \frac{3\varkappa(2m^2-3\varkappa-3)}{2},$$

$$\delta' = \frac{9m^4-18m^3-13m^2+30m}{2} - 3m(m-1)(6\delta+9\varkappa) + \frac{(6\delta+9\varkappa)^2}{2} + \frac{44\delta+63\varkappa}{2}.$$

Für Curven doppelter Krümmung und abwickelbare Flächen gelten ganz ähnliche Betrachtungen. Nach Herrn *Salmon* (Geometry of three dimensions p. 234) bezeichne man durch m die Zahl der Schnittpunkte der Curve mit einer Ebene, durch r die Zahl von Tangenten, welche durch eine Gerade sich an die Curve legen lassen, durch n die Zahl der durch einen Punkt gehenden Schmiegungsebenen, durch h die Zahl von Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt gelegt, die Curve zweimal treffen, durch g die Zahl der Durchschnitte zweier Schmiegungsebenen, welche in einer gegebenen Ebene liegen, durch x die Zahl von Schnittpunkten zweier Tangenten auf einer gegebenen Ebene, durch y die Zahl von Ebenen, welche, durch einen gegebenen Punkt gelegt, zwei Tangenten der Curve enthalten, durch α die Anzahl der Wendungsberührebenen, und durch β die Zahl der Punkte der Curve, in welcher sich vier auf einander folgende Schmiegungsebenen schneiden. Dann drückt sich die der Curve zugehörige Zahl p auf folgende vier Arten aus:

$$p = \frac{m-1.m-2}{2} - h - \beta,$$

$$= \frac{r-1.r-2}{2} - y - n,$$

$$= \frac{r-1.r-2}{2} - x - m,$$

$$= \frac{n-1.n-2}{2} - g - \alpha.$$

Die von Herrn *Salmon* a. a. O. aufgestellten Formeln zeigen, dass diese Ausdrücke wirklich identisch sind. Die Identität des ersten und letzten Ausdrucks folgt aber nach den auseinandergesetzten Principien auch daraus, dass jedem Punkte der Curve im Allgemeinen nur eine Schmiegungsebene entspricht, und umgekehrt.

Nun bedarf man im Allgemeinen der Kenntniss *dreier* unter den Grössen $m, n, r, h, g, x, y, \alpha, \beta$. Aber wenn man aus einer gegebenen Curve (respective abwickelbaren Fläche) eine andere ableitet, so dass jedem Punkte (respective jeder Ebene) der einen nur immer *ein* Punkt (respective eine Ebene) der anderen entspricht, und umgekehrt, so haben beide Gebilde das nämliche p; und es ist also, wenn man die entsprechenden Zahlen für das neue Gebilde durch Striche unterscheidet:

$$\frac{m'-1.m'-2}{2}-h'-\beta' = \frac{m-1.m-2}{2}-h-\beta,$$

$$\frac{r'-1.r'-2}{2}-y'-n' = \frac{r-1.r-2}{2}-y-n,$$

$$\frac{r'-1.r'-2}{2}-x'-m' = \frac{r-1.r-2}{2}-x-m,$$

$$\frac{n'-1.n'-2}{2}-g'-\alpha' = \frac{n-1.n-2}{2}-g-\alpha,$$

und es genügt für ein solches Gebilde zwei der charakteristischen Zahlen zu finden, um die übrigen aufstellen zu können.

Giessen, den 15. April 1864.

Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.

(Par M. *L. Cremona* à Bologne.)

1. On sait que l'illustre *Steiner* a énoncé (sans démonstration) des théorèmes très nombreux relatifs à une certaine courbe de la troisième classe et du quatrième ordre (tome 53 de ce journal, p. 231). Je crois qu'il ne sera pas sans intérêt de voir ces propriétés si élégantes découler tout naturellement de la théorie générale des courbes planes du troisième degré (ordre ou classe), qui a été établie principalement par les beaux travaux de MM. *Hesse* et *Cayley* *). Cette manière d'envisager la question mettra en évidence le lien naturel qui enchaîne toutes ces propriétés, en apparence si différentes, et fera aussi connaître quelques résultats nouveaux.

La courbe, dont il s'agit dans le mémoire cité de *Steiner*, passe par les points circulaires à l'infini et a une tangente double, qui est la droite à l'infini. Mais les mêmes théorèmes continuent de subsister pour une courbe quelconque du même ordre et de la même classe: il n'y a presque rien à changer, même aux démonstrations. Il suffit seulement de substituer deux points fixes quelconques aux points circulaires à l'infini: ce qui revient à faire une transformation homographique. Les cercles seront alors surrogés par des coniques passant par les points fixes; au lieu des fonctions trigonométriques d'un angle, on aura certaines fonctions du rapport anharmonique d'un faisceau, dont deux droites soient dirigées aux points fixes **); etc.

Comme il n'y a pas, au fond, plus de généralité à considérer ces points fixes quelconques au lieu des points circulaires à l'infini, je retiendrai la même courbe qui a été l'objet des recherches de *Steiner:* ce qui me permettra d'user un langage plus concis et plus expéditif.

---

*) Voir les tomes 36 et 38 de ce journal; tomes 9 et 10 du journal de M. *Liouville* (1[e] série); et vol. 147, part 2[e], des Philosophical Transactions. On trouvera l'exposition géométrique de cette théorie dans mon Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane (Bologna 1862), à laquelle je renverrai souvent le lecteur.

**) Si *P, Q* sont les asymptotes d'un cercle dont le centre soit à l'intersection de deux droites *M, N,* on sait que le rapport anharmonique du faisceau *MNPQ* est $\cos 2(MN) - i\sin 2(MN)$. (*Chasles,* Géométrie supérieure, p. 125).

2. Soit donc C^3 une courbe de la troisième classe (et du quatrième ordre), qui soit tangente à la droite à l'infini, en deux points ω, ω', situés sur un cercle quelconque.

Toute droite G qui soit tangente à C^3 en un point g, coupera cette courbe en deux autres points k, k'. La droite à l'infini étant une tangente double de la courbe, celle-ci n'admet qu'une seule tangente ayant une direction donnée; donc, si l'on fait varier G, les droites tangentes en k, k', détermineront sur la droite à l'infini une involution, dont les points doubles sont ω, ω'. Il s'ensuit que les tangentes en k, k' sont perpendiculaires.

Ainsi les tangentes de notre courbe sont conjuguées par couples: deux tangentes conjuguées sont perpendiculaires, et leurs points de contact sont situés sur une troisième tangente.

3. Les propriétés des tangentes conjuguées de cette courbe de troisième classe corresponderont, par la loi de dualité, aux propriétés des points conjugués d'une courbe de troisième ordre; donc:

La tangente perpendiculaire à G passe par le point commun aux tangentes en k, k' (Introd. 133).

4. Si trois tangentes G, H, I passent par un même point, les tangentes G', H', I' perpendiculaires respectivement à celles-là, forment un triangle dont les sommets sont situés sur G, H, I (Introd. 134), c'est-à-dire un triangle, dont G, H, I sont les hauteurs. Autrement: si GG', HH' sont deux couples de tangentes perpendiculaires, les droites II', qui joignent les points où GG' rencontrent HH', formeront une autre couple de tangentes perpendiculaires. Ces trois couples sont les côtés d'un quadrangle complet orthogonal.

5. On voit donc que, si deux tangentes variables HI concourent en x sur une tangente fixe G, les tangentes perpendiculaires $H'I'$ se couperont en un autre point x' de G. Les couples de points xx' sont en involution (Introd. 134, a). Les points doubles de cette involution sont évidemment le point à l'infini sur G, et le point μ (de G) où se coupent deux tangentes perpendiculaires JJ' *), autres que G. Donc μ est le point milieu du segment variable xx'.

Le point s où G rencontre sa conjuguée G', et le point g, où G est tangente à la courbe C^3, sont évidemment deux points conjugués de l'involution;

*) Les points de contact de ces tangentes JJ' sont situés sur la tangente G', perpendiculaire à G (2.); d'où l'on conclut que chaque tangente G contient un seul point μ.

les points kk' où G coupe la courbe (2.) sont de même deux points conjugués; donc chacun des segments sg, kk' a son milieu au point μ.

6. Le lieu du point commun à deux tangentes perpendiculaires est une ligne du troisième ordre (Introd. 132, a; 133, b), à laquelle appartiennent tous les points à l'infini (du plan), parceque la droite à l'infini est une tangente conjuguée à soi-même. En outre, toute tangente G contient deux points (à distance finie) du lieu: le point μ, où se coupent deux tangentes perpendulaires, autres que G (5.), et le point s, où G est rencontrée par sa conjuguée G'. Donc le lieu des points μ, s est une conique: de plus, ce lieu est un cercle, car il passe par les points ω, ω', où les trois tangentes de C^3 coïncident ensemble sur la droite à l'infini. Ce cercle C^2 forme donc, avec la droite $\omega\omega'$, le lieu complet des intersections des couples de tangentes conjuguées de C^3.

7. Tout point μ (ou s) du cercle C^2 est l'intersection de trois tangentes de la courbe C^3, dont deux sont perpendiculaires entre elles (6.); de plus, elles sont conjuguées harmoniques par rapport à la troisième tangente et à la droite qui touche le cercle au même point (Introd. 135, c); c'est-à-dire que l'angle de ces dernières droites a pour bissectrices les deux tangentes perpendiculaires.

Soit ν le point à l'infini sur la troisième tangente: on peut regarder μ, ν comme deux points correspondants du lieu de troisième ordre formé par le cercle C^2 avec la droite à l'infini (Introd. 133, a; 135, c).

Si l'on joint un point fixe s du cercle à deux points correspondants variables μ, ν, les droites $s\mu$, $s\nu$ engendreront un faisceau en involution (Introd. 134, a), dont les rayons doubles sont les tangentes perpendiculaires de C^3, qui se coupent en s. Réciproquement, si le point μ et la direction $\mu\nu$ sont fixes, et l'on fait varier s sur le cercle, les bissectrices de l'angle $\mu s\nu$ envelopperont la courbe C^3.

8. La courbe de troisième classe C^3, étant du quatrième ordre, possède forcément trois points de rebroussement (de première espèce) pqr, qui sont tous réels, car les points de contact de la tangente double sont imaginaires *). Un point de rebroussement, p, représente trois intersections réunies de la courbe avec sa tangente en ce point; cette tangente rencontrera donc C^3 en un autre point u. Pour cette même tangente, regardée comme droite G

*) *Salmon,* Higher plane curves, p. 171.

(2.), le point de contact g coïncide avec l'une des intersections k, en p; et l'autre intersection k' est représentée par u; d'ailleurs les segments sg et kk' ont le même milieu μ (5.); donc s coïncide avec k' en u. Ce qui revient à dire que le point u et les deux autres points analogues v, w (correspondants à q, r) appartiennent à la courbe C^3 et au cercle C^2.

Par conséquent la courbe C^3 est touchée en u par une droite U perpendiculaire à pu. Et, comme u est un point de C^2, la droite U représente deux des trois tangentes qu'on peut mener à la courbe par un point quelconque du cercle; ainsi U est aussi tangente au cercle en u (7.).

Donc les droites pu, qv, rw, tangentes aux rebroussements de C^3 et perpendiculaires aux tangentes en u, v, w (communes au cercle et à la courbe C^3) passent par le centre o du cercle.

Soient $u'v'w'$ les points μ relatifs aux tangentes de rebroussement, c'est-à-dire les points du cercle C^2, diamétralement opposés à uvw. Pour une tangente quelconque G, le point μ est le milieu du segment sg; donc u' est le point milieu de up, c'est-à-dire: $op = 3ou'$, $oq = 3ov'$, $or = 3ow'$. Ainsi les points de rebroussement sont situés sur un cercle concentrique à C^2 et de rayon triple que celui-ci.

9. On sait d'ailleurs *) que, pour une courbe de troisième classe et quatrième ordre, le point commun aux tangentes de rebroussement est le pôle harmonique de la tangente double par rapport au triangle formé par les trois rebroussements. Il s'ensuit **) que deux quelconque des tangentes op, oq, or forment, avec les asymptotes $o\omega$, $o\omega'$ du cercle C^2, un faisceau dont le rapport anharmonique est une racine cubique imaginaire de l'unité; c'est-à-dire que chacun des angles qor, rop, poq est de 120^0. Donc le triangle pqr, et par suite les triangles uvw, $u'v'w'$ sont equilatères.

Cela étant, si l'on fait rouler, dans la concavité du cercle (pqr), un autre cercle de diamètre pu', qui soit d'abord tangent au premier cercle en p, ce point considéré comme appartenant au cercle mobile engendrera une courbe***) du quatrième ordre, qui aura trois rebroussements en p, q, r, avec les tangentes se coupant en o, et qui touchera en u, v, w le cercle C^2. Cette roulette est précisément notre courbe C^3.

---

*) *Salmon*, Higher plane curves, p. 171.

**) Giornale di Matematiche, vol. I., Napoli 1863, p. 319; vol. II, 1864, p. 62.

***) *Salmon*, Higher plane curves, p. 214.

La courbe C^3 est donc l'hypocycloïde à trois rebroussements engendrée par un cercle de rayon $= \frac{1}{3} op$ (ou, ce qui donne le même résultat *), de rayon $= \frac{2}{3} op$) qui roule dans l'intérieur du cercle (pqr).

Ainsi toute courbe de troisième classe et quatrième ordre, dont la tangente double soit à l'infini et les points de contact sur un cercle, est nécessairement une hypocycloïde à trois rebroussements. Cette courbe joue donc, parmi les courbes de la troisième classe et du quatrième ordre, le même rôle que le cercle parmi les coniques.

Je ne m'arrêtrai pas aux théorèmes que *Steiner* énonce sur la figure de la courbe, sur la longueur de ses arcs et sur la quadrature de son aire, car ils sont des cas particuliers d'autres propositions déjà anciennes et bien connues **).

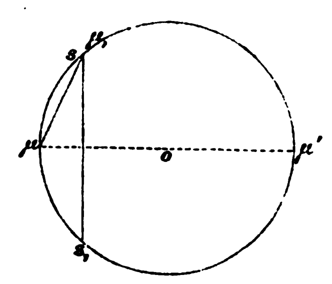
10. Deux tangentes perpendiculaires de l'hypocycloïde C^3 se coupent en un point s du cercle C^2 (6.), et par suite rencontrent de nouveau la circonférence en deux points μ, μ' en ligne droite avec le centre o; de plus, ces tangentes sont les bissectrices des angles formés par la tangente du cercle avec la troisième tangente ss_1 de C^3 (7.); cette troisième tangente est donc perpendiculaire au diamètre $\mu\mu'$.

D'où il suit, qu'étant donnée une première tangente μs, ainsi que le cercle C^2, on construira toutes les autres tangentes de C^3, de la manière suivante: menez par s la perpendiculaire à μs et la corde ss_1 perpendiculaire au diamètre qui passe par μ; menez par s_1 la perpendiculaire à ss_1 et la corde s_1s_2 perpendiculaire au diamètre qui passe par s; et toujours ainsi de suite, après avoir obtenue une corde s_ns_{n+1}, menez par s_{n+1} la perpendiculaire à s_ns_{n+1} et une nouvelle corde $s_{n+1}s_{n+2}$ perpendiculaire au diamètre qui passe par s_n. Toutes ces perpendiculaires et ces cordes seront évidemment tangentes à la même courbe C^3.

---

*) *Euler*, de duplici genesi tam epicycloïdum quam hypocycloïdum (Acta Acad. Scient. Imp. Petropolitanae pro anno 1781, pars prior, p. 48).

**) *Newton*, Philosophiae nat. Principia math. lib. I., prop. 49. — *De La Hire*, Traité des epicycloïdes et de leur usage dans les méchaniques (Mém. de math. et de physique, Paris 1694), p. 10—47. — Voir en outre: *Magnus*, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analyt. Geometrie, Bd. I. (Berlin 1833) p. 310, 519, 536. — *Padula*, Intorno le curve di 4° grado che hanno tre punti di regresso di prima specie (Annali di *Tortolini*, t. 3. Roma 1852, p. 383). — *Salmon*, Higher plane curves, p. 251, 267. — *Bellavitis*, Sulla classificazione delle curve della 3ª classe (Atti dell' Istituto Veneto, serie 2ª, vol. IV, p. 247, Venezia 1853).

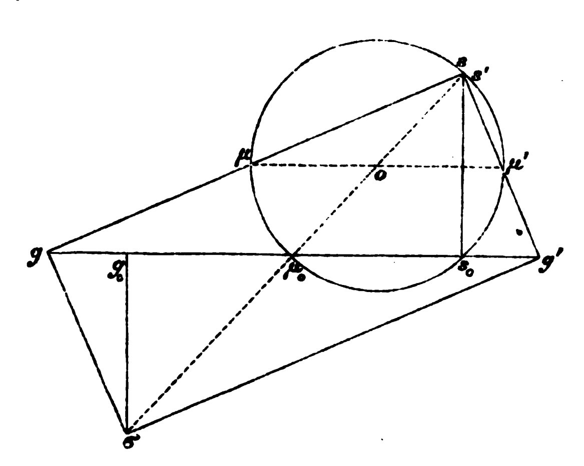


11. Le point s, où se coupent deux tangentes perpendiculaires $s\mu$, $s\mu'$, soit nommé μ_1 par rapport à la troisième tangente, qui rencontre de nouveau le cercle en s_1. De ce que la troisième tangente $\mu_1 s_1$ est perpendiculaire au diamètre $\mu\mu'$, on tire cette simple relation entre les arcs μs, $\mu_1 s_1$ mesurés dans le même sens:

$$\overset{\frown}{\mu_1 s_1} + 2\overset{\frown}{\mu s} = 2\pi.$$

Donc, si deux rayons os, $o\mu$ du cercle C^2 tournent simultanément autour du point o, en sens opposés et avec la condition que leurs vitesses angulaires aient le rapport constant $2:1$, la corde $s\mu$ enveloppera l'hypocycloïde C^3 ou une courbe égale à C^3.

12. Deux tangentes conjuguées de l'hypocycloïde se coupent en s (ou s') et rencontrent de nouveau le cercle C^2 en μ, μ'. Soit μ_0 le point du cercle diamétralement opposé à s; et menons par μ_0 la parallèle à $\mu\mu'$, qui coupe en s_0, g, g' le cercle et les droites $s\mu$, $s'\mu'$. On aura $\mu g = s\mu$ et $\mu' g' = s'\mu'$; g et g' sont donc (5.) les points où l'hypocycloïde est touchée par les droites $s\mu$, $s'\mu'$, et par suite (2.) gg' est une nouvelle tangente, dont le point de contact g_0 sera déterminé par la condition $\mu_0 g_0 = s_0 \mu_0$. Or on a $gg' = 2\mu\mu'$; donc la distance des deux points où l'hypocycloïde est coupée par une tangente quelconque est toujours égale au diamètre du cercle C^2.



13. Menons par g, g' les normales à l'hypocycloïde, c'est-à-dire les droites $g\sigma$, $g'\sigma$ perpendiculaires resp. à gs, $g's$. La figure $sg\sigma g'$ est un rectangle, et par suite le point σ, commun à ces normales, est en ligne droite avec o et s; et l'on a $\sigma o = 3os$. La perpendiculaire abaissée de s sur gg' passe par s_0 et est tangente à l'hypocycloïde (10.); donc la perpendiculaire abaissée du point σ sur gg' passera par g_0 et sera par conséquent normale, en ce point, à l'hypocycloïde.

Ainsi les normales à l'hypocycloïde aux trois points g, g', g_0 (où cette

courbe est touchée par trois droites issues d'un même point s du cercle C^2) concourent en un même point σ (situé sur le diamètre os), dont le lieu est le cercle (pqr) concentrique à C^2 et de rayon triple que celui-ci. Autrement: les normales de l'hypocycloïde C^3 enveloppent une autre hypocycloïde inversement homothétique à C^3; o est le centre, et $3:1$ le rapport de similitude.

14. On a déjà vu que, si trois tangentes de l'hypocycloïde concourent en un même point d, les tangentes resp. perpendiculaires à celles-là forment un triangle abc, dont les sommets appartiennent aux premières droites (4.). Les quatre points $abcd$ sont les sommets d'un quadrangle complet orthogonal circonscrit à la courbe; c'est-à-dire que chacun de ces points est le concours des hauteurs du triangle formé par les trois restants. Soient $a_1 b_1 c_1$ les points diagonaux du quadrangle (les intersections des couples de côtés opposés); ils sont situés sur le cercle C^2, car chacun d'eux est l'intersection de deux tangentes perpendiculaires de C^3. Donc le cercle C^2 contient les pieds des hauteurs, et par suite aussi les milieux des côtés *), pour tout triangle analogue à abc, c'est-à dire pour chaque triangle formé par trois tangentes de l'hypocycloïde, dont les conjuguées passent par un même point. Autrement: le cercle C^2 passe par les points milieux des six côtés de tout quadrangle complet orthogonal analogue à $abcd$ (c'est-à-dire circonscrit à l'hypocycloïde); et les droites qui joignent les points milieux des couples de côtés opposés sont des diamètres du cercle.

Il y a un des triangles abc qui est équilatère et par suite circonscrit au cercle C^2; c'est le triangle formé par les tangentes en u, v, w (9.).

15. La courbe C^3 étant le lieu d'un point où se croisent deux seules tangentes distinctes, il en résulte qu'elle partage le plan en deux parties, dont l'une est le lieu des points où se coupent trois tangentes réelles distinctes; l'autre au contraire contient les points situés sur une seule tangente réelle. Or, chaque point du cercle C^2 est l'intersection de trois tangentes réelles de l'hypocycloïde; la même propriété appartient donc à tous les points situés dans l'intérieur de l'hypocycloïde, et l'opposée aux points extérieures.

Il s'ensuit que, si le quadrangle $abcd$ a un sommet à l'intérieur, les trois autres sommets sont aussi intérieurs, et le quadrangle est complètement

---

*) *Feuerbach,* Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks (Nürnberg 1822), p. 38. Il résulte d'un autre théorème dû à *Feuerbach* (ibidem) que le cercle C^2 est l'enveloppe des cercles inscrits et ex-inscrits à tous les triangles analogues à abc.

réel. Si, au contraire, il y a un sommet extérieur, il y en aura un second qui sera aussi au dehors, mais les deux restants seront imaginaires.

Si l'un des sommets, a, tombe sur la circonférence de C^2, un autre sommet, d, coïncidera en a, à cause des deux tangentes perpendiculaires qui se coupent en ce point. Dans ce cas donc, le quadrangle $abcd$ devient un triangle rectangle sgg' (12.), dont l'angle droit a son sommet sur le cercle C^2, et les autres sommets appartiennent à l'hypocycloïde.

16. On peut regarder deux tangentes, GG', perpendiculaires, de l'hypocycloïde comme les asymptotes d'un faisceau d'hyperboles équilatères, qui aient un double contact à l'infini, et parmi lesquelles on doit compter la paire de droites GG' (hyperbole équilatère avec un point double) et la droite à l'infini regardée comme un système de deux droites coïncidentes (hyperbole équilatère avec une infinité de points doubles). A une autre paire de tangentes perpendiculaires correspondra un autre faisceau d'hyperboles équilatères; et les deux faisceaux auront en commun une hyperbole (la droite à l'infini). Toutes les hyperboles équilatères de ces faisceaux correspondants aux couples de tangentes perpendiculaires de l'hypocycloïde forment donc un réseau géométrique (Introd. 92); c'est-à-dire que par deux points choisis arbitrairement on peut faire passer une (une seule) hyperbole équilatère, dont les asymptotes soient tangentes à l'hypocycloïde.

Les points doubles des hyperboles du réseau sont les points de croisement des asymptotes (c'est-à-dire les centres des hyperboles) et les points de la droite à l'infini; cette droite forme donc, avec le cercle C^2 comme lieu des centres de toutes ces hyperboles équilatères, la courbe Hessienne du réseau (Introd. 95).

Les droites qui composent les hyperboles du réseau, douées d'un point double, sont les paires de droites GG'; ainsi l'hypocycloïde C^3, comme enveloppe des asymptotes de toutes ces hyperboles équilatères, est la courbe Cayleyenne du réseau (Introd. 133, b).

La Hessienne est le lieu des couples de pôles conjugués par rapport aux coniques du réseau (Introd. 132, b), tandis que la Cayleyenne est l'enveloppe de la droite qui joint deux pôles conjugués (Introd. 132, a; 133, b); donc les points correspondants μ, ν du cercle C^2 et de la droite à l'infini (7.) sont des pôles conjugués par rapport à toutes les hyperboles équilatères du réseau; et l'hypocycloïde est l'enveloppe de la droite $\mu\nu$ *).

*) M. *Schröter* a déjà défini la courbe C^3 comme enveloppe de la droite $\mu\nu$ qui

17. Deux hyperboles équilatères du réseau se coupent en quatre points, sommets d'un quadrangle complet orthogonal, dont les côtés sont tangents à l'hypocycloïde et les points diagonaux sont situés sur le cercle C^2 (Introd. 133, d). Ces quatre intersections forment donc l'un des quadrangles *abcd* déjà considérés (14.).

Ainsi tout quadrangle *abcd* (orthogonal et circonscrit à C^3) est la base d'un faisceau d'hyperboles du réseau; et réciproquement, chaque hyperbole du réseau passe par les sommets d'un nombre infini de ces quadrangles.

Si le quadrangle *abcd* dégénère en un triangle rectangle, dont le sommet μ de l'angle droit appartiendra au cercle C^2 (15.), toutes les hyperboles équilatères circonscrites auront en μ la même tangente $\mu\nu$ (Introd. 135). Donc le cercle C^2 est le lieu des points de contact des hyperboles du réseau (Introd. 92), et l'hypocycloïde est l'enveloppe des tangentes communes en ces points de contact entre les hyperboles du réseau.

18. Soit δ le centre du cercle D^2 circonscrit au triangle *abc;* on sait*) que *d*, intersection des hauteurs de ce triangle, est le centre de similitude directe des cercles C^2, D^2, et que le centre *o* de C^2 est le point milieu du segment $d\delta$. D'où il suit que le rayon de D^2 est double du rayon de C^2: c'est-à-dire que les cercles circonscrits à tous les triangles analogues à *abc* sont égaux.

Il résulte d'ici encore que les centres α, β, γ, δ des cercles circonscrits aux triangles *bcd*, *cad*, *abd*, *abc* sont des points symétriques à *a*, *b*, *c*, *d*, par rapport au point *o*; et par conséquent que $\alpha\beta\gamma\delta$ est un quadrangle égal et symétrique à *abcd*: *o* étant le centre de symétrie. Donc les points diagonaux des quadrangles analogues à $\alpha\beta\gamma\delta$ sont situés sur la circonférence C^2 (14.), et l'enveloppe des côtés de ces mêmes quadrangles est une courbe égale et symétrique à C^3 (*o* centre de symétrie).

On sait**) que dans un quadrangle complet orthogonal la somme des carrés de deux côtés opposés (par ex. $\overline{bc}^2+\overline{da}^2$) est égale à quatre fois le carré du diamètre du cercle (C^2) décrit par les milieux des côtés; cette somme est donc constante pour toutes les couples de côtés opposés dans tous les quadrangles analogues à *abcd* et $\alpha\beta\gamma\delta$.

---

joint les points homologues de deux séries projectives de points, dont l'une soit donnée sur la circonférence du cercle C^2, et l'autre sur la droite à l'infini (tom. 54 de ce journal, p. 31).

*) *Steiner*, Die geometrischen Konstructionen (Berlin 1833), p. 51.

**) *Carnot*, Géométrie de position (Paris 1803), No. 154.

19. D'un point quelconque f du cercle D^2 circonscrit au triangle abc abaissons les perpendiculaires sur les côtés de ce triangle. D'après un théorème tres-connu, les pieds des trois perpendiculaires sont allignés sur une droite G. Cherchons l'enveloppe de cette droite, lorsque le point f se déplace sur le cercle D^2.

Si f tombe sur l'un des sommets abc, la droite G devient l'une des hauteurs aa_1, bb_1, cc_1 du triangle; et si f est opposé diamétralement à l'un des sommets, G coïncide avec l'un des côtés bc, ca, ab. Les six côtés du quadrangle complet $abcd$ sont donc autant de tangentes de l'enveloppe dont il s'agit.

Si f coïncide avec l'un ou l'autre des points circulaires $\omega\omega'$, la droite G tombe entièrement à l'infini: d'où il résulte que la droite à l'infini est une tangente double de l'enveloppe. En outre, si G doit avoir une direction donnée, le point f est unique et déterminé; et pour le construire, il suffit de tracer par d une droite ayant la direction donnée, et de joindre les intersections de cette droite par les côtés bc, ca, ab, aux intersections correspondantes (différentes de a, b, c) du cercle D^2 par les hauteurs aa_1, bb_1, cc_1; les trois droites ainsi tracées concourent au point f*).

La courbe enveloppée par les droites G est donc de la troisième classe et a, en commun avec l'hypocycloïde C^3, la tangente double et six autres tangentes, ce qui équivaut à dix tangentes communes: par conséquent les deux courbes coïncident ensemble.

Ainsi l'hypocycloïde C^3 est l'enveloppe des droites G pour tout triangle analogue à abc; c'est-à-dire que, si aux points où les côtés d'un triangle abc sont coupés par une tangente quelconque de l'hypocycloïde, on élève les perpendiculaires sur ces côtés, ces perpendiculaires se couperont sur la circonférence du cercle circonscrit au triangle abc.

20. La droite G (19.) est la tangente au sommet d'une parabole N^2, qui a son foyer en f et est inscrite au triangle abc**). La courbe C^3 est donc l'enveloppe des tangentes au sommet des paraboles inscrites aux triangles (dont l'un quelconque suffit pour déterminer la courbe) analogues à abc.

Du reste, cette définition de la courbe C^3 rentre dans la méthode de M. *Chasles****) pour engendrer les courbes de troisième ordre ou classe. Soient, en effet, N une parabole inscrite au triangle abc, et ν le point à l'infini sur

*) *Steiner*, Développement d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques (Annales de Mathématiques de *Gergonne*, t. 19, p. 60).

**) *Steiner*, Développement etc. p. 45.

***) Comptes rendus de l'Acad. des sciences (Paris 1853) t. 36, p. 949; t. 37, p. 443.

la direction perpendiculaire aux diamètres de N^2. La parabole N^2 et le point correspondant ν, en variant ensemble, engendrent deux séries projectives: donc, si par ν on conçoit la droite G tangente à la parabole correspondante N^2, l'enveloppe de G sera une courbe de troisième classe, touchée par la droite à l'infini aux points circulaires ω, ω'.

21. Soit f' le point du cercle D^2 (19.), qui donne naissance à une droite G' perpendiculaire à G. Si l'on fait varier simultanément les points ff', ils engendrent (sur le cercle D^2) une involution, dont les points doubles sont évidemment les points circulaires à l'infini: d'où l'on conclut que la droite ff' passe par le centre d du cercle.

Or le point d est (18.) le centre de similitude directe des cercles C^2, D^2 (le rapport de similitude étant 1 : 2), et de plus, ce même point d est situé sur la directrice de la parabole N^2 *); le point milieu μ de la droite fd est donc commun à la droite G et au cercle C^2. De même, ce cercle et la droite G' passent par le point μ' milieu de $f'd$. Ainsi les triangles dff', $d\mu\mu'$ sont directement semblables; et par conséquent la droite $\mu\mu'$ est parallèle à ff' et passe par o, point milieu de $d\delta$ (et centre de C^2).

22. Une droite quelconque R coupe l'hypocycloïde C^3 en quatre points: les tangentes en ces points déterminent une parabole P^2, qui est l'enveloppe-polaire de la droite R par rapport à C^3, regardée comme courbe de troisième classe (Introd. 82). Les diamètres de cette parabole sont perpendiculaires à R (Introd. 74).

Si, au lieu de R, l'on considère une droite G qui soit tangente à C^3 en g et sécante en k, k', la parabole P^2 sera tangente à G en g, et par conséquent aura son sommet en ce point. En outre, les tangentes à l'hypocycloïde en k, k', étant perpendiculaires (2.), se couperont sur la directrice de P^2; donc la directrice de la parabole P^2 relative à une tangente G de l'hypocycloïde est parallèle à cette tangente et passe par le point μ' du cercle C^2 qui correspond à la tangente G', perpendiculaire à G (6.).

Il résulte d'ici que les directrices des paraboles P^2, relatives aux tangentes de l'hypocycloïde, enveloppent une autre courbe égale, concentrique et symétrique à C^3. Les axes de ces paraboles sont évidemment les normales de C^3, et par suite enveloppent la développée de C^3 (13.). Le lieu des sommets de ces paraboles est l'hypocycloïde C^3 elle-même.

---

*) *Steiner*, Développement etc. p. 59.

Si R est la tangente double de C^3, c'est-à-dire la droite à l'infini, la parabole P^2 se réduit évidemment aux points circulaires $\omega\omega'$, regardés comme formant une enveloppe de la deuxième classe.

23. Les paraboles P^2 relatives à toutes les droites du plan forment un système qui est corrélatif de ce qu'on appelle réseau (16.). Il y a une (une seule) parabole P^2 tangente à deux droites données arbitrairement. Toutes les paraboles P^2 qui touchent une droite donnée ont deux autres tangentes communes (Introd. 77), sans compter la droite à l'infini: c'est-à-dire que ces paraboles sont inscrites dans un même quadrilatère, dont un côté est à distance infinie, et correspondent à autant de droites R issues d'un même point (pôle des droites qui forment le quadrilatère).

24. Lorsqu'on considère un faisceau de droites R parallèles, les axes des paraboles correspondantes P^2 auront tous une direction commune, perpendiculaire aux droites R (22.). Mais il y a de plus: la droite à l'infini appartenant, dans ce cas, au faisceau des droites R, l'une des paraboles est formée par les points circulaires $\omega\omega'$; donc toutes les paraboles P^2 correspondantes à un faisceau de droites parallèles ont le même foyer et, par suite, le même axe.

D'où il résulte que le système (23.) des enveloppes-polaires de toutes les droites du plan est composé d'un nombre infini de séries, correspondantes aux différentes directions de ces droites: chaque série étant constituée par des paraboles P^2 qui ont le même foyer et le même axe.

25. Tout point du plan est pôle de quatre droites (y comprise la droite à l'infini), qui forment un quadrilatère circonscrit à toutes les paraboles P^2 correspondantes aux droites qui concourent au point dont il s'agit. Ainsi, à chaque point du plan correspond un quadrilatère, et le lieu des sommets de tous ces quadrilatères complets est une courbe du troisième ordre, la Cayleyenne du système des paraboles P^2 (Introd. 133, d). Or, chacun de ces quadrilatères a trois sommets à l'infini, car l'une des quatre droites dont il résulte est la droite à l'infini: donc la Cayleyenne se compose de la droite à l'infini et d'une conique, lieu des sommets d'un triangle circonscrit aux paraboles P^2 qui correspondent à des droites issues d'un même point (variable dans le plan).

Pour une série de paraboles P^2 ayant le même foyer et le même axe (24.), le triangle circonscrit a l'un de ses sommets au foyer, et les deux autres aux points circulaires à l'infini: donc la conique qui fait partie de la Cayleyenne est un cercle.

Les droites dont le pôle est le point o (concours des tangentes de rebroussement de la courbe fondamentale C^3) sont la droite à l'infini et les côtés du triangle formé par les points de rebroussement (Introd. 139, d). Donc le cercle qui, avec la droite à l'infini, constitue la Cayleyenne du système des paraboles P^2, passe par les rebroussements pqr de l'hypocycloïde C^3, et est, par suite, concentrique au cercle C^2 (8.).

Ainsi, ce cercle (pqr) est le lieu des foyers des paraboles P^2 (24.).

26. Les diagonales des quadrilatères qu'on a considérés ci-devant (25.) enveloppent une courbe de la troisième classe, la Hessienne du système des paraboles P^2 (Introd. 133, d). Or, dans une série de paraboles ayant le même foyer et le même axe (24.), l'axe commun est une diagonale du quadrilatère circonscrit; donc la Hessienne est l'enveloppe des axes de toutes les paraboles P^2 *).

La Hessienne touche la droite à l'infini aux deux points circulaires $\omega\omega'$ (Introd. 96, d); donc elle ne possède que trois points de rebroussement. En outre, elle est touchée par les tangentes de rebroussement de la courbe fondamentale (Introd. 100), et par conséquent, ces droites op, oq, or sont des tangentes de rebroussement, aussi pour la Hessienne (Introd. 140, a).

Les points pqr (rebroussements de C^3) sont des points simples de la Hessienne, qui y est touchée par le cercle Cayleyen (Introd. 141), c'est-à-dire, par des droites perpendiculaires aux tangentes de rebroussement.

De ce qui précède il résulte que la Hessienne du système des paraboles P^2 est une courbe inversement homothétique à C^3: o étant le centre et $3:1$ le rapport de similitude. Autrement: la Hessienne est la développée de la courbe fondamentale (13.).

On voit encore que toutes les courbes de la troisième classe touchées par les tangentes communes à C^3 et à sa Hessienne sont des hypocycloïdes semblables et concentriques à C^3. Et les cercles Cayleyens correspondants à ces hyperboloïdes ont le même centre o.

27. Soit Γ^3 l'hypocycloïde semblable et concentrique à C^3, dont les points de rebroussement soient uvw, où C^3 est touchée par le cercle C^2 (8.). Alors l'hypocycloïde C^3 sera la développée et la Hessienne de Γ^3; et le cercle C^2 formera, avec la droite à l'infini, la Cayleyenne de Γ^3; donc:

---

*) Voir à ce propos: *Steiner*, Vermischte Sätze und Aufgaben (t. 55 de ce journal, p. 371).

L'hypocycloïde C^3 est l'enveloppe des axes des paraboles Π^2, enveloppes-polaires des droites du plan, par rapport à l'hypocycloïde Γ^3 (26.);

Le cercle C^2 est le lieu des foyers des paraboles Π^2 (25.);

Deux tangentes perpendiculaires de l'hypocycloïde C^3 sont des droites conjuguées par rapport à toutes les paraboles Π^2 (Introd. 132, b);

Deux paraboles Π^2 sont inscrites dans un même triangle qui est inscrit dans le cercle C^2. Ce triangle, avec la droite à l'infini, forme un quadrilatère complet, dont les diagonales (c'est-à-dire les côtés du triangle circonscrit et homothétique au précédent) sont tangentes à l'hypocycloïde C^3 (25., 26.).

28. Soit $\mu\mu_1\mu_2$ l'un de ces triangles inscrits dans C^2 et circonscrits à deux (et par suite à un nombre infini de) paraboles Π^2. Parmi les paraboles inscrites dans le triangle $\mu\mu_1\mu_2$ il y a trois systèmes de deux points, c'est-à-dire $(\mu\nu)$, $(\mu_1\nu_1)$, $(\mu_2\nu_2)$: en désignant par ν, ν_1, ν_2 les points à l'infini sur les directions $\mu_1\mu_2$, $\mu_2\mu$, $\mu\mu_1$. Au point μ se croisent deux tangentes perpendiculaires de C^3, qui, étant conjuguées par rapport à toute parabole Π^2 (27.), divisent harmoniquement les segments $\mu_1\nu_1$, $\mu_2\nu_2$, et par suite sont les bissectrices de l'angle $\mu_1\mu\mu_2$. Ainsi les trois couples de tangentes perpendiculaires de l'hypocycloïde, qui se coupent aux points $\mu\mu_1\mu_2$, sont les bissectrices des angles du triangle formé par ces points: ces six tangentes sont donc les côtés de l'un des quadrangles orthogonaux *abcd*, qu'on a déjà rencontrés (14.).

Les troisièmes tangentes qu'on peut mener des points $\mu\mu_1\mu_2$ à l'hypocycloïde sont resp. parallèles aux côtés $\mu_1\mu_2$, $\mu_2\mu$, $\mu\mu_1$ (27.), et par suite (10.) elles sont resp. perpendiculaires aux diamètres de C^2 qui joignent les milieux des côtés opposés du quadrangle formé par les bissectrices.

Ces troisièmes tangentes forment un triangle, dont les côtés ont leurs milieux en μ, μ_1, μ_2; donc ce triangle est l'un des triangles *abc* déjà considérés (14.); et les nouvelles intersections du cercle C^2 par les côtés sont les pieds des hauteurs du même triangle; et ces hauteurs sont elles-mêmes tangentes à l'hypocycloïde.

29. Deux triangles analogues à $\mu\mu_1\mu_2$ sont inscrits dans le cercle C^2, circonscrits à une parabole Π^2 (27.) et conjugués à une hyperbole équilatère Q^2 du réseau dont l'hypocycloïde C^3 est la courbe Cayleyenne (16.); donc le cercle C^2 et la parabole Π^2 sont polaires réciproques par rapport à l'hyperbole équilatère Q^2. Ainsi le cercle est circonscrit à un nombre infini de triangles conjugués à l'hyperbole équilatère et circonscrits à la parabole.

Toute tangente de la parabole coupe le cercle et l'hyperbole équilatère en quatre points harmoniques; et réciproquement les tangentes qu'on peut mener d'un point du cercle à la parabole et à l'hyperbole équilatère forment un faisceau harmonique. (Introd. 108, g.)

Le centre de l'hyperbole équilatère Q^2 est un point μ du cercle C^2 (16.); le triangle $s\omega\omega'$ est inscrit dans le cercle et conjugué à l'hyperbole; donc il est circonscrit à la parabole Π^2, c'est-à-dire que μ est le foyer de cette parabole.

La tangente au cercle en μ doit être conjuguée à la direction de la parabole, par rapport à l'hyperbole équilatère; donc les asymptotes de cette dernière courbe sont les bissectrices des angles compris par l'axe de la parabole et la tangente du cercle. Ceci revient à une propriété déjà démontrée (7.), car l'axe de la parabole (27.) et les asymptotes de l'hyperbole équilatère (16.) sont les tangentes de l'hypocycloïde qui se coupent au point μ.

30. Toutes les paraboles Π^2 qui sont tangentes à une même droite G, tangente à l'hypocycloïde C^3, ont le même point de contact (Introd. 90, b).

En regardant toujours I'^3 comme courbe fondamentale, par rapport à laquelle toute droite a son enveloppe-polaire et son pôle (Introd. 130, a), une droite G tangente à l'hypocycloïde C^3 aura son pôle au point g', où C^3 est touchée par une droite G' perpendiculaire à G (Introd. 132, c).

Les paraboles Π^2 qui passent par un même point a sont les enveloppes-polaires des droites tangentes à une même conique A^2, qui est le lieu des pôles des droites issues du point a (Introd. 136).

Il y a un nombre infini de coniques A^2 qui se réduisent à une couple de points gg': ces deux points appartiennent toujours à l'hypocycloïde C^3, et la droite gg' est tangente à cette même courbe. Les points a auxquels correspondent ces coniques A^2 sont situés sur le cercle C^2 (Introd. 136, b).

Toute conique A^2 est tangente à l'hypocycloïde C^3 en trois points, où cette dernière courbe est touchée par les droites resp. perpendiculaires aux tangentes issues du point a (auquel correspond A^2) (Introd. 137). D'où il suit que, si a tombe en o, A^2 coïncide avec le cercle C^2; et que l'hypocycloïde C^3 a un contact du cinquième ordre, aux points u, v, w, avec les coniques A^2 correspondantes aux points de rebroussement p, q, r (8.), considérés comme points a.

En outre, pour un point quelconque a, la conique A^2 coupe l'hypocycloïde C^3 en deux points, qui sont les pôles des tangentes du cercle C^2,

issues du point a. Cette propriété résulte de ce que les droites tangentes à ce cercle ont leurs pôles sur l'hypocycloïde C^3 (Introd. 135).

Les tangentes de l'hypocycloïde C^3, perpendiculaires aux trois droites qui touchent cette courbe et une conique (A^2) aux mêmes points se rencontrent en un point.

Si l'on mène par deux points quelconques six tangentes à l'hypocycloïde, les tangentes resp. perpendiculaires à celles-là forment un hexagone de *Brianchon*.

Si l'on inscrit une conique quelconque dans l'un des triangles abc, dont il a été question ailleurs (14.), cette conique a trois droites tangentes communes avec l'hypocycloïde, autres que les côtés du triangle abc; et, aux points de contact de ces droites, l'hypocycloïde est touchée par une autre conique (Introd. 137, a).

31. Au moyen de l'un quelconque de ces triangles abc, on peut encore engendrer la courbe C^3 d'une autre manière. Concevons la série des coniques Δ^2, inscrites dans le triangle abc et passant par le concours d des hauteurs aa_1, bb_1, cc_1; et supposons qu'on ait tracé, pour chaque conique Δ^2, la droite H tangente en d et la tangente K parallèle à H. On demande quelle courbe est enveloppée par les droites K?

Les coniques Δ^2 qui touchent la droite à l'infini sont deux paraboles (imaginaires) tangentes en d aux droites $d\omega$, $d\omega'$; et on voit aisément que, pour chacune de ces paraboles, la droite K tombe entièrement à l'infini. La droite à l'infini est donc une tangente double (idéelle) de l'enveloppe dont il s'agit. Et comme il n'y a qu'une conique Δ^2 tangente en d à une droite donnée, cette enveloppe n'a qu'une tangente dont la direction soit donnée, et par suite elle est une courbe de la troisième classe.

Si l'on donne à la droite H la position perpendiculaire à l'un des côtés du triangle abc, la tangente K coïncidera avec H; car la conique Δ^2 devient, dans ce cas, l'une des couples de points aa_1, bb_1, cc_1, ou, ce qui est la même chose, l'un des segments aa_1, bb_1, cc_1 considérés comme des ellipses dont une dimension soit nulle.

Si H est parallèle à l'un des côtés du triangle abc, K sera ce même côté; donc les côtés et les hauteurs du triangle abc sont autant de tangentes de la courbe enveloppée par les droites K.

Ainsi cette courbe et l'hypocycloïde C^3 ont la tangente double et six tangentes simples communes; et par suite elles coïncident (19.).

32. Observons que les centres des coniques Δ^2 sont sur la circonférence d'une ellipse inscrite dans le triangle formé par les milieux des côtés du triangle donné abc *), et circonscrite au triangle formé par les milieux des hauteurs.

Et les points des coniques Δ^2, qui sont diamétralement opposés à d, forment une autre ellipse homothétique à la précédente et de dimensions doubles. Ces points et les droites H correspondantes engendrent deux systèmes projectifs. D'où il suit réciproquement que:

Étant donnés une conique E^2 et un faisceau de droites, dont le point commun soit d, et dont les rayons H correspondent anharmoniquement aux points k de E^2; si l'on mène par chaque point k la droite K parallèle au rayon correspondant H, l'enveloppe de K est une courbe de troisième classe et quatrième ordre, pour laquelle la droite à l'infini est la tangente double et les points de contact sont situés sur les rayons H qui correspondent aux points à l'infini de E^2. Cette courbe est donc (9.) une hypocycloïde lorsque, E^2 étant une ellipse, les points à l'infini de cette conique correspondent aux droites $d\omega$, $d\omega'$.

Les points ii', où la droite variable H coupe E^2, forment sur cette ellipse une involution; et les couples de points conjugués ii' correspondent anharmoniquement aux points k. Il y a trois points k qui coïncident avec l'un des points ii' correspondants; c'est-à-dire qu'il y a trois droites H qui passent par les points correspondants k. Ces droites sont les tangentes à l'hypocycloïde qui passent par d.

33. Voici encore un autre moyen d'engendrer cette merveilleuse courbe, douée de propriétés si nombreuses et si élégantes. Soient uvw les sommets d'un triangle équilatère inscrit dans le cercle C^2. Cherchons l'enveloppe d'une corde μs telle que l'on ait, entre les arcs, la relation $\widehat{\mu u} = \frac{1}{3}\widehat{\mu s}$, ou bien $\widehat{\mu u} = \frac{1}{2}\widehat{us}$ (et par suite, $\widehat{\mu v} = \frac{1}{2}\widehat{vs}$, $\widehat{\mu w} = \frac{1}{2}\widehat{ws}$).

Combien de ces cordes μs passent par un point x pris arbitrairement sur la circonférence de C^2? Si l'on considère ce point comme point μ, il suffira de prendre un arc $\widehat{us} = 2\widehat{\mu u}$ (ce qu'on peut faire d'une seule manière), et nous aurons, dans la corde μs, une tangente K de l'enveloppe dont il s'agit. Si, au contraire, on considère x comme point s, il faudra prendre un arc $u\mu = \frac{1}{2}su$, ce qui donne deux points μ, μ' diamétralement opposés; et $s\mu$, $s\mu'$

*) *Hearn*, Researches on curves of the second order etc. (London 1846), p. 39.

seront deux autres tangentes de l'enveloppe. Ces deux tangentes, G, G', sont évidemment perpendiculaires entre elles, et la première tangente K est perpendiculaire au diamètre $\mu\mu'$. Notre enveloppe est donc une courbe de la troisième classe.

De la construction qui précède, on déduit que, pour chacun des points uvw la tangente K coïncide avec l'une des GG'; et, par suite, que l'enveloppe est tangente en uvw au cercle C^2, et que les diamètres ou, ov, ow lui sont aussi tangents.

Cette courbe de troisième classe est donc l'hypocycloïde à trois rebroussements. Par conséquent, les points u, v, w, où l'hypocycloïde est tangente au cercle C^2, sont des points de trisection pour les arcs sous-tendus par une tangente quelconque de la même courbe.

34. On peut encore rencontrer l'hypocycloïde à trois rebroussements dans la théorie des cubiques gauches (courbes à double courbure du troisième ordre). On sait *) qu'un plan quelconque contient une droite tangente en deux points distincts à une surface développable du quatrième ordre, donnée. Si donc on coupe la surface par un plan passant par la tangente double à l'infini, la section sera une courbe de la troisième classe et du quatrième ordre, ayant la tangente double à l'infini. Et par conséquent, si la développable est tangente en deux points (imaginaires conjugués) au cercle imaginaire à l'infini, tout plan, dont la trace à l'infini soit la corde de contact, coupera la surface suivant une hypocycloïde (à trois rebroussements). D'où il résulte que:

Si une surface développable du quatrième ordre est coupée par un plan donné suivant une hypocycloïde, tout plan parallèle au donné coupera la surface suivant une autre hypocycloïde;

Si une cubique gauche passe par les sommets de deux triangles équilatères situés sur deux plans parallèles, et a deux plans osculateurs (imaginaires) parallèles à ces plans, la surface développable formée par les tangentes de la cubique est coupée par tous les plans parallèles aux donnés suivant des hypocycloïdes.

35. Deux hypocycloïdes (à trois rebroussements) sont situées sur deux plans parallèles Π_1, Π_2; cherchons l'enveloppe du plan qui coupe les plans

---

*) *Cayley*, Mémoire sur les courbes à double courbure et sur les surfaces développables (Journal de mathématiques de *Liouville*, t. 10, 1e série, p. 245).

donnés suivant deux tangentes de ces courbes. Si par un point arbitraire de l'espace on mène les plans tangents resp. aux deux hypocycloïdes, ces plans enveloppent deux cônes de troisième classe et quatrième ordre, qui ont un plan bitangent commun (parallèle aux plans donnés) et mêmes génératrices de contact, dirigées aux points ω, ω', où le cercle imaginaire à l'infini est rencontré par les plans Π. Ces cônes n'auront donc plus que trois autres plans tangents communs: ce sont les seuls plans qu'on puisse mener par le sommet (pris arbitrairement) à toucher en même tems les deux hypocycloïdes. L'enveloppe demandée est donc une surface développable de la troisième classe et, par suite, du quatrième ordre. La cubique gauche K^3, courbe cuspidale de cette développable, passe évidemment par les points pqr de rebroussement de chacune des hypocycloïdes données et y est osculée par trois plans qui concourent au centre o du triangle équilatère pqr (8.). C'est-à-dire que ce point o est le foyer*) du plan Π, par rapport à la cubique gauche.

Et, par suite, la droite à l'infini, commune aux plans donnés, est l'intersection de deux plans tangents (imaginaires) de la développable, dont les génératrices de contact passent par les points circulaires ω, ω'. La cubique gauche K^3 a donc trois asymptotes réelles: autrement, elle est une hyperbole gauche**).

De ce qui précède on déduit que tout plan Π, parallèle aux plans donnés, coupe la développable suivant une courbe de troisième classe et quatrième ordre, ayant la tangente double à l'infini et les points de contact en ω, ω', c'est-à-dire, suivant une hypocycloïde C^3, dont les rebroussements pqr appartiennent à la cubique gauche K^3. Le lieu des cercles circonscrits aux triangles équilatères pqr est une hyperboloïde gauche Y***).

Les plans Π sont conjugués, par couples, en involution: de deux plans conjugués, l'un contient la conique lieu des pôles de l'autre, par rapport aux hyperboles H^2 suivant lesquelles la développable est coupée par ses plans tangents. Toutes les coniques, locales des pôles dans les différents plans Π, passent par les points $\omega\omega'$, et par suite sont des cercles, dont les centres (situés sur une droite, corde idéelle de la cubique gauche) sont les points o,

---

*) Mémoire de géométrie pure sur les cubiques gauches (Nouv. Ann. de Math. 2e série, t. I., p. 287). no. 3.

**) Ibid. no. 4, 13.

***) Ibid. no. 8.

centres des triangles équilatères pqr. Ces cercles sont précisément les cercles C^2 (8.) tangents intérieurement aux hypocycloïdes C^3, c'est-à-dire les cercles lieux des intersections des couples de tangentes perpendiculaires *).

Tous ces cercles C^2 sont situés sur un hyperboloïde Φ, semblable à Y. Cet hyperboloïde Φ est, en outre, le lieu de la droite intersection de deux plans (conjugués) tangents à la développable et coupant les plans Π suivant des droites perpendiculaires. Ce même hyperboloïde est inscrit dans la développable, et la courbe de contact est une cubique gauche semblable à K^3 **).

Dans l'involution des plans Π, les plans doubles (imaginaires) sont tangents à la développable, et le plan central Π_0 coupe l'hyperboloïde Φ suivant un cercle C_0^2 qui est le lieu des centres des hyperboles H^2 inscrites dans la développable. Les points uvw, où le cercle C_0^2 est tangent à l'hypocycloïde C_0^3 correspondante, sont les traces des asymptotes de la cubique gauche K^3; et les points $u'v'w'$ de C_0^2, diamétralement opposés à uvw, sont les centres des hyperboles (circonscrites au triangle formé par les rebroussements de l'hypocycloïde), suivant lesquelles la cubique gauche est projétée sur le plan central par les trois cylindres passant par elle ***).

Un plan tangent quelconque de la développable coupe le cercle C_0^2 en deux points s, μ; et le plan tangent conjugué passe par le même point s et par un autre point μ' (10.). Ces deux points $\mu\mu'$, diamétralement opposés dans le cercle, sont les centres des hyperboles H^2, suivant lesquelles la développable est coupée par les deux plans tangents nommés ****).

(36.) Revenons maintenant à un théorème déjà démontré (10.). Étant donné un point s_1 sur la circonférence d'un cercle C^2, menons arbitrairement une corde s_1s_2; ensuite, une autre corde s_2s_3 perpendiculaire au diamètre qui passe par s_1; après, une troisième corde s_3s_4 perpendiculaire au diamètre qui passe par s_2, ... et ainsi de suite. Ces cordes forment une ligne brisée, inscrite dans le cercle et circonscrite à une hypocycloïde douée de trois rebroussements.

La relation entre deux cordes successives $s_{x-1}s_x$, s_xs_{x+1} est telle que l'arc $\overparen{s_xs_{x+1}}$ est double de l'arc $\overparen{s_{x-1}s_x}$, mais dirigé en sens contraire; c'est-à-dire, qu'en regardant comme égaux deux arcs, dont la différence soit un

*) Ibid. no. 3, 11.
**) Ibid. no. 8, 11
***) Ibid. no. 14.
****) Ibid. no. 21.

multiple de la circonférence 2π, l'on a

$$\widehat{s_x s_{x+1}} + 2\widehat{s_{x-1} s_x} = 0,$$

ou bien, en désignant par θ_x l'arc $\widehat{s_1 s_x}$,

$$\theta_{x+1} + \theta_x - 2\theta_{x-1} = 0,$$

d'où l'on tire aisément

$$\theta_{x+1} + 2\theta_x = \theta_2,$$

et par suite

$$(a.) \quad \theta_x = \frac{1-(-2)^{x-1}}{3} \cdot \theta_2.$$

37. Supposons qu'après une série de sommets tous distincts, $s_1 s_2 \dots s_{n-1}$, l'on parvienne à un sommet s_n qui coïncide avec l'un de ceux qui précèdent, s_m; et nommons $\mathfrak{P}$ le polygone fermé dont les sommets successifs sont les points $s_m s_{m+1} \dots s_{n-1}$. La condition pour la coïncidence des points s_n, s_m est évidement que la différence $\theta_n - \theta_m$ soit un multiple de 2π, et, par suite de $(a.)$, $\frac{\theta_2}{2\pi}$ doit être un nombre rationnel.

Soit donc $\frac{\theta_2}{2\pi} = \frac{q}{p}$, où q, p désignent deux nombres entiers (positifs) premiers entre eux. L'équation $(a.)$ donne

$$(a'.) \quad \frac{\theta_n - \theta_m}{2\pi} = \frac{(-2)^{m-1} - (-2)^{n-1}}{3} \cdot \frac{q}{p};$$

par conséquent, si les points s_n, s_m doivent coïncider, il faut satisfaire à la congruence

$$(b.) \quad q(-2)^{m-1}\{(-2)^{n-m} - 1\} \equiv 0 \pmod{3p}.$$

Soit $p = 2^\alpha . p'$, p' étant un nombre impair. La plus petite valeur de m qui satisfait à $(b.)$ est évidemment

$$m = \alpha + 1,$$

d'où il suit que, si p contient le facteur 2^α, le point $s_{\alpha+1}$ sera le premier sommet du polygone $\mathfrak{P}$, c'est-à-dire le sommet où ce polygone se ferme. Autrement: la ligne brisée $s_1 s_2 \dots s_n$ se composera d'une partie ouverte $s_1 s_2 \dots s_{\alpha+1}$, qui a α côtés, et d'un polygone fermé $s_{\alpha+1} \dots s_n$.

Donc, si l'on a simplement $p = 2^\alpha$, il n'y aura pas de polygone fermé; mais la ligne brisée $s_1 s_2 \dots$ s'arrêtra au point $s_{\alpha+1}$, et tous les sommets successifs coïncideront avec celui-ci.

Au contraire, le polygone $\mathfrak{P}$ se ferme au point s_1, toutes les fois que p est un nombre impair.

38. Ayant ainsi déterminé le nombre m, cherchons la valeur de n. Si $p = 2^\alpha . p'$, et p' n'est pas premier à 3, la congruence (b.) devient

$$(c.) \quad (-2)^{n-\alpha-1}-1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 3p').$$

Mais si p' est premier à 3 (quelque soit q), le binome $(-2)^{n-\alpha-1}-1$ étant divisible par 3, la congruence à satisfaire sera la suivante

$$(d.) \quad (-2)^{n-\alpha-1}-1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } p').$$

Ainsi la valeur de $n-\alpha-1$ sera le plus petit exposant qui rend $(-2)^{n-\alpha-1}-1$ divisible par $3p'$ ou par p' suivant que p' est divisible par 3 ou premier à ce nombre. Par exemple,

pour $p=3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 23, 27, 29, 31, \ldots$
on a $m=1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
et $n=4, 5, 5, 7, 10, 6, 6, 6, 13, 8, 13, 9, 11, 10, 7, 23, 28, 28, 11, \ldots$

Ici les propriétés connues des nombres pourraient donner lieu à des théorèmes intéressants, relatifs à ces polygones $\mathfrak{P}$ inscrits dans le cercle et circonscrits à l'hypocycloïde. Par exemple: si à deux nombres p, p_1, premiers entre eux, correspondent deux valeurs de $n-m$, dont l'une soit multiple de l'autre, la plus grande de ces valeurs conviendra aussi au nombre pp_1; donc etc.

39. Je me borne à observer qu'en général la valeur de n est plus petite ou au plus égale à p, sauf le cas que p soit une puissance du nombre 3. Si $p = 3^\beta$, la congruence (c.) devient

$$(-2)^{n-1}-1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 3^{\beta+1}).$$

Dans ce cas, le plus petit exposant est

$$n-1 = 3^\beta,$$

d'où

$$n = p+1.$$

40. Je suppose la circonférence du cercle divisée en p parties égales; soit $\mathfrak{Q}$ le polygone régulier qu'on obtient en joignant les successifs points de division. Je suppose en outre que la ligne brisée $s_1 s_2 \ldots$ (36.) ait son premier côté commun avec le polygone $\mathfrak{Q}$.

Comme les cordes $s_1 s_2$, $s_2 s_3$, ... sous-tendent les arcs $\frac{2\pi}{p}$, $\frac{4\pi}{p}$, $\frac{8\pi}{p}$, ... $\frac{2(p-1)\pi}{p}$, $\frac{2(p-2)\pi}{p}$, ..., il s'ensuit que tous les côtés de la ligne brisée sont des côtés ou des diagonales du polygone régulier $\mathfrak{Q}$. Mais ré-

ciproquement, les sommets de $\mathfrak{O}$ n'appartiennent pas tous en général (39.) à la ligne brisée $s_1 s_2 \dots s_n$, et d'autant moins au polygone $\mathfrak{P}$ qui en fait partie. Seulement, lorsque p est une puissance de 3, on a $m=1$ et $n=p+1$, et par suite, la ligne brisée $s_1 s_2 \dots s_n$ forme un polygone fermé $\mathfrak{P}$ de p côtés, dont les sommets sont, dans un ordre différent, les sommets du polygone régulier $\mathfrak{O}$ (39.).

41. Dans ce cas de $p=3^\beta$, les grandeurs des côtés du polygone $\mathfrak{P}$ se réproduisent avec la période $3^{\beta-1}$; c'est-à-dire que la longueur d'un côté $s_{x-1}s_x$ ne change pas si x reçoit l'accroissement $3^{\beta-1}$. En effet, l'équation (a'.) donne pour l'arc sous-tendu par le côté $s_{x-1}s_x$, l'expression

$$\theta_x-\theta_{x-1} = \frac{(-2)^{x-2}-(-2)^{x-1}}{3}\cdot\frac{2q\pi}{p};$$

ou bien

$$(e.)\qquad \frac{\theta_x-\theta_{x-1}}{2q\pi} = \frac{(-2)^{x-2}}{3^\beta},$$

puisque $p=3^\beta$. Si l'on fait maintenant $x+3^{\beta-1}=y$, on aura

$$\frac{\theta_y-\theta_{y-1}}{2q\pi} = \frac{(-2)^{x-2}}{3^\beta}\cdot(-2)^{3^{\beta-1}};$$

mais l'on a identiquement (39.)

$$(-2)^{3^{\beta-1}}-1 = k.3^\beta,$$

k étant un nombre entier; donc

$$\frac{\theta_y-\theta_{y-1}}{2q\pi} = \frac{(-2)^{x-2}}{3^\beta}+k(-2)^{x-2};$$

c'est-à-dire que l'arc $\theta_y-\theta_{y-1}$ ne diffère de l'arc $\theta_x-\theta_{x-1}$ que par un multiple de 2π; et par suite les côtés $s_{y-1}s_y$, $s_{x-1}s_x$ sont égaux. En ajoutant de nouveau $3^{\beta-1}$ à l'index x, on obtiendra un troisième côté égal à $s_{x-1}s_x$; mais il faut s'arrêter là, car un troisième accroissement $3^{\beta-1}$ donné à x reviendrait à ajouter 2π à l'arc $\widehat{s_{x-1}s_x}$, ce qui reproduirait le premier côté $s_{x-1}s_x$. Ainsi les côtés du polygone $\mathfrak{P}$ (pour $p=3^\beta$) sont égaux trois à trois.

L'équation (e.) fait voir que le rapport $(\theta_x-\theta_{x-1}):\frac{2\pi}{p}$ n'est jamais un multiple de 3; et d'ailleurs, puisque les côtés du polygone $\mathfrak{P}$ sont égaux trois à trois, le nombre des côtés différents sera $3^{\beta-1}$: ce qui est précisément la moitié du nombre qui marque combien il y a de nombres inférieurs et premiers à p. Les côtés du polygone $\mathfrak{P}$ sont donc les côtés et les diagonales, de tous les ordres non divisibles par 3, du polygone régulier $\mathfrak{O}$.

Bologne, 10. mai 1864.

Note zur vorstehenden Abhandlung.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

Die Theorie der in vorstehender Abhandlung so elegant behandelten Curve lässt sich auch analytisch vollständig darstellen, indem man einen ganz analogen Gang einschlägt. Wenn man bei einer Curve dritter Classe, welche eine Doppeltangente besitzt, deren Berührungspunkte ($u = 0$, $v = 0$) und den Schnittpunkt der übrigbleibenden drei Rückkehrtangenten ($w = 0$) zu den Ecken eines Coordinatendreiecks wählt, so kann man die Coordinaten einer Tangente durch die Gleichungen

$$(1.)\quad u = \mu\lambda^2, \quad v = \mu^2\lambda, \quad w = \mu^3 + \lambda^3,$$

den zugehörigen Berührungspunkt aber durch

$$(2.)\quad x = \mu^4 - 2\mu\lambda^3, \quad y = \lambda^4 - 2\mu^3\lambda, \quad z = \mu^2\lambda^2$$

darstellen, wo $\frac{\lambda}{\mu}$ ein willkürlicher Parameter ist. In den letzten Gleichungen braucht man nur $\lambda = \varrho e^{\frac{i\varphi}{2}}$, $\mu = -\varrho e^{-\frac{i\varphi}{2}}$ und zugleich $\frac{y+x}{2z} = \xi$, $\frac{y-x}{2iz} = \eta$ zu setzen, um die Gleichungen der Hypocycloïde zu erhalten:

$$\xi = \cos 2\varphi + 2\cos\varphi,$$
$$\eta = \sin 2\varphi - 2\sin\varphi.$$

Je zwei Tangenten (1.), welche sich nur durch das Vorzeichen von λ unterscheiden, sind conjugirt, und durch ihre Berührungspunkte geht eine dritte Tangente, bei welcher $-\frac{\mu^2}{\lambda^2}$ an die Stelle von $\frac{\lambda}{\mu}$ getreten ist.

Ich bemerke dabei das Auftreten einer Classe von Polygonen, welche *Steiner* nicht behandelt hat. Diese Polygone entstehen auf folgende Weise. Zu einer Tangente a_1 sucht man die conjugirte b_1, zieht durch die Berührungspunkte beider die Tangente a_2, sucht wieder die conjugirte b_2, zieht durch die Berührungspunkte a_3 u. s. w. Wenn nun schliesslich dieser Prozess auf eine Tangente a_{n+1} führt, welche mit a_1 zusammenfällt, so hat man ein geschlossenes n-Eck a_1, a_2; ... a_n vor sich, bei welchem jede Seite in einer der beiden auf ihr liegenden Ecken die Curve berührt. Die Parameter der

Seiten werden, wenn $\frac{\lambda}{\mu}$ der Parameter von b_1 ist:

$$-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1, \quad -\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-2}, \quad -\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4, \quad \dots \quad -\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{(-2)^n}$$

Das Polygon schliesst sich also, wenn $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{(-2)^n-1} = 1$, oder wenn (bei der Hypocycloïde) der zugehörige Werth von φ gleich $\frac{2k\pi}{(-2)^n-1}$ ist. Aber nur dann erhält man ein wirkliches n-Eck, wenn nicht schon $\frac{(-2)^m-1}{(-2)^n-1}\cdot k$ für $m < n$ eine ganze Zahl werden kann. Dies tritt immer und nur dann ein, wenn k von der Form $g\cdot\frac{(-2)^n-1}{(-2)^\mu-1}$ und μ ein Factor von n ist, 1 nicht ausgeschlossen.

Giessen, im Juni 1864.

Ueber das einem Kegelschnitte umbeschriebene und einem andern einbeschriebene Polygon.

(Von den Herren *J. Rosanes* und *M. Pasch* zu Breslau.)

Wenn zwei Kegelschnitte die Eigenschaft haben, dass sich ein Polygon finden lässt, welches um den einen und in den andern beschrieben ist, so muss zwischen den Coefficienten der dieselben bestimmenden Gleichungen und der Seitenzahl des Polygons eine Beziehung stattfinden. Der specielle Fall zweier Kreise beschäftigte schon viele Mathematiker des vorigen und des jetzigen Jahrhunderts. *Euler, Fuss* und *Steiner* fanden die Beziehungen vom Dreieck bis zum Achteck, und erst *Jacobi* (Ueber die Anwendung der elliptischen Functionen auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie, dieses Journal Bd. III, S. 376 ff.) gelang es, für die Voraussetzung, dass ein Kreis den anderen ganz umschliesst, die Bedingung für ein beliebiges Polygon auf überraschende Weise mit Hülfe der elliptischen Functionen aufzustellen. Was jedoch das allgemeine Problem betrifft, so ist dasselbe von *Cayley* (Philos. Mag. Vol. VI, 1853, S. 99 ff. und S. 376 f.) vermittelst der Eigenschaften des elliptischen Integrals I. Gattung gelöst worden, indem er zeigte, wie man bei gegebener Seitenzahl die Bedingung in Form einer mit den Gleichungen der Kegelschnitte einfach zusammenhängenden Determinante angeben kann. Denselben Gegenstand behandelt *Moutard* in einem Anhange zu *Poncelets* Applications d'analyse et de géométrie (Recherches analytiques sur les polygones simultanément inscrits et circonscrits à deux coniques, S. 535 ff.) und gelangt dabei zu einer Functionalgleichung, deren Auflösung ihn nicht auf die elliptischen Functionen selbst, sondern auf die nahe verwandten Functionen Θ und H führt.

Die gegenwärtige Abhandlung, deren Verfasser von den letztgenannten beiden Arbeiten bis vor kurzer Zeit keine Kenntniss hatten, scheint von diesen sowohl in Bezug auf den eingeschlagenen Weg, als die Form der Resultate, welche grosse Aehnlichkeit mit den von *Jacobi* gefundenen Formeln aufweist, sosehr verschieden, dass die Veröffentlichung derselben wohl gerechtfertigt erscheinen dürfte.

§. 1.

Wenn zwei Kegelschnitte A und B in homogen gemachten Parallelcoordinaten durch die Gleichungen

$$F(x,y,z) = a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz = 0,$$
$$f(x,y,z) = b_{11}x^2+b_{22}y^2+b_{33}z^2+2b_{12}xy+2b_{13}xz+2b_{23}yz = 0$$

dargestellt werden, so kann man bekanntlich drei lineare homogene Functionen

$$X = ax+by+cz,\quad Y = a_1x+b_1y+c_1z,\quad Z = a_2x+b_2y+c_2z$$

und drei Grössen α, β, γ so bestimmen, dass

$$(1.)\qquad X^2+Y^2+Z^2 \equiv F(x,y,z),\quad \alpha X^2+\beta Y^2+\gamma Z^2 \equiv f(x,y,z)$$

wird. Wir stellen hier die Auflösung dieses Problems auf eine kurze Weise dar, theils weil wir die Beschränkungen kennen lernen müssen, denen ihre Giltigkeit unterliegt, theils weil die Form der Resultate für die vorliegende Untersuchung, wie man sehen wird, von Wichtigkeit ist.

Setzt man nämlich in den identisch zu erfüllenden Gleichungen (1.) nach Substituirung der Ausdrücke für X, Y, Z die Coefficienten beider Seiten gleich und eliminirt die Grössen a, b, c zwischen den so entstandenen zwölf Gleichungen, so erhält man:

$$\begin{aligned}
b_{11}-\alpha a_{11} &= (\beta-\alpha)a_1^2+(\gamma-\alpha)a_2^2, & b_{12}-\alpha a_{12} &= (\beta-\alpha)a_1b_1+(\gamma-\alpha)a_2b_2,\\
b_{22}-\alpha a_{22} &= (\beta-\alpha)b_1^2+(\gamma-\alpha)b_2^2, & b_{13}-\alpha a_{13} &= (\beta-\alpha)a_1c_1+(\gamma-\alpha)a_2c_2,\\
b_{33}-\alpha a_{33} &= (\beta-\alpha)c_1^2+(\gamma-\alpha)c_2^2, & b_{23}-\alpha a_{23} &= (\beta-\alpha)b_1c_1+(\gamma-\alpha)b_2c_2.
\end{aligned}$$

Hieraus schliesst man, dass die Determinante

$$(2.)\qquad \begin{vmatrix} b_{11}-\alpha a_{11}, & b_{12}-\alpha a_{12}, & b_{13}-\alpha a_{13}\\ b_{12}-\alpha a_{12}, & b_{22}-\alpha a_{22}, & b_{23}-\alpha a_{23}\\ b_{13}-\alpha a_{13}, & b_{23}-\alpha a_{23}, & b_{33}-\alpha a_{33}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & a_1\sqrt{\beta-\alpha}, & a_2\sqrt{\gamma-\alpha}\\ 0, & b_1\sqrt{\beta-\alpha}, & b_2\sqrt{\gamma-\alpha}\\ 0, & c_1\sqrt{\beta-\alpha}, & c_2\sqrt{\gamma-\alpha}\end{vmatrix}^2 = 0$$

ist, und hat somit eine kubische Gleichung, deren Wurzeln α, β, γ sind. Dieselben können zunächst nicht sämmtlich gleich sein, wofern die Kegelschnitte nicht identisch sind. Schliessen wir auch die Fälle aus, dass die beiden Kegelschnitte sich berühren oder einer von ihnen in ein Linienpaar (oder einen Punkt) degenerirt, so sind die Grössen α, β, γ endlich und von einander und von Null verschieden. In diesem Falle kann man immer wegen (2.) neun Grössen $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ bestimmen, welche den Gleichungen

$$(3.)\quad f'(x_0)-\alpha F'(x_0)=0,\quad f'(y_0)-\alpha F'(y_0)=0,\quad f'(z_0)-\alpha F'(z_0)=0,$$

$$(4.)\quad f'(x_1)-\beta F'(x_1)=0,\quad f'(y_1)-\beta F'(y_1)=0,\quad f'(z_1)-\beta F'(z_1)=0,$$

$$(5.)\quad f'(x_2)-\gamma F'(x_2)=0,\quad f'(y_2)-\gamma F'(y_2)=0,\quad f'(z_2)-\gamma F'(z_2)=0$$

genügen, in welchen man z. B. mit $F'(x_0)$ den Werth von $\frac{\partial F}{\partial x}$ für $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ bezeichnet hat. Wenn man dann mit X_0, Y_0, Z_0 die Resultate der Substitution von x_0, y_0, z_0 in X, Y, Z bezeichnet, so gehen die Gleichungen (3.) über in:

$$(\beta-\alpha)a_1Y_0+(\gamma-\alpha)a_2Z_0=0,\quad (\beta-\alpha)b_1Y_0+(\gamma-\alpha)b_2Z_0=0,\quad (\beta-\alpha)c_1Y_0+(\gamma-\alpha)c_2Z_0=0,$$

woraus sich ergiebt:

$$Y_0=Z_0=0.$$

Es ist demnach

$$F(x_0,y_0,z_0)=X_0^2,\quad F'(x_0)=2aX_0,\quad F'(y_0)=2bX_0,\quad F'(z_0)=2cX_0.$$

Auf diese Weise findet man für die Coefficienten a, b, c und in ganz entsprechender für die übrigen die Werthe:

$$(6.)\quad \begin{cases} a=\dfrac{F'(x_0)}{2\sqrt{F(x_0,y_0,z_0)}}, & b=\dfrac{F'(y_0)}{2\sqrt{F(x_0,y_0,z_0)}}, & c=\dfrac{F'(z_0)}{2\sqrt{F(x_0,y_0,z_0)}},\\ a_1=\dfrac{F'(x_1)}{2\sqrt{F(x_1,y_1,z_1)}}, & b_1=\dfrac{F'(y_1)}{2\sqrt{F(x_1,y_1,z_1)}}, & c_1=\dfrac{F'(z_1)}{2\sqrt{F(x_1,y_1,z_1)}},\\ a_2=\dfrac{F'(x_2)}{2\sqrt{F(x_2,y_2,z_2)}}, & b_2=\dfrac{F'(y_2)}{2\sqrt{F(x_2,y_2,z_2)}}, & c_2=\dfrac{F'(z_2)}{2\sqrt{F(x_2,y_2,z_2)}}.\end{cases}$$

Bekanntlich stellen die Gleichungen $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ die Seiten des in Bezug auf die Kegelschnitte A und B sich selbst conjugirten Dreiecks vor.

Wir beginnen die Untersuchung mit dem Falle, wo *die Wurzeln α, β, γ der Gleichung* (2.) *sämmtlich reell* sind.

Die Functionen X, Y, Z sind dann, weil die Grössen x_0, y_0, z_0, x_1, u. s. w. reell sind, reell oder in $i=\sqrt{-1}$ multiplicirt, und zwar müssen, wenn die Gleichung $X^2+Y^2+Z^2=0$ eine reelle Curve repräsentiren soll, von den Functionen X^2, Y^2, Z^2 zwei dasselbe Zeichen haben, die dritte das entgegengesetzte. Es sei Z^2 diese letztere und damit festgesetzt, welche Wurzel der Gleichung (2.) unter γ gemeint ist. In der Gleichung des zweiten Kegelschnittes $\alpha X^2+\beta Y^2+\gamma Z^2=0$ können wir noch festsetzen, dass γ positiv und dass dann von den beiden anderen Coefficienten α der kleinere sei. Wie man leicht sieht, können α und β nicht gleichzeitig negativ sein.

Wir führen nun für die Curve A die Variable φ ein durch die Gleichungen

$$(7.)\quad i\frac{X}{Z} = \sin\varphi, \quad i\frac{Y}{Z} = \cos\varphi$$

und für die Curve B die Variable ψ durch die Gleichungen

$$(8.)\quad i\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\,\frac{X}{Z} = \sin\psi, \quad i\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\,\frac{Y}{Z} = \cos\psi.$$

Hierdurch wird von jedem Punkte des Kegelschnittes A ein reeller Werth von φ (bis auf ein Vielfaches von 2π) bestimmt und umgekehrt. Jeder Punkt des Kegelschnittes B bestimmt ebenso einen, wenn auch nicht immer reellen, Werth von ψ bis auf ein Vielfaches von 2π. —

Eliminirt man Y zwischen den Gleichungen der beiden Kegelschnitte, so erhält man für ihre Durchschnittspunkte:

$$(9.)\quad \sin^2\varphi = \frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}, \quad \sin^2\psi = \frac{\alpha}{\gamma}\,\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}.$$

Eine Tangente an der Curve B im Punkte (ψ) hat die Gleichung

$$i\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\,\frac{X}{Z}\sin\psi + i\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\,\frac{Y}{Z}\cos\psi = 1,$$

und für ihren Schnittpunkt mit A gilt daher:

$$(10.)\quad \cos\varphi\cos\psi + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sin\varphi\sin\psi = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}.$$

Löst man diese Gleichung in Bezug auf $\sin\varphi$ auf und setzt die beiden erhaltenen Werthe einander gleich, so findet man, dass in den Berührungspunkten von A mit den gemeinschaftlichen Tangenten von A und B

$$(11.)\quad \sin^2\varphi = \frac{\alpha}{\gamma}\,\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}$$

ist. — Aus den Gleichungen (9.) und (11.) ersieht man gleich, dass in dem jetzt behandelten Falle die Realität eines Schnittpunktes oder einer gemeinschaftlichen Tangente der beiden Kegelschnitte die Realität auch der übrigen nach sich zieht.

Betrachtet man die nach den getroffenen Bestimmungen überhaupt noch möglichen fünf Fälle für die Stellung von α, β, γ gegen einander und gegen Null mit Zuziehung der Gleichungen (9.) und (11.), so erhält man folgende Unterscheidungen:

	alle Schnittpunkte	alle gemeinschaftlichen Tangenten
$0<\alpha<\beta<\gamma$ oder $0<\gamma<\alpha<\beta$:	imaginär,	imaginär,
$\alpha<0<\beta<\gamma$:	imaginär,	reell,
$\alpha<0<\gamma<\beta$:	reell,	imaginär,
$0<\alpha<\gamma<\beta$:	reell,	reell.

Wir werden diese Fälle gesondert untersuchen.

§. 2.

Wenn die beiden Curven *sämmtliche Schnittpunkte und gemeinschaftlichen Tangenten imaginär* haben, so sahen wir, dass entweder $0<\alpha<\beta<\gamma$ oder $0<\gamma<\alpha<\beta$ ist. Man erkennt jedoch leicht, dass bei der Lösung des Problems, welches den Gegenstand dieser Schrift bildet, das Erste sofort auszuschliessen ist. Denn eine vom Punkte $\varphi=0$ des Kegelschnittes A an B gelegte Tangente gäbe sonst einen Berührungspunkt, in welchem nach (10.) $\psi=\arccos\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$, also imaginär ist. In unserem Falle entsprechen aber nach (8.) allen reellen Punkten von B reelle Werthe von ψ und umgekehrt. Folglich ist jene Tangente imaginär, d. h. A liegt ganz innerhalb von B, und es ist daher ein Polygon, welches der Curve A einbeschrieben, der Curve B umschrieben ist, a priori undenkbar. Wir werden deshalb nur den Fall $0<\gamma<\alpha<\beta$ in Betracht ziehen.

Legt man von einem Punkte P_0 des Kegelschnittes A eine Tangente an den Kegelschnitt B, welche mit A einen zweiten Schnittpunkt P_1 liefert, von P_1 eine Tangente, welche den Schnittpunkt P_2 giebt, u. s. f. bis zu P_n, so wird ein dem Kegelschnitt A einbeschriebenes, dem Kegelschnitt B umbeschriebenes Polygon von n Seiten entstanden sein, sobald P_n mit P_0 zusammenfällt. Wenn man jetzt die Werthe von φ für die Punkte $P_0, P_1, \dots P_n$ mit resp. $\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_n$ in der Weise bezeichnet, dass man unter den unendlich vielen möglichen Werthen von φ_0 einen beliebig auswählt und von ihm aus continuirlich zu $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ übergeht, so wird φ beim Durchlaufen der Peripherie von P_0 durch $P_1, P_2, \dots$ bis P_n sich um so viele Vielfache von 2π verändert haben, als man vollständige Umläufe durch die Peripherie gemacht hat. Nennen wir also m die Anzahl dieser Umläufe, so wird sein

$$\varphi_n = \varphi_0 \pm 2m\pi.$$

Nach (10.) ist nun, wenn (ψ) der Berührungspunkt der Tangente P_0P_1 an B ist:

$$(12.)\quad \cos\varphi_0\cos\psi+\sin\varphi_0\sin\psi\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}},\quad \cos\varphi_1\cos\psi+\sin\varphi_1\sin\psi\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}.$$

Die in die Augen fallende Aehnlichkeit dieser Formeln mit denen, welche für die Addition der elliptischen Integrale erster Gattung gelten, führt leicht auf den Gedanken, dieselben hier einzuführen. In der That, setzt man

$$\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} = \cos\omega, \quad \frac{\alpha}{\beta} = 1-k^2\sin^2\omega = \Delta^2(\omega, k),$$

so dass ω reell und

$$k^2 = \frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}$$

positiv und kleiner als die Einheit ist, so erhält man sofort zwischen ψ, φ_0, φ_1 die einfachen Beziehungen:

$$\int_0^{\varphi_0+2h\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}-\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \pm\int_0^{\omega}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \int_0^{\varphi_1+2h'\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}-\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \mp\int_0^{\omega}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

wo h und h' gewisse ganze Zahlen sind, folglich:

$$\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}-\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2\int_0^{\pm\omega-(h-h')\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Bezeichnen wir die obere Grenze rechts mit ζ und setzen das Integral

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = F(\varphi),$$

so ist

$$(13.) \qquad F(\varphi_0)-F(\varphi_1) = 2F(\zeta),$$

worin $\cos^2\zeta = \cos^2\omega$ und $\Delta^2\zeta = \Delta^2\omega$ ist. Denken wir uns nun die Tangente P_0P_1 am Kegelschnitt B continuirlich herumbewegt, so kommt sie, ohne ihre Schnittpunkte mit A zu verlieren, nach einander in alle möglichen Lagen, welche eine Seite $P_\lambda P_{\lambda+1}$ des in Rede stehenden Polygons haben kann. Man kommt zwar, indem man die Tangente P_0P_1 durch Wälzung in die Lage von $P_\lambda P_{\lambda+1}$ bringt, im Allgemeinen nicht zu den Werthen von φ, welche wir unter φ_λ und $\varphi_{\lambda+1}$ verstehen, und zu denen man gelangt, indem man φ von φ_0 durch φ_1, φ_2, ... $\varphi_{\lambda-1}$ bis φ_λ und $\varphi_{\lambda+1}$ zu- oder abnehmen lässt; allein die Vielfachen von 2π, um welche φ_λ und $\varphi_{\lambda+1}$ auf dem einen Wege zu klein oder zu gross herauskommen, sind dieselben und also $F(\varphi_\lambda)-F(\varphi_{\lambda+1})$ in beiden Fällen gleich. Demnach ist

$$F(\varphi_\lambda)-F(\varphi_{\lambda+1}) = 2F(\zeta).$$

Setzt man hierin für λ nach und nach die Werthe 0, 1, ... $(n-1)$ und addirt die so entstehenden Gleichungen, so erhält man:

$$2nF(\zeta) = F(\varphi_0)-F(\varphi_n) = F(\varphi_0)-F(\varphi_0\pm 2m\pi),$$

oder, wenn man $F(\frac{1}{2}\pi)$ mit K bezeichnet:

$$(14.)\qquad 2nF(\zeta) = \mp 4mK$$

und hieraus die gewünschte Bedingung:

$$(15.)\quad \cos^2\mathrm{am}\left(2\frac{m}{n}K, k\right) = \frac{\gamma}{\beta},\quad \varDelta^2\mathrm{am}\left(2\frac{m}{n}K, k\right) = \frac{\alpha}{\beta},\quad \text{wo } k^2 = \frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}.$$

Wie man sich ohne Schwierigkeit überzeugt, giebt eine Zählung der Umläufe nach entgegengesetzter Richtung zu der gerade gewählten die Anzahl derselben gleich $n-m$, was jedoch in den Schlussformeln keinen Unterschied hervorbringt.

Bezeichnet man den zu $\varphi_0 = 0$ gehörigen Werth von φ_1 mit φ', so erhält man aus (10.) folgende Relation:

$$\cos\varphi'\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \pm \sin\varphi'\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\beta}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}},\quad \text{also}\quad \mathrm{tg}^2\frac{\varphi'}{2} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha}{\beta},$$

folglich

$$(16.)\quad \sin\varphi' = \pm 2\frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma(\beta-\gamma)}}{\beta\gamma+\alpha(\beta-\gamma)},\quad \cos\varphi' = \frac{\beta\gamma-\alpha(\beta-\gamma)}{\beta\gamma+\alpha(\beta-\gamma)},\quad \varDelta\varphi' = \frac{\alpha\gamma+\beta(\alpha-\gamma)}{\beta\gamma+\alpha(\beta-\gamma)},$$

wo man für $\varDelta\varphi'$ einen positiven Werth genommen hat. Setzt man in (13.) $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \varphi'$, so folgt: $F(\varphi') = -2F(\zeta)$ und aus (14.) daher: $4mK = \pm nF(\varphi')$. Die Schlussbedingung geht mithin in eine der folgenden über (welche natürlich auch mittelst der Formel für $\cos\mathrm{am}\,2u$ aus (15.) abgeleitet werden können):

$$(17.)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\left(4\frac{m}{n}K, k\right) = \pm\frac{2\sqrt{\alpha\beta\gamma(\beta-\gamma)}}{\beta\gamma+\alpha(\beta-\gamma)},\quad \cos\mathrm{am}\left(4\frac{m}{n}K, k\right) = \frac{\beta\gamma-\alpha(\beta-\gamma)}{\beta\gamma+\alpha(\beta-\gamma)}, \\ \varDelta\mathrm{am}\left(4\frac{m}{n}K, k\right) = \frac{\alpha\gamma+\beta(\alpha-\gamma)}{\beta\gamma+\alpha(\beta-\gamma)}. \end{cases}$$

Wir führen diese Formeln speciell an, weil sich in den andern Fällen ähnliche ableiten lassen.

Aus der ganzen Entwicklung sieht man, dass die Formeln (15.) ihre volle Gültigkeit behalten, wenn man in ihnen α mit β vertauscht; denn dies kommt lediglich auf eine Vertauschung von α und X mit β und Y in den Gleichungen (7.) und (8.) hinaus. Nennt man k_0 den dann bei den elliptischen Integralen auftretenden Modulus $\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}$ und K_0 den Werth des vollständigen Integrales mit diesem Modul, so hat man auch folgende Formeln:

$$\cos^2\mathrm{am}\left(2\frac{m}{n}K_0, k_0\right) = \frac{\gamma}{\alpha},\qquad \varDelta^2\mathrm{am}\left(2\frac{m}{n}K_0, k_0\right) = \frac{\beta}{\alpha},$$

und man erkennt leicht, dass

$$k_0^2 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma} = \frac{-k^2}{k_1^2}, \quad \text{wo} \quad k_1^2 = 1-k^2, \quad \text{und} \quad k_0^2 < 0.$$

Vergleicht man diese Formeln mit den unter (15.) gegebenen, so findet man:

$$\cos\operatorname{am}\left(2\frac{m}{n}K_0, \frac{ik}{k_1}\right) = \frac{\cos\operatorname{am}\left(2\frac{m}{n}K, k\right)}{\varDelta\operatorname{am}\left(2\frac{m}{n}K, k\right)}$$

und durch Einsetzen von

$$K_0 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\frac{k^2}{k_1^2}\sin^2\varphi}} = k_1\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}} = k_1 K,$$

wenn man $2\frac{m}{n}K$ mit u bezeichnet, die in der Theorie der elliptischen Functionen bekannte Formel:

$$(18.) \qquad \cos\operatorname{am}\left(k_1 u, \frac{ik}{k_1}\right) = \frac{\cos\operatorname{am}(u,k)}{\varDelta\operatorname{am}(u,k)}.$$

Es liegt nahe, dass man auch auf (17.) diese Bemerkung anwenden darf, dass also auch

$$\cos\operatorname{am}\left(4\frac{m}{n}K_0, k_0\right) = \frac{\alpha\gamma-\beta(\alpha-\gamma)}{\alpha\gamma+\beta(\alpha-\gamma)}.$$

Es verdient bemerkt zu werden, dass man die Variablen φ und ψ im Ganzen auf sechs Arten einführen kann, indem man X, Y, Z und damit α, β, γ in den Gleichungen (7.) und (8.) verschieden anordnet, und dass den sechs Permutationen von α, β, γ

$$\alpha\beta\gamma, \quad \alpha\gamma\beta, \quad \beta\alpha\gamma, \quad \beta\gamma\alpha, \quad \gamma\alpha\beta, \quad \gamma\beta\alpha$$

resp. die sechs Moduli

$$k = \sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}}, \quad \frac{ik}{k_1} = \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}, \quad \frac{1}{k_1} = \sqrt{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}, \quad \frac{ik_1}{k} = \sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}}, \quad \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}}$$

entsprechen. Man kann daher für die Auflösung des behandelten Problems viele Formen herstellen, welche sich aber mit einander in Uebereinstimmung bringen lassen und auf diese Weise zu den Formeln führen müssen, welche in der Theorie der elliptischen Functionen für diese Moduln gegeben werden. Allerdings kann bei einer solchen Vertauschung die Grösse φ complex werden, und die Untersuchung ist dann ohne Zweifel mit grösseren Schwierigkeiten verbunden; allein man wird an den §§. 6 und 7 sehen, dass die Resultate auch dann sich mit ebenso grosser Sicherheit erhalten lassen.

§. 3.

Für zwei Kegelschnitte, bei denen *die vier gemeinschaftlichen Tangenten reell, die vier Schnittpunkte aber imaginär* sind, fanden wir die Bedingung

$$\alpha < 0 < \beta < \gamma.$$

Wir werden für solche eine von der in §. 2. angewandten abweichende Schlussweise gebrauchen, bei welcher wir auch die Einführung imaginärer Grössen vermeiden, welche das Gleichsetzen von $\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$ (welches >1 ist) mit einem Cosinus zur Folge haben würde.

Es seien wieder (φ_0) und (φ_1) die Endpunkte einer Sehne der Curve A, welche die Curve B im Punkte (ψ) berührt; dann führen die Relationen

$$\cos\varphi_0\cos\psi+\sin\varphi_0\sin\psi\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}, \quad \cos\varphi_1\cos\psi+\sin\varphi_1\sin\psi\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$$

zu den Differentialgleichungen:

$$\frac{d\varphi_0}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_0}} = \pm\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}, \quad \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_1}} = \pm\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},$$

indem man wieder die (diesmal negative) Grösse

$$\frac{1-\frac{\alpha}{\beta}}{1-\frac{\gamma}{\beta}} = \frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma} = k^2$$

setzt (die Quadratwurzeln sind reell und mögen positiv genommen werden), und man erhält somit zwischen φ_0 und φ_1 die Relation:

$$\frac{d\varphi_0}{\Delta\varphi_0}\pm\frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1} = 0.$$

In dieser Beziehung ist hier immer das Zeichen $+$ zu nehmen; denn eine einfache Betrachtung lehrt, dass man jede die Curve A schneidende Tangente von B in eine Lage, wo sie auch Tangente an A ist, so hineinbewegen kann, dass ihre Schnittpunkte mit A fortwährend reell sind, und dass dabei die Punkte (φ_0) und (φ_1) von verschiedenen Seiten an den Berührungspunkt jener Lage heranrücken, d. h. dass φ_0 mit wachsendem φ_1 abnimmt und umgekehrt, also $\frac{d\varphi_0}{d\varphi_1}$ negativ ist. Es bleibt demnach noch die Constante in der Gleichung

$$(19.) \qquad F(\varphi_0)+F(\varphi_1) = \text{Const.}$$

zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke erinnere man sich daran, dass die Werthe von φ in den Berührungspunkten T_1, T_2, T_3, T_4 der gemeinschaftlichen Tangenten (welche die Curve B resp. in Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 berühren mögen) mit A der Gleichung

$$\sin^2\varphi = \frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}$$

genügen müssen, und dass wir sie demnach mit resp.

$$t, \quad \pi-t, \quad \pi+t, \quad 2\pi-t$$

bezeichnen dürfen, wo wir t zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ wählen. Es ist nun im vorliegenden Falle zweckmässig, die Variable φ im Kegelschnitt A auf dem Wege $T_1T_2T_3T_4T_1$ von t bis $t+2\pi$ zu zählen. Bezeichnet man dann die Schnittpunkte der Geraden $X=0$ und $Y=0$ mit der Curve A durch resp. D_1, D_3 und D_2, D_4, so ist in den Punkten D_1, D_2, D_3, D_4 $\varphi=$ resp. 2π, $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3\pi}{2}$ und die Aufeinanderfolge der Punkte ist demnach $D_1T_1D_2T_2D_3T_3D_4T_4$.

Nunmehr unterscheiden wir unter den die Curve B tangirenden Sekanten A von zwei Arten.

1. Es sei die (φ_0) und (φ_1) verbindende Tangente von B so gelegen, dass sie nach und nach, indem sie Tangente von B bleibt, in die Lage der gemeinschaftlichen Tangente $T_1\Theta_1$ gebracht werden kann, ohne indess die Realität ihrer Schnittpunkte mit A zu verlieren. Da in diesem Falle die Tangente $T_1\Theta_1$ selbst als eine besondere Lage betrachtet werden kann, für welche $\varphi_0=t$, $\varphi_1=t+2\pi$ ist, so erhalten wir aus (19.) die Formel:

$$(20.) \qquad F(\varphi_0)+F(\varphi_1) = 2F(t)+4K.$$

Eine solche Tangente von B muss noch ein zweites Mal, ohne dass φ_0 und φ_1 durch imaginäre Werthe hindurchgehen, in die Lage einer gemeinschaftlichen Tangente übergeführt werden können, und da die Gleichung (20.) durch $\varphi_0=\varphi_1=\pi+t$ erfüllt wird, so ist dies die Tangente $T_3\Theta_3$. Es folgt hieraus, dass die hierher gehörigen Linien sämmtlich den nicht durch Θ_2 und Θ_4 gehenden Bogen $\Theta_1\Theta_3$ des Kegelschnitts B berühren und dass von ihren Schnittpunkten mit A der eine immer auf dem Bogen $T_1T_2T_3$, der andere auf $T_1T_4T_3$ liegt.

2. Wenn die B berührende Linie (φ_0, φ_1) in die Lage der $T_2\Theta_2$ so bewegt werden kann, dass dabei φ_0 und φ_1 ununterbrochen reell bleiben, so schliessen wir aus der Analogie mit dem vorigen Falle, dass die Tangente auf der andern Seite in $T_4\Theta_4$ übergehen, stets den nicht durch Θ_1 und Θ_3

gehenden Bogen $\Theta_2\Theta_4$ berühren und einen Punkt auf $T_2T_3T_4$, einen auf $T_2T_1T_4$ haben wird. Aber es ist hier nöthig, zwei Unterabtheilungen zu trennen. Wenn nämlich beide Punkte (φ_0), (φ_1) auf dem Bogen $T_1D_3T_4$ liegen, so muss zwischen φ_0 und φ_1 eine Beziehung stattfinden, welche durch $\varphi_0=\varphi_1=\pi-t$ erfüllt wird, also folgende:

$$(21.)\qquad -F(\varphi_0)-F(\varphi_1) = 2F(t)-4K.$$

Wenn dagegen der eine jener beiden Punkte auf $T_1D_1T_4$ liegt, so besteht offenbar die Relation

$$(22.)\qquad -F(\varphi_0)-F(\varphi_1) = 2F(t)-8K,$$

welcher man durch $\varphi_0=\varphi_1=2\pi-t$ genügt. — Man ersieht leicht aus diesen Resultaten, dass durch jeden Punkt von A zwei Tangenten an B gelegt werden können, von denen die eine zu (20.), die andere zu (21.) oder (22.) gehört.

Es sei nun ein n-Eck vorhanden, welches dem Kegelschnitt A einbeschrieben, dem Kegelschnitt B umbeschrieben ist, und $\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_{n-1}, \varphi_n=\varphi_0$ der Reihe nach die Werthe von φ (in dem angegebenen Sinne gewählt) in seinen Ecken. Wir können annehmen, dass die erste Seite (φ_0, φ_1) zu der ersten der beiden hier zu unterscheidenden Arten gehört; dann ist klar, dass (φ_1, φ_2) zur zweiten, (φ_2, φ_3) zur ersten u. s. w., $(\varphi_{n-1}, \varphi_n)$ endlich zur zweiten gehört. Die Seitenzahl n kann also nur gerade sein. Mit $\varepsilon_{2\lambda}$ bezeichnen wir eine Grösse, welche $=1$ oder $=0$ sein soll, jenachdem die $(2\lambda)^{\text{te}}$ Polygonseite den Kegelschnitt A auf $T_1D_1T_4$ schneidet oder nicht, und mit m die Anzahl derjenigen unter diesen Grössen, welche $=1$ sind, d. h. die Anzahl der auf dem Bogen $T_1D_1T_4$ liegenden Polygonecken. (Auf dem Bogen $T_1D_2T_2$ liegen also $\frac{1}{2}n-m$ Ecken.) Dann folgt aus den Formeln (20.), (21.), (22.):

$$\begin{aligned}
+F(\varphi_0)\ +F(\varphi_1)\ &= 2F(t)+4K,\\
-F(\varphi_1)\ -F(\varphi_2)\ &= 2F(t)-4K-4\varepsilon_2 K,\\
+F(\varphi_2)\ +F(\varphi_3)\ &= 2F(t)+4K,\\
-F(\varphi_3)\ -F(\varphi_4)\ &= 2F(t)-4K-4\varepsilon_4 K,\\
&\dots\dots\dots\\
+F(\varphi_{n-2})+F(\varphi_{n-1}) &= 2F(t)+4K,\\
-F(\varphi_{n-1})-F(\varphi_0)\ &= 2F(t)-4K-4\varepsilon_n K,
\end{aligned}$$

und wenn man diese Gleichungen addirt:

$$0 = 2nF(t)-4mK$$

oder

$$F(t) = 2\frac{m}{n}K.$$

Die gewünschte Bedingung ist also:

$$(23.)\quad \sin^2\operatorname{am}\left(2\frac{m}{n}K, k\right) = \frac{\alpha}{\gamma}\,\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha},\quad \text{wo}\quad k^2 = \frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}.$$

Die eben gefundene Bedingung, welche von der Bedingung (15.) verschieden ist, giebt uns zu ähnlichen Bemerkungen Veranlassung, wie diese.

Wir machen zuvörderst darauf aufmerksam, dass die von D_1 ausgehenden Tangenten an B die Curve A zum zweiten Male in Punkten (φ') schneiden, für welche nach (16.)

$$\cos\varphi' = \frac{\beta\gamma-\alpha(\beta-\gamma)}{\beta\gamma+\alpha(\beta-\gamma)}$$

ist. Auf eine dieser Tangenten lässt sich die Formel (20.) anwenden, so dass

$$F(2\pi)+F(\varphi') = 2F(t)+4K \quad \text{oder} \quad F(\varphi') = 2F(t),$$

also

$$F(\varphi') = 4\frac{m}{n}K$$

und mithin

$$(24.)\quad \cos\operatorname{am}\left(4\frac{m}{n}K, k\right) = \frac{\beta\gamma-\alpha(\beta-\gamma)}{\beta\gamma+\alpha(\beta-\gamma)}$$

ist, — ein Resultat, welches mit dem für den ersten Fall unter (17.) gegebenen übereinstimmt.

Will man die Formel (23.) der für den ersten Fall gegebenen ähnlicher darstellen, so kann man sie leicht auf die Form

$$\cos^2\operatorname{am}\left(2\frac{m}{n}K+K+iK_1, k\right) = \frac{\gamma}{\beta}$$

bringen, zu welcher man natürlich auch muss direct gelangen können. Was am Ende von §. 2 über die verschiedenen möglichen Wege gesagt ist, gilt auch hier. Was den in diesem § eingeschlagenen Weg betrifft, so hätte derselbe keiner Aenderung bedurft, wenn man φ und ψ durch die Gleichungen respective

$$i\frac{Y}{Z} = \sin\varphi,\quad i\frac{X}{Z} = \cos\varphi \quad \text{und} \quad i\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\,\frac{Y}{Z} = \sin\psi,\quad i\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\,\frac{X}{Z} = \cos\psi$$

eingeführt hätte; es hätte nur unter m die Anzahl der auf dem Bogen $T_1D_2T_2$ liegenden Polygonecken verstanden werden müssen. Es folgt hieraus, dass man in der erhaltenen Bedingung α mit β vertauschen darf, sobald man $\frac{1}{2}n-m$

statt m setzt. Dies führt zu folgendem Resultate:

$$\sin^2 \mathrm{am}\left(K_0 - 2\frac{m}{n}K_0,\, k_0\right) = \frac{\beta}{\gamma}\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta},\quad \cos \mathrm{am}\left(4\frac{m}{n}K_0,\, k_0\right) = -\frac{\alpha\gamma-\beta(\alpha-\gamma)}{\alpha\gamma+\beta(\alpha-\gamma)},$$

wo

$$k_0^2 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma} < 0$$

ist. Da aber $k_0^2 = -\frac{k^2}{k_1^2}$ und $K_0 = k_1 K$ ist, so gelangt man zu der Gleichung

$$\sin^2 \mathrm{am}\left(k_1 K - 2\frac{m}{n}k_1 K,\, \frac{ik}{k_1}\right) = \cos^2 \mathrm{am}\left(2\frac{m}{n}K,\, k\right),$$

so dass sich auf diesem Wege, wenn man (18.) berücksichtigt und $K-2\frac{m}{n}K = u$ setzt, die bekannte Formel

$$\cos \mathrm{am}(K-u,\, k) = \frac{k_1 \sin \mathrm{am}(u,k)}{\Delta \mathrm{am}(u,k)}$$

bestätigt findet. Diese Formel erlaubt uns auch, unsere Bedingung in folgende umzugestalten:

$$\sin^2 \mathrm{am}\left(K - 2\frac{m}{n}K,\, k\right) = \frac{\beta}{\beta-\alpha},$$

welche übrigens unmittelbar abgeleitet werden kann, wenn man beachtet, dass die in den Durchschnittspunkten der Geraden $Z=0$ mit dem Kegelschnitt B an letzteren gelegten Tangenten den Kegelschnitt A in Punkten schneiden, für welche

$$(25.)\qquad \sin^2\varphi = \frac{\beta}{\beta-\alpha}$$

ist. (Wenn nämlich die Functionen X, Y, Z im Berührungspunkte einer Tangente an B die Werthe X', Y', Z' und in einem ihrer Schnitpunkte mit A die Werthe X'', Y'', Z'' haben, so bestehen die Gleichungen

$$\alpha X'X'' + \beta Y'Y'' + \gamma Z'Z'' = 0,\quad \alpha X''^2 + \beta Y''^2 + \gamma Z''^2 = 0,\quad X''^2 + Y''^2 + Z''^2 = 0.$$

Da hier $Z'=0$ ist, so findet man: $X''\sqrt{\alpha-\beta} = Z''\sqrt{\beta}$ u. s. w.) Auch in der neuen Gestalt muss die Bedingung die Eigenschaft haben, dass man in ihr α, β, m vertauschen darf resp. mit β, α, $\frac{1}{2}n-m$, so dass man auch hat:

$$\sin^2 \mathrm{am}\left(2\frac{m}{n}K_0,\, k_0\right) = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}.$$

Durch Betrachtung des für die Formel (23.) gegebenen Beweises überzeugt man sich aber leicht, dass der Bogen $T_2D_3T_3$ gerade m und $T_3D_4T_4$ dessbalb $\frac{1}{2}n-m$ Polygonecken enthalten muss; denn die Vertauschung von D_1 mit D_3

kommt auf die von Y mit $-Y$ hinaus. Wenn man also die Zahl m einfach als die Anzahl der zwischen irgend zwei aufeinanderfolgenden Punkten T_1, T_2, T_3, T_4 liegenden Polygonecken definirt, so ist die zu erfüllende Bedingung offenbar:

$$\left\{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2m}{n}K, k\right) - \frac{\beta}{\beta-\alpha}\right\}\left\{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2m}{n}K_0, k_0\right) - \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\right\} = 0.$$

§. 4.

Ganz analog der eben beendeten lässt sich die Untersuchung zweier Kegelschnitte führen, bei denen *die vier Schnittpunkte reell, die vier gemeinschaftlichen Tangenten aber imaginär* sind.

In den Gleichungen der beiden Kegelschnitte

$$(A)\ldots X^2+Y^2+Z^2=0, \quad (B)\ldots \alpha X^2+\beta Y^2+\gamma Z^2=0$$

findet diesmals die Bedingung

$$\alpha < 0 < \gamma < \beta$$

statt, und wenn wir daher für den ersten die Variable φ durch die Gleichungen

$$i\frac{X}{Y} = \sin\varphi, \quad i\frac{Z}{Y} = \cos\varphi$$

und für den zweiten ψ durch die Gleichungen

$$i\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\frac{X}{Y} = \sin\psi, \quad i\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\frac{Z}{Y} = \cos\psi$$

einführen, so ist ψ für die reellen Punkte des Kegelschnittes B reell. Da die Werthe von ψ in den Schnittpunkten der beiden Curven S_1, S_2, S_3, S_4, wie man aus (9.) findet, der Gleichung

$$\sin^2\psi = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}$$

genügen müssen, so können wir dieselben mit s, $\pi-s$, $\pi+s$, $2\pi-s$ bezeichnen, indem wir $0 < s < \frac{1}{2}\pi$ wählen. In jedem Punkte der Curve B wollen wir ferner immer denjenigen Werth von ψ wählen, welcher zwischen s und $2\pi+s$ liegt, so dass die Werthe auf dem Wege $S_1S_2S_3S_4S_1$ von s bis $2\pi+s$ wachsen. Endlich seien D_1, D_3 die Durchschnittspunkte der Geraden $X=0$ und D_2, D_4 die der Geraden $Z=0$ mit der Curve B, und mithin in D_1, D_2, D_3, D_4 die Werthe von ψ respective 2π, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, die Aufeinanderfolge demnach $D_1S_1D_2S_2D_3S_3D_4S_4$.

In dem jetzt behandelten Falle ist offenbar der Werth von φ in einem Punkte P von A mit den Werthen ψ_0, ψ_1 von ψ in den Berührungspunkten der von P nach B gehenden Tangenten durch die Gleichungen

$$\cos\varphi\cos\psi_0+\sin\varphi\sin\psi_0\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}=\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}},\quad \cos\varphi\cos\psi_1+\sin\varphi\sin\psi_1\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}=\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$$

verbunden, aus welchen sich die Differentialgleichung

$$(26.)\qquad \frac{d\psi_0}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi_0}}\pm\frac{d\psi_1}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi_1}}=0$$

ergiebt, in welcher

$$\lambda^2=\frac{1-\frac{\alpha}{\gamma}}{1-\frac{\beta}{\gamma}}=\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta},\quad \text{also}\quad \lambda^2<0$$

ist und für die Quadratwurzeln die positiven Werthe genommen werden mögen. Man kann sich aber den Punkt P bis an einen Schnittpunkt von A und B so heranbewegt denken, dass das von ihm ausgehende Tangentenpaar an B ohne Unterbrechung reell bleibt, und dann erkennt man, dass die beiden Berührungspunkte sich jenem Schnittpunkte von verschiedenen Seiten nähern, dass also ψ_0 abnimmt, wenn ψ_1 zunimmt. Wir müssen mithin aus (26.) schliessen:

$$F_1(\psi_0)+F_1(\psi_1)=\text{Const.},$$

indem wir das Integral

$$\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}}=F_1(\psi)$$

setzen, und es handelt sich nun darum, den Werth der Constanten zu ermitteln. Dies geschieht auf ganz entsprechende Weise, wie in §. 3 beim II. Falle, und wir können uns darauf beschränken, das Resultat anzugeben.

1. Wenn der Punkt P sich auf dem Kegelschnitt A bis zum Schnittpunkte S_1 der beiden Kegelschnitte bewegen kann, während die beiden von ihm bestimmten Werthe ψ_0, ψ_1 reell bleiben, so ist die zwischen ψ_0 und ψ_1 bestehende Relation folgende:

$$F_1(\psi_0)+F_1(\psi_1)=2F_1(s)+4L,$$

wo $L=F_1(\frac{1}{2}\pi)$, und es gehören hierher alle Punkte P des die Punkte S_2 und S_4 nicht enthaltenden Bogens S_1S_3 der Curve A. Von den Punkten (ψ_0) und (ψ_1) liegt immer der eine auf $S_1S_2S_3$, der andere auf $S_1S_4S_3$.

2. Wenn der Punkt P auf dem die Punkte S_1 und S_3 nicht enthaltenden Bogen S_2S_4 der Curve A liegt, so befindet sich von den Punkten (ψ_0), (ψ_1)

der eine auf $S_2S_3S_4$, der andere auf $S_2S_1S_4$, und es ist

$$-F_1(\psi_0)-F_1(\psi_1) = 2F_1(s)-4L,$$

wenn die Punkte (ψ_0) und (ψ_1) beide auf $S_1D_3S_4$ liegen, dagegen

$$-F_1(\psi_0)-F_1(\psi_1) = 2F_1(s)-8L,$$

wenn einer derselben auf $S_1D_1S_4$ liegt.

Wenn daher dem Kegelschnitt A ein Vieleck, dessen Seitenzahl n gerade sein muss, einbeschrieben und dem Kegelschnitt B umbeschrieben ist, und m Seiten desselben den Bogen $S_1D_1S_4$ berühren, so zeigt eine wie in §. 3 zu führende Schlussweise, dass die zu erfüllende Bedingung ist:

$$\sin^2\text{am}\left(2\frac{m}{n}L,\lambda\right) = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha},\quad \text{wo}\quad \lambda^2 = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}.$$

Es schliessen sich hieran einige Bemerkungen, die wir nur in Kürze angeben wollen, weil sie denen in §. 3. entsprechen. Es gelten nämlich unter andern auch die Formeln:

$$\cos\text{am}\left(4\frac{m}{n}L,\lambda\right) = \frac{\beta\gamma+\alpha(\beta-\gamma)}{\beta\gamma-\alpha(\beta-\gamma)},\quad \sin^2\text{am}\left(L-2\frac{m}{n}L,\lambda\right) = \frac{\gamma}{\gamma-\alpha},$$

$$\sin^2\text{am}\left(L_0-2\frac{m}{n}L_0,\lambda_0\right) = \frac{\gamma}{\beta}\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma},\quad \cos\text{am}\left(4\frac{m}{n}L_0,\lambda_0\right) = -\frac{\alpha\beta-\gamma(\alpha-\beta)}{\alpha\beta+\gamma(\alpha-\beta)},$$

$$\sin^2\text{am}\left(2\frac{m}{n}L_0,\lambda_0\right) = \frac{\alpha}{\alpha-\gamma},$$

in welchen

$$\lambda_0^2 = \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta} = \frac{-\lambda^2}{1-\lambda^2} = \frac{-\lambda^2}{\lambda_1^2},\quad L_0 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\lambda_0^2\sin^2\varphi}}$$

ist. Den Bogen $S_2D_3S_3$ berühren m, die Bogen $S_1D_2S_2$ und $S_3D_4S_4$ je $\frac{1}{2}n-m$ Seiten des Polygons. Wenn man daher m als die Anzahl der zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten S_1, S_2, S_3, S_4 liegenden Berührungspunkte einführt, so kann man die gewünschte Bedingung in folgender Form geben:

$$\left\{\sin^2\text{am}\left(2\frac{m}{n}L,\lambda\right)-\frac{\gamma}{\gamma-\alpha}\right\}\left\{\sin^2\text{am}\left(2\frac{m}{n}L_0,\lambda_0\right)-\frac{\alpha}{\alpha-\gamma}\right\} = 0.$$

§. 5.

Wenn die beiden Kegelschnitte A und B *vier reelle Schnittpunkte und vier reelle gemeinschaftliche Tangenten* haben, so besteht nach §. 1. die Beziehung

$$0<\alpha<\gamma<\beta.$$

Wir führen hier für die Punkte von A und B die Variablen φ und ψ wieder,

wie im I. und II. Falle, durch die Gleichungen (7.) und (8.) ein, so dass für reelle Punkte φ und ψ reell bestimmt sind, und umgekehrt. Die beiden Geraden $X=0$ und $Y=0$ schneiden beide Curven in reellen Punkten (welche respective D_1, D_3 und D_2, D_4 auf A sein mögen), $Z=0$ beide in imaginären. In den Punkten D_2, D_4 ist $\cos\varphi=0$, $\sin\varphi=\pm 1$ und in den Berührungspunkten der von ihnen an B gelegten Tangenten nach (10.) $\psi=\arc\sin\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$, also imaginär; die Punkte D_2, D_4 liegen also innerhalb des Kegelschnittes B. Dagegen liegen die Punkte D_1, D_3, in welchen $\sin\varphi=0$, $\cos\varphi=\pm 1$ ist, ausserhalb dieser Curve. Hierdurch sind die Linien $X=0$, $Y=0$ unterschieden. — In den Schnittpunkten S_1, S_2, S_3, S_4 der beiden Curven ist

$$\sin^2\varphi = \frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha},$$

und es seien die zugehörigen Werthe von $\varphi: s$, $\pi-s$, $\pi+s$, $2\pi-s$, wo $0<s<\frac{1}{2}\pi$. In den Berührungspunkten T_1, T_2, T_3, T_4 von A mit den gemeinschaftlichen Tangenten (welche B in Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 berühren mögen) ist

$$\sin^2\varphi = \frac{\alpha}{\gamma}\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha},$$

woraus sich die Werthe t, $\pi-t$, $\pi+t$, $2\pi-t$ ergeben mögen, wo $0<t<\frac{1}{2}\pi$ sei. Da $t<s$, so ist auf A die Reihenfolge der bezeichneten Punkte $D_1T_1S_1D_2S_2T_2D_3T_3S_3D_4S_4T_4D_1$. Da überhaupt nur von Punkten der Bogen $S_4T_4D_1T_1S_1$ und $S_2T_2D_3T_3S_3$ Tangenten an B gehen, so werden offenbar, wenn man, von einem Punkte des einen dieser Bogen ausgehend, ein Polygon der gewünschten Art zu bilden sucht, die Ecken stets auf diesem Bogen und die Berührungspunkte auf $\Theta_1S_1S_4\Theta_4$ oder auf $\Theta_2S_2S_3\Theta_3$ liegen. Es genügt, den einen dieser Bogen, z. B. $S_4D_1S_1$ zu betrachten. Indem dann nur Punkte dieses Bogens vorkommen, wollen wir auf demselben φ von $2\pi-s$ bis $2\pi+s$ zählen. Um bald alle zur Untersuchung nöthigen Punkte hineinzuziehen, legen wir in S_1 und S_4 Tangenten an B, welche A zum zweiten Male in Σ_1 und Σ_4 schneiden mögen, und bezeichnen die zu Σ_1 und Σ_4 gehörigen Werthe von φ (in dem angegebenen Sinne gewählt) mit σ_1 und σ_4. Ferner lässt sich leicht zeigen, dass zwischen S_1 und S_4 ein Schnittpunkt von B mit der Geraden $X=0$ liegt, für den $\sin\psi=0$, und wenn wir in diesem eine Tangente an B ziehen, so schneidet sie A in zwei Punkten, in welchen $\varphi=2\pi+\omega$ und $2\pi-\omega$ ist, wenn $\cos^2\omega=\frac{\gamma}{\beta}$ und $0<\omega<\frac{1}{2}\pi$, und welche wegen $1-\frac{\gamma}{\beta}<\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}$ auf $D_1T_1S_1$ und $D_1T_4S_4$ liegen. Endlich ziehe man von D_1 aus zwei Tan-

genten an B; diese schneiden A auf $D_1 T_1 S_1$ und $D_1 T_4 S_4$ in zwei Punkten, in welchen $\varphi = 2\pi + \varphi'$ und $2\pi - \varphi'$ $(0 < \varphi' < \frac{1}{2}\pi)$ sei, wo φ' aus (16.) gefunden wird.

Es seien jetzt (φ_0) und (φ_1) die (auf $S_1 D_1 S_4$ liegenden) Endpunkte einer Sehne von A, welche B (auf $\Theta_1 S_1 S_4 \Theta_4$) in (ψ) berührt. Dann findet man durch Elimination von ψ zwischen den Gleichungen (12.) die Differentialgleichung

$$(27.)\qquad \frac{d\varphi_0}{d\varphi_1} = \pm \frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi_0}}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi_1}},$$

worin $k^2 = \dfrac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma} > 1$ ist. Man sieht, dass $\sin \varepsilon = \dfrac{1}{k}$ ist, wenn man k positiv nimmt. Da nun auf dem Bogen $S_1 D_1 S_4$ stets $2\pi - \varepsilon < \varphi < 2\pi + \varepsilon$ ist, so hat man: $\sin^2 \varphi < \sin^2 \varepsilon$, also $\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}$ reell, und wir setzen fest, dass die Wurzel positiv genommen werde. Es ist dann in (27.) $+$ oder $-$ zu nehmen, je nachdem in der betreffenden Lage φ_0 mit φ_1 gleichzeitig wachsen würde oder nicht. Die Bestimmung dieses Zeichens erfordert diesmal eine dreifache Trennung.

1. Die Sehne (φ_0, φ_1) gehöre zu denen, welche den Bogen $\Theta_1 S_1$ von B berühren. Denkt man sich eine Tangente von B von der Lage $\Theta_1 T_1$ aus so bewegt, dass sie unausgesetzt A in reellen Punkten schneidet, so sieht man, dass, während der eine Schnittpunkt (φ_0) von T_1 bis S_1 geht, der andere (φ_1) sich von T_1 bis Σ_1, d. h. nach entgegengesetzter Richtung bewegt. Folglich ist für diesen Fall

$$\frac{d\varphi_0}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi_0}} = -\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi_1}}.$$

Lässt man nun die Tangente (φ_0, φ_1) sich bis in die Lage $S_1 \Sigma_1$ bewegen, so findet man durch Summirung der Werthe von $\dfrac{d\varphi_0}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi_0}}$ und der Werthe von $\dfrac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi_1}}$ die Integralgleichung

$$\int_{2\pi+\varepsilon}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = -\int_{\sigma_1}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Wir addiren nun auf beiden Seiten die Grösse

$$\int_0^{2\pi+\varepsilon} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \int_0^{\sigma_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

hinzu, in welcher die Quadratwurzel reelle und rein imaginäre Werthe an-

nimmt, und setzen dabei fest, dass man die reellen Werthe positiv, bei den imaginären den Factor von i positiv nehme. Wenn wir in diesem Sinne das (geradlinig zu nehmende) Integral von 0 bis φ mit $F(\varphi)$ bezeichnen, so erhalten wir:

$$(28.)\qquad F(\varphi_0)+F(\varphi_1) = F(\sigma_1)+F(s)+4K,$$

wo wieder $K=F(\frac{1}{2}\pi)$ ist.

2. Die Linie (φ_0, φ_1) berühre den Bogen S_1S_4 von B, und es sei $\varphi_0>\varphi_1$, d. h. Punkt (φ_0) komme auf dem Wege $S_1D_1S_4$ früher als (φ_1). Die Betrachtung ist ähnlich der vorigen; wir denken uns, um alle hierher gehörigen Lagen zu finden, eine Tangente von B von der Lage $S_1\Sigma_1$ am Bogen S_1S_4 von B bis zur Lage Σ_4S_4 bewegt, wobei wir erkennen, dass (φ_0) von S_1 bis Σ_4, (φ_1) von Σ_1 bis S_4 geht, also beide in derselben Richtung, mithin $\frac{d\varphi_0}{d\varphi_1}$ positiv ist. Wir haben daher in (27.) das Zeichen + zu nehmen, und wenn wir die Tangente (φ_0, φ_1) in die Lage $S_1\Sigma_1$ bewegen, so ergiebt die Addition aller Werthe von $\frac{d\varphi_0}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_0}}$ und $\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_1}}$:

$$\int_{2\pi+s}^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_{\sigma_1}^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

also nach Addition von $F(2\pi+s)+F(\sigma_1)$ auf beiden Seiten:

$$(29.)\qquad -F(\varphi_0)+F(\varphi_1) = F(\sigma_1)-F(s)-4K.$$

3. Wenn der Berührungspunkt von (φ_0, φ_1) auf $S_4\Theta_4$ liegt, so ver- verhält sich die Sache ganz analog, wie bei der ersten Art. Es ist diesmal

$$F(\varphi_0)+F(\varphi_1) = F(\sigma_4)-F(s)+4K.$$

Aber da $S_4\Sigma_4$ zur zweiten Art gerechnet werden kann, so ist nach (29.):

$$-F(\sigma_4)+F(2\pi-s) = F(\sigma_1)-F(s)-4K \quad\text{oder}\quad F(\sigma_4) = 8K-F(\sigma_1);$$

also gilt für die dritte Art die Formel:

$$(30.)\qquad -F(\varphi_0)-F(\varphi_1) = F(\sigma_1)+F(s)-12K.$$

Wir stellen uns gleich einige Beziehungen zwischen σ_1, t, ω und φ' her, von denen wir später Gebrauch machen werden. Erstlich muss, da $T_1\Theta_1$ zur ersten Art gehört, die Gleichung (28.) durch $\varphi_0=\varphi_1=2\pi+t$ erfüllt werden, also

$$(31.)\qquad F(\sigma_1) = 2F(t)-F(s)+4K$$

sein. Ferner muss (29.) durch $\varphi_0=2\pi+\omega$, $\varphi_1=2\pi-\omega$ befriedigt werden, so dass

$$(32.)\qquad F(\sigma_1) = -2F(\omega)+F(s)+4K \quad\text{und}\quad F(\omega)+F(t) = F(s).$$

Endlich muss das Werthepaar $\varphi_0 = 2\pi + \varphi'$, $\varphi_1 = 2\pi$ entweder der Gleichung (28.) oder (29.) genügen; es ist demnach

(33.) entweder $F(\sigma_1) = F(\varphi') - F(s) + 4K$ oder $F(\sigma_1) = -F(\varphi') + F(s) + 4K$.

Wenn im vorliegenden Falle von einem Punkte (φ_1) auf A aus zwei Tangenten (φ_0, φ_1) und (φ_1, φ_2) an B gezogen werden, so lehrt die Gleichung (28.), dass die zweite Tangente nur von der zweiten oder dritten Art sein kann, wenn die erste von der ersten Art ist. Ist sie von der zweiten Art, so ist $\varphi_1 > \varphi_2$. Denn wäre $\varphi_2 < \varphi_1$, so hätte man:

$$F(\varphi_0) + F(\varphi_1) = F(\sigma_1) + F(s) + 4K, \quad -F(\varphi_2) + F(\varphi_1) = F(\sigma_1) - F(s) - 4K,$$

folglich nach Subtraction: $F(\varphi_0) + F(\varphi_2) = 2F(2\pi + s)$, oder:

$$\int_{2\pi-s}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \int_{2\pi-s}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 2\int_{2\pi-s}^{2\pi+s} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Es ist aber $2\pi - s < \varphi_0 < 2\pi + s$ und $2\pi - s < \varphi_2 < 2\pi + s$. Zugleich ergiebt sich, dass sich an die Tangente (φ_1, φ_2), wenn sie von der zweiten Art ist, nur eine Tangente (φ_2, φ_3) von der zweiten oder dritten Art anschliessen kann. Ist (φ_2, φ_3) von der zweiten Art, so überzeugt man sich leicht, dass $\varphi_2 > \varphi_3$ sein muss; denn mit Hülfe von (29.) ergäbe sich sonst: $F(\varphi_1) = F(\varphi_3)$. Endlich muss aber jedenfalls eine Tangente der dritten Art folgen. Ist diese $(\varphi_{\lambda-1}, \varphi_\lambda)$, so kann die sich anschliessende Tangente $(\varphi_\lambda, \varphi_{\lambda+1})$ nur von der ersten oder zweiten Art sein, wie man aus (30.) entnimmt. Ist sie von der zweiten Art, so ist $\varphi_{\lambda+1} > \varphi_\lambda$, u. s. w. Es muss jedenfalls eine Tangente der ersten Art wieder auftreten, und für diese gilt wieder dasselbe, wie für (φ_0, φ_1). Die Art also, wie die Tangenten aufeinanderfolgen, ist bei der gegenwärtig behandelten Lage der Kegelschnitte wesentlich von denjenigen verschieden, welche bisher vorkamen. Wenn wir nämlich von einer Tangente der ersten Art ausgehen, so muss entweder unmittelbar oder nach Einschiebung von einer oder mehreren Tangenten zweiter Art eine Tangente dritter Art und auf diese entweder unmittelbar oder nach Einschiebung von Tangenten zweiter Art eine Tangente erster Art folgen, u. s. w. Soll sich also ein geschlossenes Polygon ergeben, welches dem Kegelschnitt A einbeschrieben und B umbeschrieben ist, so wird schliesslich eine Tangente dritter Art kommen müssen, welche sich unmittelbar an die Ausgangstangente erster Art anschliesst oder von ihr durch Tangenten zweiter Art getrennt ist. Wir wollen nun von einer Tangente (φ_0, φ_1) der ersten Art ausgehen bis zu einer anderen Tangente $(\varphi_\mu, \varphi_{\mu+1})$ erster Art, welche aber nicht die nächste zu sein

braucht, für jede Tangente je nach der Lage die Grössen bilden, welche auf den linken Seiten der Formeln (28.), (29.), (30.) vorkommen, und alle diese Grössen addiren. Gehen wir erst bis zur nächsten Tangente dritter Art inclusive, so haben wir als Summe

$$\text{entweder} \quad \{F(\varphi_0)+F(\varphi_1)\}+\{-F(\varphi_1)-F(\varphi_2)\}$$

$$\text{oder} \quad \{F(\varphi_0)+F(\varphi_1)\}+\{-F(\varphi_1)+F(\varphi_2)\}+\{-F(\varphi_2)+F(\varphi_3)\}+\cdots+\{-F(\varphi_{h-1})-F(\varphi_h)\},$$

jenachdem die Tangente dritter Art unmittelbar folgt oder nicht, erhalten also für die Summe jedenfalls die Form $+F(\varphi_0)-F(\varphi_h)$. Gehen wir weiter bis zur nächsten Tangente erster Art incl., so ergiebt sich die Summe

$$\text{entweder} \quad \{F(\varphi_0)-F(\varphi_h)\}+\{F(\varphi_h)+F(\varphi_{h+1})\}$$

$$\text{oder} \quad \{F(\varphi_0)-F(\varphi_h)\}+\{F(\varphi_h)-F(\varphi_{h+1})\}+\{F(\varphi_{h+1})-F(\varphi_{h+2})\}+\cdots+\{F(\varphi_{k-1})+F(\varphi_k)\},$$

so dass die Summe jedenfalls die Form $+F(\varphi_0)+F(\varphi_k)$ annimmt, d. h. dieselbe Form, wie wenn (φ_0, φ_k) eine Tangente erster Art wäre, und man erkennt daraus sogleich, dass man, wenn man bis zur Tangente $(\varphi_\mu, \varphi_{\mu+1})$ einschliesslich addirt, die Summe $F(\varphi_0)+F(\varphi_{\mu+1})$ erhält, folglich, wenn man diese Tangente nicht mehr hinzunimmt, die Summe $F(\varphi_0)-F(\varphi_\mu)$.

Wenn daher ein n-Eck möglich ist, welches in den Kegelschnitt A und um den Kegelschnitt B beschrieben ist, und welches vom Punkte (φ_0) aus gebildet ist, so wird, wenn man für die einzelnen darin vorkommenden Tangenten die Beziehungen resp. (28.), (29.), (30.) aufstellt und alle so erhaltenen Gleichungen addirt, auf der linken Seite sich die Summe $F(\varphi_0)-F(\varphi_n)$, also Null ergeben, und auf der rechten, wenn m die Anzahl der den Bogen $\Theta_1 S_1$ oder $\Theta_4 S_4$ und in Folge dessen $n-2m$ die Anzahl der den Bogen $S_1 S_4$ von B berührenden Polygonseiten ist, also auch m-Ecken auf dem Bogen $S_1 T_1$ und ebensoviel auf $S_4 T_4$ liegen:

$$m\{F(\sigma_1)+F(s)+4K\}+(n-2m)\{F(\sigma_1)-F(s)-4K\}+m\{F(\sigma_1)+F(s)-12K\}.$$

Indem man nun diesen Ausdruck der Null gleich setzt, findet man:

$$F(\sigma_1) = -4\frac{m}{n}F(s)+F(s)+4K.$$

Entfernt man hieraus σ_1 mittelst der Gleichungen (31.), (32.), (33.), so erhält man folgende Formeln:

$$F(t)=F(s)-2\frac{m}{n}F(s), \quad F(\omega)=2\frac{m}{n}F(s), \quad F(\varphi')=-4\frac{m}{n}F(s)+2F(s) \text{ oder } =4\frac{m}{n}F(s).$$

Aber wenn man beachtet, dass $\sin s = \frac{1}{k}$ ist, und die über das Vorzeichen

der in den Integralen vorkommenden Quadratwurzel getroffene Bestimmung berücksichtigt, so sieht man, dass

$$F(s) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \int_s^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = K+iK_1$$

ist, sobald man in dem Integrale

$$K_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi}}, \quad \text{wo } k_1^2 = 1-k^2,$$

die positiven Werthe der Wurzel nimmt. Die gesuchte Bedingung kann man demnach unter einer der Formen

$$\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{n-2m}{n}(K+iK_1), k\right) = \frac{\alpha}{\gamma}\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}, \quad \cos^2\mathrm{am}\left(2\frac{m}{n}(K+iK_1), k\right) = \frac{\gamma}{\beta},$$

$$\cos\mathrm{am}\left(4\frac{m}{n}(K+iK_1), k\right) = \frac{\beta\gamma-\alpha(\beta-\gamma)}{\beta\gamma+\alpha(\beta-\gamma)}, \quad \text{wo } k^2 = \frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma},$$

angeben, da $\cos\mathrm{am}(-u+2F(s), k) = \cos\mathrm{am}(u, k)$ ist. (Dieses Resultat stimmt mit der Formel $\cos\mathrm{am}(K+iK_1-u) = -\frac{ik_1}{k}\frac{1}{\cos\mathrm{am}\, u}$ überein.)

Es ist klar, dass dieselbe Bedingung auch für ein Polygon herauskommt, dessen Ecken auf dem Bogen $S_2D_3S_3$ liegen.

Diesen Formeln vorzuziehen sind die folgenden, welche man aus ihnen leicht ableitet:

$$\cos^2\mathrm{am}\left(2\frac{m}{n}M, \mu\right) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \cos\mathrm{am}\left(4\frac{m}{n}M, \mu\right) = \frac{\alpha\beta-\gamma(\beta-\alpha)}{\alpha\beta+\gamma(\beta-\alpha)}, \quad \text{wo } \mu^2 = \frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha};$$

$$\cos^2\mathrm{am}\left(2\frac{m}{n}M_0, \mu_0\right) = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \cos\mathrm{am}\left(4\frac{m}{n}M_0, \mu_0\right) = \frac{\alpha\gamma-\beta(\gamma-\alpha)}{\alpha\gamma+\beta(\gamma-\alpha)}, \quad \text{wo } \mu_0^2 = \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}.$$

Man hat hier

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\mu^2\sin^2\varphi}} = M, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\mu_0^2\sin^2\varphi}} = M_0$$

gesetzt, und es ist

$$\mu_0^2 = \frac{-\mu^2}{1-\mu^2}, \quad M_0 = M\sqrt{1-\mu^2}, \quad 0 < \mu^2 < 1, \quad \mu_0^2 < 0.$$

§. 6.

Nachdem wir die Untersuchung des Falles, wo die Gleichung (2.) nur reelle Wurzeln hat, abgeschlossen haben, bleibt noch derjenige übrig, in welchem *eine derselben reell und zwei imaginär* sind.

Wir wollen in diesem Falle unter γ die reelle Wurzel verstehen und können dann

$$\alpha = p+qi, \quad \beta = p-qi$$

setzen. Aus den Gleichungen (3.) bis (6.) entnehmen wir daher, dass die Grössen a_2^2, b_2^2, c_2^2 reelle, die Grössen a^2, b^2, c^2 dagegen mit den Grössen a_1^2, b_1^2, c_1^2 conjugirte imaginäre Werthe annehmen. Daraus folgt, dass die Function X von der Form $U+iV$, die Function Y von der Form $\pm(U-iV)$ und Z reell oder in i multiplicirt ist. Ohne die Allgemeinheit der Resultate zu beeinträchtigen, dürfen wir

$$X = U+iV, \quad Y = U-iV$$

setzen und Z als reell betrachten. Für den Kegelschnitt A, dessen Gleichung wir jetzt auch unter der Form

$$Z^2 = 2(V^2-U^2)$$

schreiben können, führen wir wieder die Variable $\varphi = r+i\varrho$ ein durch die Gleichungen

$$i\frac{X}{Z} = \sin\varphi, \quad i\frac{Y}{Z} = \cos\varphi,$$

so dass jeder Punkt einen Werth von φ bis auf Vielfache von 2π bestimmt, jeder Werth von φ aber nur einen (reellen oder imaginären) Punkt und $\varphi+2h\pi$ denselben, und haben somit:

$$e^{i(r+i\varrho)} = \cos\varphi+i\sin\varphi = \frac{iY-X}{Z} = \frac{V-U}{Z}-i\cdot\frac{V-U}{Z}, \quad \text{also} \quad e^{ir} = e^{\varrho}\frac{V-U}{Z}(1-i),$$

folglich

$$\operatorname{tg} r = -1, \quad e^{2\varrho} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{Z}{V-U}\right).$$

Wenn wir daher den reellen Theil von φ immer zwischen 0 und 2π wählen und die Function

$$\frac{Z}{\sqrt{2}(V-U)} = \frac{\sqrt{2}(V+U)}{Z}$$

(für die Punkte auf A) mit $\varDelta$ bezeichnen, so ist

$$r = \frac{3\pi}{4} \quad \text{oder} \quad \frac{7\pi}{4}, \quad \varphi = r+\frac{i}{2}\log\varDelta^2.$$

Offenbar bestimmt jeder reelle Punkt von A einen reellen Werth von $\varDelta$ und umgekehrt, und da für jeden Punkt r nur einen Werth haben kann, so ist, wenn im Punkte $(\varDelta)\,\varphi = \frac{3\pi}{4}+\frac{i}{2}\log\varDelta^2$ ist, im Punkte $(-\varDelta)\,\varphi = \frac{7\pi}{4}+\frac{i}{2}\log\varDelta^2$.

Zwei derartige Punkte liegen, wie man leicht sieht, stets in gerader Linie mit dem Durchschnittspunkte der imaginären Geraden $X=0$, $Y=0$ oder der reellen Geraden $U=0$, $V=0$, welcher der Pol der Geraden $Z=0$ ist. In den Schnittpunkten D, D_1 der letztern mit A ist $Z=0$ und $U^2=V^2$, folglich $\Delta^2=0$ oder ∞; auf dem einen Bogen DD_1 geht Δ daher von 0 bis $+\infty$, auf dem andern von 0 bis $-\infty$. Wenn wir nun, — wie wir berechtigt sind, — annehmen, dass für einen Punkt auf dem ersten Bogen $r=\frac{3\pi}{4}$ ist, so ist für alle Punkte desselben, also für jeden positiven Werth von Δ, $\varphi=\frac{3\pi}{4}+\frac{i}{2}\log\Delta^2$, für alle Punkte des andern Bogens (negative Δ) $\varphi=\frac{7\pi}{4}+\frac{i}{2}\log\Delta^2$, und in D, D_1 findet der Uebergang durch das Unendliche statt, so dass φ, in D ausgehend, von $\frac{3\pi}{4}-i\infty$ über $\left.\begin{matrix}3\\7\end{matrix}\right\}\frac{\pi}{4}+i\infty$ nach $\frac{7\pi}{4}-i\infty$ variirt.

Der Kegelschnitt B schneidet den Kegelschnitt A in Punkten, für welche

$$X=Z\sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\beta}}=Z\sqrt{-\tfrac{1}{2}-i\frac{p-\gamma}{2q}},\qquad Y=Z\sqrt{\frac{\gamma-\alpha}{\alpha-\beta}}=Z\sqrt{-\tfrac{1}{2}+i\frac{p-\gamma}{2q}}$$

ist. Wenn man hier zwei conjugirte Werthe der Quadratwurzeln nimmt, so erhält man zwei lineare Gleichungen von der Form

$$\xi+i\eta=0,\qquad \xi-i\eta=0,$$

und es sind demnach immer zwei reelle Schnittpunkte vorhanden. Nimmt man aber für die Quadratwurzeln zwei nicht conjugirte Werthe, so erhält man zwei Paare von Gleichungen, welche zu imaginären Werthen der Coordinaten der Schnittpunkte führen. Wenn wir nun die reellen Schnittpunkte mit S und S_1 und die Werthe von φ in ihnen mit s und s_1 bezeichnen, so ist

$$\sin^2 s=\sin^2 s_1=\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}=\tfrac{1}{2}+i\frac{p-\gamma}{2q}\ ^{*)}.$$

Diese Formel zeigt, dass $s_1=s\pm\pi$ ist, dass also, wenn wir S auf dem Bogen DD_1 wählen, auf welchem $r=\frac{3\pi}{4}$ ist, S_1 auf dem andern Bogen DD_1 liegt und $s_1=s+\pi$ ist. — Ebenso existiren für die Curven A, B zwei reelle und

---

*) Es ist überhaupt für jeden reellen Punkt von A der reelle Theil von $\sin^2\varphi$ und $\cos^2\varphi$ gleich $\frac{1}{2}$, da man hat:

$$\sin^2\varphi=-\frac{(U+iV)^2}{Z^2}=\frac{V^2-U^2}{Z^2}-2i\frac{UV}{Z^2}=\tfrac{1}{2}-2i\frac{UV}{Z^2},\quad \cos^2\varphi=\tfrac{1}{2}+2i\frac{UV}{Z^2}.$$

Auch das Umgekehrte lässt sich zeigen.

zwei imaginäre gemeinschaftliche Tangenten. Berühren die ersteren die Curve A in T, T_1 und die Curve B in Θ, Θ_1 und sind t, t_1 die Werthe von φ in T, T_1, also

$$\sin^2 t = \sin^2 t_1 = \frac{\alpha}{\gamma}\,\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha} = \tfrac{1}{2} + i\,\frac{p^2+q^2-p\gamma}{2q\gamma},$$

so mag T auf dem Bogen DSD_1, T_1 auf DS_1D_1 liegen, so dass $t_1 = t + \pi$ ist.

Es ist klar, dass im vorliegenden Falle von den Punkten D und D_1 der eine innerhalb, der andere ausserhalb des Kegelschnittes B liegen muss. Machen wir die Voraussetzung, dass D ausserhalb von B liege (aus dem Gange der Untersuchung wird einleuchten, dass die entgegengesetzte Annahme keine Veränderung des Resultates herbeiführt), so wird die Aufeinanderfolge der betrachteten Punkte von A folgende sein: $STDT_1S_1D_1$. Alle Punkte des Bogens SD_1S_1 werden sich innerhalb von B, alle Punkte von $STDT_1S_1$ ausserhalb von B befinden, und es kommen daher bei unserer Aufgabe nur die Punkte des letztern in Betracht, weil durch sie allein Tangenten an B möglich sind. Ebenso werden auf dem Kegelschnitt B nur die Punkte des Bogens $\Theta SS_1\Theta_1$ auftreten, welcher die Berührungspunkte aller Tangenten enthält, die von Punkten auf A ausgehen. Die sämmtlichen Werthe aber, welche φ in den reellen Punkten des Kegelschnittes A annimmt, können, wenn man sich in der Ebene eine Axe mit einem Anfangspunkt denkt und auf ihr und senkrecht zu ihr positive und negative Richtung festsetzt, repräsentirt werden durch die Punkte zweier Geraden G und G_1, welche senkrecht zu jener Axe, respective um $+\frac{3\pi}{4}$ und $+\frac{7\pi}{4}$ vom Anfangspunkte entfernt, gezogen werden. Wenn wir daher die Punkte dieser Geraden mit den durch sie vorgestellten Werthen bezeichnen, so können wir sagen, dass, während der durch φ bestimmte Punkt der Curve A auf dieser den Weg $STDT_1S_1$ durchläuft, φ selbst sich auf der Geraden G von s über t nach dem unendlich entfernten Punkte $d = \left.\begin{matrix}3\\7\end{matrix}\right\}\frac{\pi}{4} - i\infty$ der Linien G, G_1 bewegt, durch diesen in die Gerade G_1 übergeht und auf ihr über t_1 bis s_1 läuft. Zwei Werthe φ und $\varphi+\pi$ (z. B. s und s_1, t und t_1) sind von der Axe gleichweit entfernt.

Wir legen noch in den Punkten S und S_1 Tangenten an B und nennen Σ und Σ_1 ihre anderen Schnittpunkte mit A, σ und σ_1 die Werthe von φ in ihnen. Dann liegt der Punkt $(S\Sigma, S_1\Sigma_1)$ auf DD_1 und von den Punkten Σ, Σ_1 befindet sich daher immer einer auf STD und einer auf DT_1S_1. — Von den Schnittpunkten der Geraden $Z=0$ mit B liegt immer einer innerhalb von

A; legen wir in ihm eine Tangente an B, so schneidet sie A in zwei Punkten, in welchen nach (25.)

$$\sin^2\varphi = \frac{\beta}{\beta-\alpha} = \frac{1}{2}+i\frac{p}{2q}$$

ist, also φ zwei um π verschiedene Werthe ε, ε_1 hat. Punkt (ε) liege auf STD, also Punkt (ε_1) auf DT_1S_1 $(\varepsilon_1 = \varepsilon+\pi)$.

§. 7.

Im vorigen Paragraphen sind die allgemeinen Angaben für den Fall zweier Kegelschnitte mit nur *zwei reellen Schnittpunkten und gemeinschaftlichen Tangenten* gemacht worden, und wir gehen nun an die Aufsuchung der gewünschten Formel.

Wenn die Verbindungslinie zweier Punkte (φ_0) und (φ_1) auf A die Curve B berührt, so ist auch diesmal

$$(34.)\qquad \frac{d\varphi_0}{d\varphi_1} = \pm\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_0}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_1}},$$

wo $k^2 = \frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}$, also imaginär, und zugleich $\sin s = \frac{1}{k}$ ist (wenn man das Zeichen von k passend wählt). Zur Abkürzung setzen wir

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \psi(\varphi)$$

und bestimmen, dass man in einem beliebigen Punkte der Strecke std auf der Geraden G einen der beiden Werthe von $\psi(\varphi)$ beliebig wählen, von ihm aus aber nach beiden Seiten hin den Werth von $\psi(\varphi)$ fortschreiten lassen und auf G_1 die entgegengesetzten Werthe nehmen soll, so dass $\psi(\varphi\pm\pi) = -\psi(\varphi)$ wird. Der Uebergang findet statt bei $\psi(d)$, welches $=0$ ist; die Werthe von $\psi(s)$ und $\psi(s_1)$ sind unendlich gross, alle übrigen endlich und von Null verschieden. (Für uns kommt nur der Weg $stdt_1s_1$ in Betracht.) Es seien nun Δ_0 und Δ_1 die Werthe von Δ in den Punkten (φ_0) und (φ_1); dann ist $d\varphi_0 = \frac{i}{2}\frac{d(\Delta_0^2)}{\Delta_0^2}$ und $d\varphi_1 = \frac{i}{2}\frac{d(\Delta_1^2)}{\Delta_1^2}$, also $\frac{d\varphi_0}{d\varphi_1} = \frac{\Delta_1^2}{\Delta_0^2}\cdot\frac{d(\Delta_0^2)}{d(\Delta_1^2)}$. Daraus folgt, dass $\frac{d\varphi_0}{d\varphi_1}$ reell ist, und zwar positiv oder negativ, jenachdem $\frac{d(\Delta_0^2)}{d(\Delta_1^2)}$ es ist, und wegen der Gleichung (34.) muss auch das Verhältniss $\frac{\psi(\varphi_1)}{\psi(\varphi_0)} = \pm\frac{d\varphi_0}{d\varphi_1}$ reell sein. Zur Bestimmung des hier zu nehmenden Zeichens machen wir drei Unterscheidungen, entsprechend wie beim IV. Falle in §. 5.

1. Die Linie (φ, φ_1) berühre den Bogen ΘS von B. Wenn man alle hierher gehörigen Tangenten haben will, so hat man mit dem einen Punkte (φ_0) von T bis S, mit dem andern (φ_1) von T bis Σ zu gehen. Es sind nun zwei Fälle zu trennen. — *a*) Der Punkt Σ liege zwischen T und D (es ist immer nur an den Bogen SDS_1 von A zu denken), also σ zwischen t und d. Dann beginnt das Verhältniss $\frac{\psi(\varphi_1)}{\psi(\varphi_0)}$ mit dem Werthe $\frac{\psi(t)}{\psi(t)} = +1$ und erleidet keinen Zeichenwechsel bis zu seinem letzten Werthe $\frac{\psi(\sigma)}{\psi(s)} = 0$; folglich ist es durchweg positiv. Da aber zugleich Δ_0^2 wächst und Δ_1^2 abnimmt, so ist $\frac{d(\Delta_0^2)}{d(\Delta_1^2)}$ negativ, und mithin das untere Zeichen in (34.) zu wählen. — *b*) Es liege Σ zwischen D und S_1, also σ zwischen d und s_1. Lassen wir dann φ_1 zuerst von t bis d und damit φ_0 von t bis zu einem zwischen s und t gelegenen Punkte d', welcher $\varphi_1 = d$ entspricht, gehen, so finden wir wie vorhin, dass das Zeichen — zu nehmen ist. Jetzt lassen wir φ_1 weiter gehen von d bis σ und φ_0 von d' bis s; am Anfange und am Ende ist der Quotient $\frac{\psi(\varphi_1)}{\psi(\varphi_0)}$ gleich Null und erleidet dazwischen keinen Zeichenwechsel. Bezeichnen wir mit φ_1' den Punkt $\varphi_1 - \pi$, welcher auf std liegt, so bestimmt derselbe einen Punkt φ_0' ebenfalls auf std, aber auf der andern Seite von t, und es ist nach dem Früheren $\frac{\psi(\varphi_1')}{\psi(\varphi_0')}$ ein reeller positiver Werth, ferner $\psi(\varphi_1') = -\psi(\varphi_1)$, folglich $\frac{\psi(\varphi_1)}{\psi(\varphi_0')}$ reell und negativ und $\frac{\psi(\varphi_0)}{\psi(\varphi_0')}$ reell. Da aber $\frac{\psi(\varphi_0)}{\psi(\varphi_0')} = \frac{\psi(d')}{\psi(d')} = +1$ für $\varphi_1 = d$ ist, also dieses Verhältniss die Null beständig übertrifft, so kann $\frac{\psi(\varphi_1)}{\psi(\varphi_0)}$ nur negativ sein, und weil $\frac{d(\Delta_0^2)}{d(\Delta_1^2)}$ diesmal positiv ist, so stellt sich wieder das Zeichen — in (34.) als das richtige heraus. Dasselbe ist daher für alle Tangenten dieser Art zu nehmen.

2. Der Berührungspunkt der Tangente (φ_0, φ_1) mit B liege auf dem Bogen SS_1, und es sei (φ_0) derjenige von den Punkten (φ_0), (φ_1), welcher auf dem Wege SDS_1 früher kommt. Um alle derartigen Tangenten zu erhalten, wird man den Punkt (φ_0) von S bis Σ_1 und (φ_1) von Σ bis S_1 gehen lassen müssen. — *a*) Der Punkt Σ liege auf TD, also Σ_1 auf DT_1. Man bewege vorläufig φ_1 nur von σ bis d und in Folge dessen φ_0 von s bis zu einem gewissen auf std gelegenen Punkte d', wobei das Verhältniss $\frac{\psi(\varphi_1)}{\psi(\varphi_0)}$ den Anfangs- und Endwerth Null hat und das Vorzeichen nicht wechselt.

Durch den von φ_0 bestimmten Punkt der Curve A geht auch eine Tangente erster Art, wenn derselbe auf dem Bogen $S\Sigma$ liegt, und zur Bestimmung des gesuchten Zeichens genügt es, einen solchen Werth von φ_0 zu betrachten; der zweite Schnittpunkt dieser Tangente mit A liefert nun einen Werth φ'_1 auf $s t \sigma$ derart, dass $\frac{\psi(\varphi'_1)}{\psi(\varphi_0)}$ einen reellen und positiven Werth hat. Weil aber $\frac{\psi(\varphi_1)}{\psi(\varphi_0)}$ reell sein muss, so folgt hieraus, dass auch $\frac{\psi(\varphi'_1)}{\psi(\varphi_1)}$ es ist, und dann kann dieser Quotient nur positiv sein, da für $\varphi_0 = s$ sein Werth $\frac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma)} = +1$ ist. Es ist demnach das Verhältniss $\frac{\psi(\varphi_1)}{\psi(\varphi_0)}$ positiv und in Folge dessen in (34.) das obere Zeichen zu nehmen, weil Δ_0^2 und Δ_1^2 diesmal gleichzeitig abnehmen. — Wenn jetzt φ_0 seinen Weg von d' bis d fortsetzt, so gelangt φ_1 auf $d t_1 s_1$ von d bis zu einem gewissen Punkte d'', und der Bruch $\frac{\psi(\varphi_1)}{\psi(\varphi_0)}$ geht von 0 bis ∞, ohne sein Zeichen zu ändern; um dieses also zu finden, braucht man nur einen Werth von φ_1 so zu nehmen, dass der Werth $\varphi''_1 = \varphi_1 - \pi$ auf σd liegt, also einen Punkt φ''_0 auf $s d'$ bestimmt. Dann ist nach den letzten Ausführungen $\frac{\psi(\varphi''_1)}{\psi(\varphi''_0)}$ reell und positiv und $\psi(\varphi''_1) = -\psi(\varphi_1)$, also $\frac{\psi(\varphi_1)}{\psi(\varphi''_0)}$ reell und negativ, folglich $\frac{\psi(\varphi''_0)}{\psi(\varphi_0)}$ reell, und zwar ist dieser Bruch positiv, weil er für $\varphi_1 = d$ den Werth $\frac{\psi(d')}{\psi(d')} = 1$ hat. Demnach ist $\frac{\psi(\varphi_1)}{\psi(\varphi_0)}$ negativ und das obere Zeichen in der Formel (34.) zu nehmen, weil Δ_0^2 abnimmt und Δ_1^2 zunimmt. — Wenn man endlich φ_0 von d bis σ_1 und mithin φ_1 von d'' bis s_1 gehen lässt, so wird man in ähnlicher Weise zeigen, dass $\frac{\psi(\varphi_1)}{\psi(\varphi_0)}$ positiv ist; Δ_0^2 und Δ_1^2 nehmen gleichzeitig zu und es gilt also wieder das Zeichen $+$ in (34.). — *b*) Der Punkt Σ liege auf DS_1, also Σ_1 auf DS. Man wird sich dann überzeugen, dass die Grössen $\frac{\psi(\varphi_1)}{\psi(\varphi_0)}$ und $\frac{d(\Delta_0^2)}{d(\Delta_1^2)}$ negativ sind, und dass also wieder das Zeichen $+$ herauskommt, welches somit bei allen Tangenten der zweiten Art zu nehmen ist.

3. Für die Tangenten, welche den Bogen $S_1\Theta_1$ von B berühren, findet man, wenn man auf dem bei der ersten Art eingeschlagenen Wege vorgeht, dass in der Gleichung (34.) das untere Zeichen zu setzen ist.

Nachdem wir für die verschiedenen Lagen der die Curve B berührenden Sehne (φ_0, φ_1) von A die zwischen φ_0 und φ_1 bestehende Differentialgleichung ermittelt haben, ist dieselbe zu integriren, und auch hierbei ist die Trennung der drei Arten nöthig.

1. Wenn die Tangente (φ_0, φ_1) von der ersten Art ist, so lässt sie sich in die Lage der gemeinschaftlichen Tangente $T\Theta$ bringen, indem sie immer der ersten Art angehörig bleibt, und da für jede der dabei von ihr eingenommenen Lagen $\psi(\varphi_0)d\varphi_0 = -\psi(\varphi_1)d\varphi_1$ ist, so liefert die Summation aller dieser Beziehungen:

$$\int_t^{\varphi_0} \psi(\varphi)\,d\varphi + \int_t^{\varphi_1} \psi(\varphi)\,d\varphi = 0.$$

Bei allen hier vorkommenden Integralen ist der Weg, auf welchem die Variable geht, immer der den Geraden G und G_1 und zwar der Strecke $s d d_1 s_1$ angehörige. Wenn wir das in diesem Sinne genommene Integral

$$\int_s^{\varphi} \psi(\varphi)\,d\varphi = f(\varphi)$$

setzen, so haben wir im gegenwärtigen Falle zwischen φ_0 und φ_1 die Relation:

$$(35.)\qquad f(\varphi_0)+f(\varphi_1) = 2f(t) = f(\sigma),$$

weil die Gleichung durch $\varphi_0 = s$, $\varphi_1 = \sigma$ erfüllt werden muss.

2. Wenn die Tangente (φ_0, φ_1) von der zweiten Art ist, also $\psi(\varphi_0)d\varphi_0 = \psi(\varphi_1)d\varphi_1$ ist und der Punkt (φ_0) auf dem Wege SDS_1 vor dem Punkte (φ_1) kommt, so besteht die Beziehung:

$$(36.)\qquad \int_s^{\varphi_0} \psi(\varphi)\,d\varphi - \int_\sigma^{\varphi_1} \psi(\varphi)\,d\varphi = 0,$$

welcher wir auch folgende Form geben können:

$$(37.)\qquad -f(\varphi_0)+f(\varphi_1) = f(\sigma).$$

3. Wenn endlich die Tangente (φ_0, φ_1) von der dritten Art, also $\psi(\varphi_0)d\varphi_0 = -\psi(\varphi_1)d\varphi_1$ ist, so hat man:

$$\int_{s_1}^{\varphi_0} \psi(\varphi)\,d\varphi + \int_{\sigma_1}^{\varphi_1} \psi(\varphi)\,d\varphi = 0, \quad \text{folglich} \quad f(\varphi_0)+f(\varphi_1) = f(\sigma_1)+f(s_1).$$

Da aber die Gleichung (37.) durch das Werthepaar $\varphi_0 = \sigma_1$, $\varphi_1 = s_1$ erfüllt wird, mithin $f(\sigma_1) = f(s_1)-f(\sigma)$ sein muss, so folgt:

$$(38.)\qquad -f(\varphi_0)-f(\varphi_1) = f(\sigma)-2f(s_1).$$

Beachtet man, dass das Werthepaar $\varphi_0 = \varepsilon$, $\varphi_1 = \varepsilon_1 = \varepsilon+\pi$ die Gleichung (36.) befriedigen muss, so gelangt man zu einer Relation zwischen $f(\sigma)$ und $f(\varepsilon)$. Es ergiebt sich nämlich

$$\int_s^{\varepsilon} \psi(\varphi)\,d\varphi - \int_\sigma^{\varepsilon_1} \psi(\varphi)\,d\varphi = 0.$$

Nun ist aber:

$$\int_\sigma^{s_1}\psi(\varphi)d\varphi = \int_s^{s_1}\psi(\varphi)d\varphi - \int_s^{\sigma}\psi(\varphi)d\varphi + \int_{s_1}^{\varepsilon_1}\psi(\varphi)d\varphi, \text{ und } \int_{s_1}^{\varepsilon_1}\psi(\varphi)d\varphi = -\int_s^{\varepsilon}\psi(\varphi)d\varphi,$$

folglich

$$(39.)\qquad f(\sigma) = f(s_1) - 2f(\varepsilon) = 2f(t).$$

Wenn nun ein n-Eck dem Kegelschnitt A einbeschrieben und dem Kegelschnitt B umbeschrieben ist, so erlangt man durch die Formeln (35.), (37.), (38.) mit Hilfe von Betrachtungen, welche den in §. 5. für den IV. Fall angewendeten entsprechen, und deren Ausführung aus diesem Grunde hier unterbleiben kann, die Bedingung:

$$nf(\sigma) - 2mf(s_1) = 0,$$

in welcher m die Anzahl der den Bogen ΘS oder $\Theta_1 S_1$ von B berührenden Polygonseiten oder die Anzahl der auf dem Bogen ST oder S_1T_1 von A liegenden Polygonecken bedeutet. Nach (39.) schreiben wir dafür:

$$nf(t) = mf(s_1) \quad \text{oder} \quad 2nf(\varepsilon) = (n-2m)f(s_1).$$

Nun erhält man aber

$$f(s_1) = 2\int_s^{d}\psi(\varphi)d\varphi = \pm\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-k^2u^2}} = \pm 2K,$$

indem man $\sin\varphi = \frac{1}{ku}$ setzt; ferner ist

$$f(t) = \int_0^t \psi(\varphi)d\varphi - \int_0^s \psi(\varphi)d\varphi, \quad f(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon}\psi(\varphi)d\varphi - \int_0^s \psi(\varphi)d\varphi,$$

$$\int_0^s \psi(\varphi)d\varphi = \pm K \pm iK_1,$$

wo K_1 das vollständige Integral für den Modulus $k_1 = \sqrt{1-k^2}$ ist.

Man gewinnt daraus also die Formeln:

$$\sin^2\operatorname{am}\left(2\frac{m}{n}K + K + iK_1, k\right) = \frac{\alpha}{\gamma}\,\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}, \quad \sin^2\operatorname{am}\left(2\frac{m}{n}K + iK_1, k\right) = \frac{\beta}{\beta-\alpha},$$

für welche man auch schreiben kann:

$$\cos^2\operatorname{am}\left(2\frac{m}{n}K, k\right) = \frac{\gamma}{\beta}, \quad \Delta^2\operatorname{am}\left(2\frac{m}{n}K, k\right) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{wo} \quad k^2 = \frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}.$$

Es ist auch, wenn man $\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma} = -\frac{k^2}{k_1^2} = k_0^2$ setzt:

$$\cos^2\operatorname{am}\left(2\frac{m}{n}K_0, k_0\right) = \frac{\gamma}{\alpha}, \qquad \Delta^2\operatorname{am}\left(2\frac{m}{n}K_0, k_0\right) = \frac{\beta}{\alpha},$$

$$\cos\operatorname{am}\left(4\frac{m}{n}K, k\right) = \frac{\beta\gamma-\alpha(\beta-\gamma)}{\beta\gamma+\alpha(\beta-\gamma)}, \quad \cos\operatorname{am}\left(4\frac{m}{n}K_0, k_0\right) = \frac{\alpha\gamma-\beta(\alpha-\gamma)}{\alpha\gamma+\beta(\alpha-\gamma)}.$$

§. 8.

Das Ergebniss der an den einzelnen Fällen ausgeführten Untersuchung können wir nunmehr folgendermassen zusammenfassen.

Wenn zwei Kegelschnitte A und B repräsentirt werden durch die Gleichungen

$$(A.)\quad a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz = 0,$$

$$(B.)\quad b_{11}x^2+b_{22}y^2+b_{33}z^2+2b_{12}xy+2b_{13}xz+2b_{23}yz = 0,$$

so hat die nach α kubische Gleichung

$$(40.)\quad \begin{vmatrix} b_{11}-\alpha a_{11}, & b_{12}-\alpha a_{12}, & b_{13}-\alpha a_{13} \\ b_{12}-\alpha a_{12}, & b_{22}-\alpha a_{22}, & b_{23}-\alpha a_{23} \\ b_{13}-\alpha a_{13}, & b_{23}-\alpha a_{23}, & b_{33}-\alpha a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln, wenn die Kegelschnitte A und B sich in zwei reellen und zwei imaginären Punkten schneiden; sie hat nur reelle Wurzeln von einerlei Zeichen, wenn sie 0 oder vier reelle Schnittpunkte und ebenso viele reelle gemeinschaftliche Tangenten besitzen; endlich reelle Wurzeln, worunter nur zwei von gleichem Zeichen, wenn die Curven nur reelle Schnittpunkte, aber imaginäre gemeinschaftliche Tangenten haben, oder umgekehrt. Im ersten Falle wollen wir die reelle Wurzel α, die beiden complexen β und γ nennen; im zweiten bezeichnen wir sie mit α, β, γ so, dass dem absoluten Werthe nach $\alpha<\beta<\gamma$ wird; im dritten können wir es (indem es uns nur auf die Verhältnisse der Wurzeln ankommt) immer so einrichten, dass zwei Wurzeln negativ sind, und sie darauf derart ordnen, dass $\alpha<\beta<0<\gamma$ ist. Man setze dann:

$$\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}=k^2,\quad \frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}=k_0^2,\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=K,\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_0^2\sin^2\varphi}}=K_0.$$

Wenn nur α reell ist, so sind k^2 und k_0^2 complex; sonst ist k^2 reell und zwischen 0 und 1 gelegen, k_0^2 reell und negativ. Lässt sich nun ein Polygon von n Seiten gleichzeitig in den Kegelschnitt A und um den Kegelschnitt B beschreiben, so muss man eine ganze Zahl m so bestimmen können, dass 1), wenn die Anzahl der reellen Schnittpunkte der der reellen gemeinschaftlichen Tangenten gleich ist,

$$(41.)\quad \cos^2\operatorname{am}\left(2\frac{m}{n}K, k\right)=\frac{\alpha}{\gamma}\quad \text{oder}\quad \cos^2\operatorname{am}\left(2\frac{m}{n}K_0, k_0\right)=\frac{\alpha}{\beta},$$

2) wenn die Anzahl der reellen Schnittpunkte von der der reellen gemein-

schaftichen Tangenten verschieden ist,

$$(42.)\quad \cos^2 \operatorname{am}\left(2\frac{m}{n}K, k\right) = \frac{\beta}{\beta-\gamma} \quad \text{oder} \quad \cos^2 \operatorname{am}\left(K_0 - 2\frac{m}{n}K_0, k_0\right) = \frac{\gamma}{\gamma-\beta},$$

oder auch ohne diese Unterscheidung

$$\cos \operatorname{am}\left(4\frac{m}{n}K, k\right) = \pm\frac{\alpha\gamma+\beta(\alpha-\gamma)}{\alpha\gamma-\beta(\alpha-\gamma)} \quad \text{oder} \quad \cos \operatorname{am}\left(4\frac{m}{n}K_0, k_0\right) = \frac{\alpha\beta+\gamma(\alpha-\beta)}{\alpha\beta-\gamma(\alpha-\beta)}$$

ist (das Zeichen + ist für 1), das Zeichen — für 2) zu wählen, wenn man die Bedeutung von m einhalten will). Wenn weder reelle Schnittpunkte noch reelle gemeinschaftliche Tangenten vorhanden sind, so bedeutet m die Anzahl der Umläufe, welche das Vieleck durch die Peripherie von A macht. Ist die Zahl der reellen Schnittpunkte zwei oder vier und die der reellen gemeinschaftlichen Tangenten ebenso gross, so liegen sämmtliche Ecken des Polygons auf einem von zwei Schnittpunkten begrenzten und die Berührungspunkte von zwei gemeinschaftlichen Tangenten enthaltenden Theile von A, und zwar liegen dann m Ecken auf dem Wege von einem jener Schnittpunkte bis zu einem jener Berührungspunkte von gemeinschaftlichen Tangenten. Wenn nur die gemeinschaftlichen Tangenten reell sind, so liegen m Ecken des Polygons auf A zwischen den Berührungspunkten zweier gemeinschaftlichen Tangenten, deren Schnittpunkt auf der beide Kegelschnitte schneidenden Seite des in Bezug auf beide sich selbst conjugirten Dreiecks liegt. Wenn endlich nur die Schnittpunkte reell sind, so berühren m Seiten des Polygons den Kegelschnitt B zwischen zwei Schnittpunkten, deren Verbindungslinie durch die ausserhalb von A und B gelegene Ecke jenes Dreiecks geht.

Um zu untersuchen, ob die Bedingung für irgend einen gegebenen Werth des Verhältnisses $\frac{m}{n}$ erfüllt ist, ohne die Wurzeln α, β, γ unterscheiden zu müssen, ist es nöthig, die Bedingung in einer in Bezug auf α, β, γ symmetrischen Form zu haben. Liegt der Fall vor, dass die Anzahl der reellen Schnittpunkte und die der reellen gemeinschaftlichen Tangenten gleich ist, so ist die Bedingung:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi(\alpha, \gamma, \beta) = 0,$$

wenn man den Ausdruck

$$\cos^2 \operatorname{am}\left(2\frac{m}{n}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\sin^2\varphi}}, \sqrt{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}\right) - \frac{\alpha}{\gamma} = \varphi(\alpha, \beta, \gamma)$$

setzt. Man kann nun beweisen, dass die Werthe, welche die Function φ

durch die übrigen vier Permutationen der Argumente erhält, wesentlich von Null verschieden sind. Zu dem Zwecke bemerken wir, dass zu dem Kegelschnittpaare A, B immer ein Werth von $\frac{m}{n}$ gehört, d. h. ein reeller Werth h, welcher für $\frac{m}{n}$ in $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)$ oder $\varphi(\alpha,\gamma,\beta)$ gesetzt, beide zu Null macht. Ist kein geschlossenes Polygon möglich, so ist h die irrationale Grenze, der sich das Verhältniss $\frac{m}{n}$ nähert. Es ist daher

$$\cos^2 \mathrm{am}(2hK, k) = \frac{\alpha}{\gamma}, \qquad \Delta^2 \mathrm{am}(2hK, k) = \frac{\beta}{\gamma},$$

$$\cos^2 \mathrm{am}(2hK_0, k_0) = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \Delta^2 \mathrm{am}(2hK_0, k_0) = \frac{\gamma}{\beta}.$$

Man hat aber

$$\varphi(\beta,\alpha,\gamma) = \cos^2 \mathrm{am}\left(2\frac{m}{n}k(K \pm iK_1), \frac{1}{k}\right) - \frac{\beta}{\gamma} = \Delta^2 \mathrm{am}\left(2\frac{m}{n}(K \pm iK_1), k\right) - \frac{\beta}{\gamma}.$$

Sobald also $\varphi(\beta,\alpha,\gamma) = 0$ wird, so wird auch

$$\Delta^2 \mathrm{am}(2hK, k) = \Delta^2 \mathrm{am}\left(2\frac{m}{n}(K + iK_1), k\right),$$

und es müssen dann zwei ganze Zahlen m', n' von der Art existiren, dass

$$\pm 2hK + 2m'K + 2n'iK_1 = 2\frac{m}{n}(K \pm iK_1).$$

Daraus würde sich aber ein reeller Werth des Verhältnisses $\frac{K}{iK_1}$ ergeben, was unmöglich ist. Derselbe Beweis findet auf die Grösse $\varphi(\gamma,\alpha,\beta)$ Anwendung, wenn man in ihr den Modulus k_0 einführt. Da aber das Vertauschen der beiden letzten Argumente in der Function φ in Bezug auf das Verschwinden derselben keine Aenderung hervorbringt (denn die Gleichung $\varphi(\alpha,\gamma,\beta) = 0$ ist eine nothwendige Folge der Gleichung $\varphi(\alpha,\beta,\gamma) = 0$), so werden auch die Grössen $\varphi(\beta,\gamma,\alpha)$ und $\varphi(\gamma,\beta,\alpha)$ für keinen reellen Werth von $\frac{m}{n}$ zu Null.

Der Bedingung für den Fall, wo nicht gleichviel reelle Schnittpunkte und reelle gemeinschaftliche Tangenten vorhanden sind, geben wir die Form $\psi(\alpha,\beta,\gamma) = 0$, indem wir

$$\cos^2 \mathrm{am}\left(2\frac{m}{n}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\sin^2\varphi}} + i\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(1-\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\right)\sin^2\varphi}}, \sqrt{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}\right) - \frac{\alpha}{\gamma}$$
$$= \psi(\alpha,\beta,\gamma)$$

setzen, und aus dieser Form erkennt man, wie oben, dass die Grössen

$\psi(\beta,\alpha,\gamma)$, $\psi(\beta,\gamma,\alpha)$, $\psi(\gamma,\alpha,\beta)$, $\psi(\gamma,\beta,\alpha)$ nicht Null werden können. Was den Werth von $\psi(\alpha,\gamma,\beta)$ betrifft, so wird er nur dann zu Null, wenn zu den beiden Kegelschnitten gerade die Zahl $\frac{\frac{n}{2}-m}{n}$, aber nicht $\frac{m}{n}$ gehört, also doch auch ein n-Eck möglich ist (§. 3 und 4 a. E.). Aus dem Bisherigen folgt, dass man im ersten Falle das Product der Grössen $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)$, im zweiten das der Grössen $\psi(\alpha,\beta,\gamma)$ gleich Null zu setzen hat. Man überzeugt sich aber auch leicht, dass im ersten Falle keine der Grössen $\psi(\alpha,\beta,\gamma)$ und im zweiten Falle keine der Grössen $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)$ verschwinden kann. Um also die Bedingung dafür aufzustellen, dass ein gegebener Werth von $\frac{m}{n}$ zu den beiden Kegelschnitten gehört, hat man das Product

$$\Pi\{\varphi(\alpha,\beta,\gamma).\psi(\alpha,\beta,\gamma)\} = 0$$

zu setzen. Diese in Bezug auf α, β, γ symmetrische Form ist für alle Fälle giltig.

Will man von der Grösse m absehen, so kann man statt der Division der elliptischen Perioden das Multiplicationstheorem der elliptischen Functionen benutzen. Für alle Fälle (da in den §§. 3 und 4 die Zahl n gerade sein muss) und ohne Unterschied zwischen α, β, γ besteht dann für das Vorhandensein eines n-Ecks die Bedingung:

$$(43.)\qquad \sin\operatorname{am}\left(nu, \sqrt{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}\right) = 0, \quad \text{wo} \quad \cos^2\operatorname{am}\left(u, \sqrt{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}\right) = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Aus dieser Form findet man leicht die zwischen α, β, γ bestehende Relation in einer von Nennern und Wurzeln freien Gestalt.

Der Modulus $\sqrt{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}$ hat übrigens die interessante Eigenschaft, dass er ungeändert bleibt, wenn man den Kegelschnitt A festhält, statt des Kegelschnitts B aber irgend einen andern aus dem Kegelschnittbüschel (A, B) nimmt.

Beachtenswerth ist, dass diese Ausführungen nicht bloss für irgend ein System schief- oder rechtwinkliger Parallelcoordinaten, sondern überhaupt für jedes System, in welchem die gerade Linie durch eine Gleichung des ersten und der Kegelschnitt durch eine Gleichung des zweiten Grades zwischen den Coordinaten eines Punktes ausgedrückt werden, volle Geltung besitzen. Sie behalten übrigens, sobald man den einbeschriebenen Kegelschnitt mit dem umbeschriebenen oder die Werthe α, β, γ mit ihren reciproken vertauscht, ihre Richtigkeit auch für jedes System, in welchem der Punkt durch eine Glei-

[illegible] und der Kegelschnitt durch eine Gleichung zweiten Grades zwischen den Coordinaten einer Geraden vorgestellt werden.

Die hier gefundenen Resultate dienen zugleich als Beweis für den Satz von *Poncelet*, dass, wenn man von einem Punkte des Kegelschnitts A ausgehend ein Vieleck dem Kegelschnitt A einschreiben und B umschreiben kann, dasselbe auch von jeder Ausgangsstelle aus, wenn dieselbe nicht durch ihre Lage unzulässig ist, ohne Veränderung der Seitenzahl (und der Zahl m) möglich ist. Daraus folgt, dass man im Falle der Möglichkeit eines geschlossenen Polygons, wenn man von einem Schnittpunkte oder einer gemeinschaftlichen Tangente der Kegelschnitte aus das Polygon zu bilden sucht, bei der Operation zu einem andern Schnittpunkt oder einer andern gemeinschaftlichen Tangente gelangen muss, von wo aus man dann wieder zurückzugehen hat. Gelangt man, von einem Schnittpunkte oder einer gemeinschaftlichen Tangente ausgehend, wieder respective zu einem Schnittpunkte oder einer gemeinschaftlichen Tangente, so ist die Seitenzahl n des Polygons offenbar gerade, andernfalls ungerade. Damit stimmt die bereits angegebene Thatsache überein, dass in den Fällen, wo nur die Schnittpunkte oder nur die gemeinschaftlichen Tangenten reell sind, die Seitenzahl gerade sein muss.

Nehmen wir noch den Fall, dass man von einem Punkte aus, in welchem einer der Kegelschnitte von einer Seite des in Bezug auf beide sich selbst conjugirten Dreiecks geschnitten wird, das n-Eck construiren will, und bedienen wir uns der durch die Gleichungen (7.) und (8.) eingeführten Grössen φ und ψ. Wenn man auf der Curve A zwei Punkte (φ_0) und $(-\varphi_0)$ hat, so geht die Verbindungslinie derselben durch den Pol der Geraden $X=0$, weil die Gerade, welche die Punkte (φ) und (φ') von A verbindet, allgemein durch die folgende Gleichung dargestellt wird:

$$X\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi')+Y\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi')+iZ\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi') = 0.$$

Der Punkt (φ_0) liefert durch die Gleichung (10.) zwei Werthe ψ_0 und ψ_1, welche den Berührungspunkten der durch ihn gehenden Tangenten der Curve B entsprechen; der Punkt $(-\varphi_0)$ liefert gerade die Werthe $-\psi_0$ und $-\psi_1$. Da nun die Verbindungslinie der Punkte (ψ) und (ψ') von B durch die Gleichung:

$$X\sqrt{\alpha}\sin\tfrac{1}{2}(\psi+\psi')+Y\sqrt{\beta}\cos\tfrac{1}{2}(\psi+\psi')+iZ\sqrt{\gamma}\cos\tfrac{1}{2}(\psi-\psi') = 0$$

repräsentirt wird, so gehen offenbar die Verbindungslinien $(\psi_0, -\psi_0)$ und $(\psi_1, -\psi_1)$ wieder durch den Pol von $X=0$. Der Werth ψ_0 bestimmt ferner, ebenfalls durch die Gleichung (10.), zwei Werthe von φ, nämlich φ_0 und

einen zweiten φ_1; durch $-\psi_0$ werden die Werthe $-\varphi_0$ und $-\varphi_1$ erhalten. Man ersieht daraus, dass, wenn man durch zwei Punkte des Kegelschnitts A, welche mit einer Ecke Q des in Bezug auf A und B sich selbst conjugirten Dreiecks in gerader Linie liegen, Tangenten an den Kegelschnitt B zieht, zwei Paare von Schnittpunkten mit A entstehen, deren jedes mit jener Ecke in gerader Linie liegt. Dies gilt offenbar noch, wenn die beiden ersten Punkte in einen Schnittpunkt P von A mit der Polare von Q fallen. Zieht man also durch P an B eine Tangente, welche A in P_1 schneidet, durch P_1 eine Tangente, welche A in P_2 schneidet u. s. w., ebenso nach der anderen Richtung die Tangenten PP', $P'P''$, ... so gehen die Geraden P_1P', P_2P'', ... durch den Punkt Q. Wenn daher ein geschlossenes Vieleck möglich sein soll, so muss entweder eine Linie $P_\lambda P^{(\lambda)}$ Tangente an B werden, (dann ist n ungerade), oder es muss ein Punkt P_λ mit $P^{(\lambda)}$ zusammenfallen und zwar auf der Polare von Q, also in P oder dem anderen Schnittpunkte P_0 dieser Polare mit A (dann ist n gerade). Aehnlich verhält sich die Sache, wenn man von einer durch Q gehenden Tangente an B ausgeht.

Von dieser Bemerkung wollen wir Gebrauch machen, um eine Eigenschaft der Polygone mit gerader Seitenzahl abzuleiten. Wenn wir nämlich die in §§. 2, 3, 5 behandelten Fälle betrachten und uns der dort eingeführten Bezeichnungen bedienen, so haben wir, wenn n gerade ist:

$$\frac{d\varphi_0}{\Delta\varphi_0} = \pm\frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1}, \quad \frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1} = \pm\frac{d\varphi_2}{\Delta\varphi_2}, \quad \ldots \quad \frac{d\varphi_{\frac{1}{2}n-1}}{\Delta\varphi_{\frac{1}{2}n-1}} = \pm\frac{d\varphi_{\frac{1}{2}n}}{\Delta\varphi_{\frac{1}{2}n}},$$

folglich $F(\varphi_0)\pm F(\varphi_{\frac{1}{2}n}) = \text{Const.}$ Aber für $\varphi_0 = 0$ wird, wie gezeigt, $\varphi_{\frac{1}{2}n} = 0$ oder $\pm\pi$ (wenn wir φ von $-\pi$ bis $+\pi$ zählen); demnach ist $F(\varphi_0)\pm F(\varphi_{\frac{1}{2}n}) = 0$ oder $= \pm 2K$, mithin entweder $\varphi_0+\varphi_{\frac{1}{2}n} = 0$ oder $\varphi_0+\varphi_{\frac{1}{2}n} = \pm\pi$ oder $\varphi_0-\varphi_{\frac{1}{2}n} = \pm\pi$; denn $\varphi_0-\varphi_{\frac{1}{2}n} = 0$ ist auszuschliessen, weil diese Gleichung die Existenz eines $\frac{1}{2}n$-Ecks anzeigt. Da nun die Gleichung

$$X\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_0+\varphi_{\frac{1}{2}n}) + Y\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_0+\varphi_{\frac{1}{2}n}) + iZ\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_0-\varphi_{\frac{1}{2}n}) = 0$$

die Verbindungslinie der Punkte (φ_0) und $(\varphi_{\frac{1}{2}n})$ vorstellt, so geht dieselbe beständig durch den Pol von einer der Geraden $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$. Entsprechendes ist für den Fall des §. 4 nachzuweisen. Bei der in §§. 6—7 untersuchten Lage der Kegelschnitte ist $f(\varphi_0)\pm f(\varphi_{\frac{1}{2}n}) = \text{Const.}$, folglich $f(\varphi_0)\pm f(\varphi_{\frac{1}{2}n}) = f(s)\pm f(s_1) = \pm 2K$ mithin $\varphi_0-\varphi_{\frac{1}{2}n} = \pm\pi$, denn es kann nicht $\varphi_0+\varphi_{\frac{1}{2}n} = \pm\pi$ sein, weil der Werth $\varphi_{\frac{1}{2}n} = \pm\pi-\varphi_0$ keinen reellen Punkt von A darstellt, wenn der Punkt (φ_0) reell ist. Die Gerade $(\varphi_0, \varphi_{\frac{1}{2}n})$ geht also

durch den einzigen reellen Punkt, der in Bezug auf A und B dieselbe Polare hat. Dies beweist den bereits bekannten Satz:

Wenn ein Polygon von gerader Seitenzahl einem Kegelschnitt ein- und einem andern umbeschrieben ist, so gehen die Geraden, welche die gegenüberliegenden Ecken, sowie diejenigen, welche die Berührungspunkte auf gegenüberliegenden Seiten verbinden, sämmtlich durch einen Punkt, welcher in Bezug auf beide Kegelschnitte dieselbe Polare hat; gegenüberliegende Seiten des Polygons und Tangenten des umbeschriebenen Kegelschnitts in gegenüberliegenden Ecken schneiden sich auf der Polare dieses Punktes.

§. 9.

Zum Schlusse dürfte es am Platze sein, einige Beispiele für die gefundenen Bedingungen zu geben.

Wenn man die Determinante in der Gleichung (40.) ausführt, so mag dieselbe die Form

$$(44.)\qquad \delta_0\alpha^3+\delta_1\alpha^2+\delta_2\alpha+\delta_3 = 0$$

annehmen. Wenden wir die Formel (43.) an, so erhalten wir, da

$$\sin\mathrm{am}(3u) = \sin\mathrm{am}\,u\frac{3-4(1+k^2)\sin^2\mathrm{am}\,u+6k^2\sin^4\mathrm{am}\,u-k^4\sin^8\mathrm{am}\,u}{1-6k^2\sin^4\mathrm{am}\,u+4k^2(1+k^2)\sin^6\mathrm{am}\,u-3k^4\sin^8\mathrm{am}\,u}$$

ist, für das *Dreieck* ($m=1$) die Bedingung:

$$3\gamma^4-4\gamma^3(2\gamma-\alpha-\beta)+6\gamma^2(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)-(\gamma-\beta)^2(\gamma-\alpha)^2 = 0,$$

oder

$$(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2 = 4\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma),$$

oder, durch die Coefficienten der cubischen Gleichung ausgedrückt:

$$(45.)\qquad \delta_2^2 = 4\delta_1\delta_3.$$

Dasselbe erhält man bei Benutzung von (41.), wenn man die Relation

$$\cos\mathrm{am}\,\tfrac{2}{3}K+\frac{\cos\mathrm{am}\,\tfrac{1}{3}K}{\Delta\mathrm{am}\,\tfrac{1}{3}K} = 1$$

anwendet und die so entstehende Gleichung von den Wurzeln befreit. (Hier braucht man (42.) nicht, weil n ungerade ist.)

Für $n=4$ kann ebenfalls m nur $=1$ sein; mittelst der Beziehungen

$$\cos\mathrm{am}\,\tfrac{1}{2}K = \sin\mathrm{am}\,\tfrac{1}{2}K\,\Delta\mathrm{am}\,\tfrac{1}{2}K$$

und

$$\cos\mathrm{am}(\tfrac{1}{2}K+iK_1) = \sin\mathrm{am}(\tfrac{1}{2}K+iK_1)\,\Delta\mathrm{am}(\tfrac{1}{2}K+iK_1)$$

findet man sowohl aus (41.) als aus (42.) für das *Viereck* die Bedingung:

$$\alpha\gamma+\alpha\beta-\beta\gamma=0 \quad \text{oder} \quad (\alpha\gamma+\alpha\beta-\beta\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma-\alpha\gamma)(\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta)=0,$$

da man die Bedingung symmetrisch machen darf, oder endlich:

$$(46.) \qquad \delta_2^3+8\delta_0\delta_3^2 = 4\delta_1\delta_2\delta_3.$$

Die Gleichung $\alpha\gamma+\alpha\beta-\beta\gamma=0$ gestattet eine einfache geometrische Deutung. Wenn sie nämlich erfüllt ist, so kann man die Gleichung der Curve B so schreiben:

$$\beta\gamma(X^2+Y^2+Z^2)+\beta^2Y^2+\gamma^2Z^2 = 0,$$

und der Werth von ψ (s. die Gleichung (8.)) im Schnittpunkte der Curven A und B ist daher $=\arccos\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$, d. h. die Tangente an B in (ψ) geht durch den Punkt $\varphi=0$ auf A (s. §. 2 Anf.). Wenn also ein Kegelschnitt einem Viereck um- und ein anderer ihm einbeschrieben wird, so liegt der Pol von einer der gemeinschaftlichen Secanten in Bezug auf den zweiten Kegelschnitt auf dem ersten, und umgekehrt (was leicht vorherzusehen war).

Wenn die Kegelschnitte A und B *zwei Kreise* mit den Radien R und r und der Mittelpunktsdistanz d (positiv zu nehmen) sind, also durch die Gleichungen

$$(A.) \qquad x^2+y^2-R^2 = 0,$$

$$(B.) \qquad x^2+y^2+(d^2-r^2)-2dx = 0$$

ausgedrückt werden können, so geht die Gleichung (40.) über in:

$$(\alpha-1)(\alpha^2R^2-\alpha(R^2+r^2-d^2)+r^2) = 0,$$

und in (44.) ist

$$\delta_0=R^2, \quad \delta_1=-2R^2-r^2+d^2, \quad \delta_2=2r^2+R^2-d^2, \quad \delta_3=-r^2.$$

Wenn die Kreise sich nicht schneiden, also entweder $R>r$ und $R-r>d$ oder $R+r<d$ ist, so hat man:

$$\alpha=\frac{R^2+r^2-d^2-\sqrt{(R^2+r^2-d^2)^2-4R^2r^2}}{2R^2}, \quad \beta=\frac{R^2+r^2-d^2+\sqrt{(R^2+r^2-d^2)^2-4R^2r^2}}{2R^2}, \quad \gamma=1,$$

$$k = \frac{R^2-r^2+d^2-\sqrt{(R^2+r^2-d^2)^2-4R^2r^2}}{2dR}.$$

Die Bedingung für die Möglichkeit eines n-Ecks kann hier, wenn man

$$\frac{2\sqrt{k}}{1+k}=\sqrt{\frac{4dR}{(R+d)^2-r^2}}=\lambda \quad \text{und} \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}=L$$

setzt (so dass $\lambda^2<1$), durch die *Landen*sche Transformation nach einiger Rechnung

auf folgende Form gebracht werden:

$$\cos\operatorname{am}\left(2\frac{m}{n}L,\lambda\right)=\frac{r}{R+d},\quad \Delta\operatorname{am}\left(2\frac{m}{n}L,\lambda\right)=\pm\frac{R-d}{R+d},\text{ wo }\lambda^2=\frac{4dR}{(R+d)^2-r^2}.$$

Unter dieser ist sie von *Jacobi* für Kreise ohne reelle Schnittpunkte und gemeinschaftliche Tangenten gegeben worden. — Wenn die Kreise sich schneiden, d. h. $R+r>d$ und $(R-r)^2<d^2$ ist, so hat man:

$$\alpha=1,$$

$$\beta=\frac{R^2+r^2-d^2+i\sqrt{4R^2r^2-(R^2+r^2-d^2)^2}}{2R^2},\quad \gamma=\frac{R^2+r^2-d^2-i\sqrt{4R^2r^2-(R^2+r^2-d^2)^2}}{2R^2},$$

$$k_1=\frac{R^2-r^2+d^2-i\sqrt{4R^2r^2-(R^2+r^2-d^2)^2}}{2dR}.$$

Setzt man also

$$\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}=\sqrt{\frac{4dR}{(R+d)^2-r^2}}=\lambda\quad\text{und}\quad\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-\lambda^2)\sin^2\varphi}}=L_1,$$

so dass $\lambda>1$ ist, und benutzt die leicht herzustellende Gleichung

$$\cos^2\operatorname{am}\left(2\frac{m}{n}iK,k_1\right)=\frac{\gamma}{\alpha},$$

so gelangt man zu der Bedingung:

$$\cos\operatorname{am}\left(4\frac{m}{n}(L+iL_1),\lambda\right)=\frac{r}{R+d},\quad \Delta\operatorname{am}\left(4\frac{m}{n}(L+iL_1),\lambda\right)=\frac{R-d}{R+d},$$

$$\text{wo}\quad\lambda^2=\frac{4dR}{(R+d)^2-r^2}.$$

Für das *Dreieck* findet man entweder durch diese Bedingungen mit Berücksichtigung der Relationen

$$\cos\operatorname{am}\tfrac{2}{3}L+\frac{\cos\operatorname{am}\frac{2}{3}L}{\Delta\operatorname{am}\frac{2}{3}L}=1\quad\text{und}\quad\cos\operatorname{am}(\tfrac{4}{3}L+iL_1)+\frac{\cos\operatorname{am}\frac{4}{3}(L+iL_1)}{\Delta\operatorname{am}\frac{4}{3}(L+iL_1)}=-1$$

oder durch die Gleichung (45.) die Formel:

$$\frac{r}{R+d}+\frac{r}{R-d}=\mp1,$$

in welcher das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem die Kreise sich schneiden oder nicht.

Die Gleichung (46.) liefert die Bedingung für das *Viereck:*

$$(R^2-d^2)\{(R^2-d^2)^2-2r^2(R^2+d^2)\}=0,$$

welche in zwei, nämlich in

$$\left(\frac{r}{R+d}\right)^2+\left(\frac{r}{R-d}\right)^2=1\quad\text{und}\quad R=d,$$

zerfällt, von denen die erste für den Fall der imaginären, die zweite für den der reellen Schnittpunkte gilt.

Haben die beiden Kreise vier reelle gemeinschaftliche Tangenten, so ist ein *Sechseck* mit der Annahme $m=2$ vorhanden, wenn

$$\frac{r}{R+d}-\frac{r}{R-d} = 1$$

ist; für $n=6$ und $m=1$ findet man minder einfache Formeln.

Ein einfaches Beispiel ist auch ein Paar concentrischer Kegelschnitte. Hat man *zwei concentrische Ellipsen*, so kann man stets ein beiden gemeinschaftliches Paar conjugirter Durchmesser finden und in Bezug auf diese als Coordinatenaxen die Ellipsen darstellen durch die Gleichungen:

$$(A.)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$(B.)\qquad \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2} = 1,$$

wobei vorausgesetzt werde, dass $\frac{a_1}{a} > \frac{b_1}{b}$ ist. Die Gleichung (40.) nimmt dann folgende Gestalt an:

$$(b_1^2-\alpha b^2)(a_1^2-\alpha a^2)(-a_1^2b_1^2+\alpha a^2b^2) = 0,$$

so dass

$$\delta_0=a^4b^4,\ \ \delta_1=-a^2b^2(a^2b_1^2+a_1^2b^2+a_1^2b_1^2),\ \ \delta_2=a_1^2b_1^2(a^2b_1^2+a_1^2b^2+a^2b^2),\ \ \delta_3=-a_1^4b_1^4.$$

Diesmal können die Schnittpunkte und die gemeinschaftlichen Tangenten nur sämmtlich reell oder sämmtlich imaginär sein. Das Erstere tritt ein, wenn $a<a_1$ und $b>b_1$ ist, und dann hat man:

$$\alpha=\left(\frac{b_1}{b}\right)^2,\qquad \beta=\left(\frac{a_1b_1}{ab}\right)^2,\qquad \gamma=\left(\frac{a_1}{a}\right)^2,$$

$$\cos\mathrm{am}\left(2\frac{m}{n}K,k\right)=\frac{ab_1}{a_1b},\quad \Delta\mathrm{am}\left(2\frac{m}{n}K,k\right)=\frac{b_1}{b},\quad k^2=\frac{a_1^2b^2-a_1^2b_1^2}{a_1^2b^2-a^2b_1^2}.$$

Das Zweite tritt dagegen ein, wenn $a>a_1$ und $b>b_1$; für diesen Fall ist

$$\alpha=\left(\frac{a_1b_1}{ab}\right)^2,\qquad \beta=\left(\frac{b_1}{b}\right)^2,\qquad \gamma=\left(\frac{a_1}{a}\right)^2,$$

$$\cos\mathrm{am}\left(2\frac{m}{n}K,k\right)=\frac{b_1}{b},\quad \Delta\mathrm{am}\left(2\frac{m}{n}K,k\right)=\frac{ab_1}{a_1b},\quad k^2=\frac{a_1^2b^2-a^2b_1^2}{a_1^2b^2-a_1^2b_1^2}.$$

Man findet daraus beispielsweise für das *Dreieck* die Bedingung:

$$\frac{a_1}{a} \mp \frac{b_1}{b} = 1,$$

und für das *Viereck:*

$$\frac{a_1^2}{a^2} \mp \frac{b_1^2}{b^2} = 1,$$

wo beidemal das obere Zeichen für den ersten, das untere für den zweiten Fall gilt.

Breslau, im Juli 1864.

Suite des recherches sur l'élimination et la théorie des courbes.

(Par M. *A. Cayley* à Cambridge.)

Dans le mémoire „Recherches sur l'élimination et la théorie des courbes" t. XXXIV, pp. 30—45 de ce Journal (1847) j'ai donné pour une courbe $U=0$ du n-ième ordre sans points doubles ou de rebroussement, les expressions pour les degrés, tant par rapport aux coefficients que par rapport aux variables, des fonctions qui entrent dans l'équation $FFU=KU(PU)^2(QU)^3U$ qui sert à expliquer comment la reciproque de la reciproque de la courbe $U=0$ se réduit à la courbe originale $U=0$. En partant des principes établis dans le mémoire „Nouvelles Rercherches sur l'élimination et la théorie des courbes" t. LXIII, pp. 34—39 de ce Journal (1863) je suis parvenu à résoudre à peu près cette question pour le cas d'une courbe $U=0$ du n-ième ordre avec α points doubles et β points de rebroussement; mon investigation a cependant par rapport à quelques points besoin de confirmation.

Je commence par rappeler que l'équation d'une courbe avec des points doubles et de rebroussement peut être présentée sous la forme

$$U=aP+bQ+cR+\cdots=0,$$

où $a, b, c, \ldots$ sont des quantités absolument arbitraires, $P=0$, $Q=0$, $R=0, \ldots$ sont des courbes du n-ième ordre (je suppose toujours que $U=0$ est une courbe du n-ième ordre avéc α points doubles et β points de rebroussement) qui ont chacune pour chaque point double de la courbe $U=0$ un point double au même point, et pour chaque point de rebroussement de la courbe $U=0$ un point de rebroussement au même point et avec la même tangente. En parlant des coefficients de U, je désignerai toujours les quantités $(a, b, c, \ldots)$ sans faire attention aux constantes contenues dans les fonctions $(P, Q, R, \ldots)$. La fonction U (voir les nouvelles Recherches etc.) a un discriminant special KU du degré $3(n-1)^2-7\alpha-11\beta$: il y a en outre une certaine fonction AU des coefficients, laquelle dépend des points de rebroussement, qui semble jouer un rôle analogue en quelque sorte à celui du discriminant. Car soient pour un moment $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ les coordonnées d'un des points de rebroussement de la courbe $U=0$: écrivons $D=xd_x+yd_y+zd_z$, et dans la fonction U substituons $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ au lieu de (x, y, z); l'équation $D^2U=0$ donne le carré de la tan-

gente au point de rebroussement: or $D^2U = aD^2P + bD^2Q + cD^2R + \cdots$ et puisque les courbes $P=0$, $Q=0$, $R=0$, ... ont chacune la même tangente au point de rebroussement, les fonctions D^2P, D^2Q, D^2R, ... seront des fonctions de la forme $\lambda\Phi^2$, $\mu\Phi^2$, $\nu\Phi^2$, ... où $\Phi = 0$ est l'équation de la tangente, et λ, μ, ν ... sont des quantités constantes qui ne dépendent que des constantes que contiennent les fonctions P, Q, R, ... Nous aurons donc $D^2U = (a\lambda + b\mu + c\nu + \cdots)\,\Phi^2$; et je remarque que l'équation $a\lambda + b\mu + c\nu + \cdots = 0$ serait la condition pour qu'il y eut au lieu du point de rebroussement un point triple. On obtient donc l'équation du système des carrés des tangentes aux points de rebroussement sous la forme

$$(a\lambda_1 + b\mu_1 + c\nu_1 \ldots)(a\lambda_2 + b\mu_2 + c\nu_2 \ldots)\ldots(a\lambda_\beta + b\mu_\beta + c\nu_\beta + \cdots)\,\Phi_1^2\Phi_2^2\ldots\Phi_\beta^2 = 0:$$

le facteur constant $(a\lambda_1 + b\mu_1 + c\nu_1 \ldots)\ldots(a\lambda_\beta + b\mu_\beta + c\nu_\beta \ldots)$, du degré β par rapport aux coefficients, est précisement la derivée que je nomme AU (de manière que $AU = 0$ est la condition pour l'existence d'un point triple): l'autre facteur $\Phi_1^2\Phi_2^2 \ldots \Phi_\beta^2$ est du degré 0 par rapport aux coefficients.

Cela étant, je pose d'abord, pour la verifier plus tard, la table suivante:

	Degrés par rapport aux variables	Degrés par rapport aux coefficients
équation de la courbe, $U = 0$	2	1
condition pour un nouveau point double, $KU = 0$	0	$3(n-1)^2 - 7\alpha - 11\beta$
condition pour un point triple, $AU = 0$	0	β
équation de la courbe réciproque, $FU = 0$	$n(n-1) - 2\alpha - 3\beta$	$2(n-1)$
équation de la courbe des inflexions, $HU = 0$	$3(n-2)$	3
équation des tangentes aux points d'inflexions, $QU = 0$	$3n(n-2) - 6\alpha - 8\beta$	$3n(n-2) - 3\alpha - 4\beta$
équation de la courbe des contacts des tangentes doubles $\Pi U = 0$	$(n-2)(n^2-9)$	$(n+4)(n-3)$
équation des tangentes doubles, $PU = 0$	$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - (n^2-n-6)(2\alpha+3\beta) \\ \quad + 2\alpha(\alpha-1) + 6\alpha\beta + \frac{9}{2}\beta(\beta-1)\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}2n(n-2)(n-3) \\ \quad -(2n-6)(2\alpha+3\beta) - \beta\end{array}\right.$
équation de la courbe réciproque de la réciproque de la courbe, $FFU = 0$	$(n^2-n-2\alpha-3\beta)(n^2-n-1-2\alpha-3\beta)$	$2(n^2-n-1-2\alpha-3\beta)2(n-1)$.

Et puis on a l'équation

$$FFU = AU.KU.(PU)^2.(QU)^3.U.$$

La comparaison des degrés par rapport aux variables donne

$$\begin{aligned}&(n^2-n-2\alpha-3\beta)(n^2-n-1-2\alpha-3\beta)\\ = \; & n(n-2)(n^2-9)-(n^2-n-6)(4\alpha+6\beta)+4\alpha(\alpha-1)+12\alpha\beta+9\beta(\beta-1)\\ &+9n(n-2) \qquad\qquad -18\alpha-24\beta\\ &+n\end{aligned}$$

ce qui est exacte. La comparaison des degrés par rapport aux coëfficients donne

$$\begin{aligned}4(n-1)(n^2-n-1-2\alpha-3\beta) = \; & \beta\\ &+3(n-1)^2-7\alpha-11\beta\\ &+4n(n-2)(n-3)-(4n-12)(2\alpha+3\beta)-2\beta\\ &+9n(n-2)-9\alpha-12\beta\\ &+1\end{aligned}$$

ce qui de même est exacte.

Les expressions pour les degrés de KU et AU sont déjà démontrées; pour les autres expressions, en considérant d'abord la courbe générale $W=0$ du n-ième ordre, laquelle, en établissant entre les coefficients les relations convenables, se réduit à la courbe $U=0$ avec α points doubles et β points de rebroussement, on sait par la théorie de M. *Plücker* quels sont les facteurs desquels seront affectés FW, QW, PW, et qu'il faut écarter pour réduire ces fonctions à FU, QU, PU respectivement.

Pour FW ce facteur est A^2B^3, où $A=0$ est l'équation tangentielle des points doubles, et $B=0$, l'équation tangentielle des points de rebroussement: la réduction du degré par rapport aux variables est donc de $2\alpha+3\beta$ unités. En prenant (x, y, z) pour les coordonnés d'un point double quelconque on a $A=\Pi(\xi x+\eta y+\zeta z)$, et de même en prenant (x, y, z) pour les coordonnés d'un point de rebroussement quelconque on a $B=\Pi(\xi x+\eta y+\zeta z)$; A et B ne contiennent donc pas les coefficients $a, b, c, \ldots$ de U, et une réduction de degré par rapport aux coefficients n'a pas lieu.

Pour QW le facteur est M^3N^4, où $M=0$ est l'équation des tangentes aux points doubles et $N=0$ l'équation des carrés des tangentes aux points de rebroussement: la réduction de degré par rapport aux variables est donc $6\alpha+8\beta$ unités. Soient (x, y, z) les coordonnés d'un point double,

$D = xd_x + yd_y + zd_z$; en substituant comme auparavant (x, y, z) au lieu de (x, y, z) dans la fonction U, l'équation des deux tangentes au point double est $D^2U = 0$, où D^2U est du degré 1 par rapport aux coefficients: en formant l'équation analogue pour chaque point double on a $M = \Pi(D^2U) = 0$, et M sera du degré α par rapport aux coefficients. En prenant (x, y, z) pour les coordonnés d'un point de rebroussement, on a de même $N = \Pi(D^2U) = 0$ pour l'équation des carrés des tangentes aux points de rebroussement; N est donc du degré β par rapport aux coefficients. Nous avons vu que l'équation $N = 0$ se réduit à la forme $N = AU.\Phi_1^2\Phi_2^2\ldots\Phi_\beta^2$, j'admets cependant qu'il faut retenir ce facteur constant AU, et considérer ainsi N comme étant effectivement du degré β. Le facteur M^3N^4 est donc du degré $3\alpha + 4\beta$, et la réduction de degré par rapport aux coefficients qui a lieu pour QW est donc de $3\alpha + 4\beta$ unités.

Pour PW le facteur est R^2S^3T, ou $R = 0$ est l'équation du système des tangentes menées à la courbe par les points doubles, $S = 0$ l'équation du système des tangentes menées à la courbe par les points de rebroussement, $T = 0$ l'équation des droites qui contiennent deux points doubles (chacune de ces droites étant comptée 4 fois) ou qui contiennent un point double et un point de rebroussement (chacune de ces droites étant comptée 6 fois), ou enfin qui contiennent deux points de rebroussement (chacune de ces droites étant comptée 9 fois). Par rapport aux variables le degré de R est égal à $\alpha\{n^2 - n - 6 - 2(\alpha - 1) - 3\beta\}$, celui de S à $\beta\{n^2 - n - 6 - 2\alpha - 3(\beta - 1)\}$: le degré de R^2S^3 est donc égal à $(n^2 - n - 6)(2\alpha + 3\beta) - 4\alpha(\alpha - 1) - 6\alpha\beta - 9\beta(\beta - 1)$. Le degré de T est égal à $4 \cdot \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1) + 6\alpha\beta + 9 \cdot \frac{1}{2}\beta(\beta - 1)$, le degré de R^2S^3T s'élève donc à $(n^2 - n - 6)(2\alpha + 3\beta) - 2\alpha(\alpha - 1) - 3\alpha\beta - \frac{9}{2}\beta(\beta - 1)$, nombre qui exprime la réduction de degré par rapport aux variables qui a lieu pour PW. Par rapport aux coefficients le degré de R est égal à $(2n - 6)\alpha$, celui de S à $(2n - 6)\beta$, celui de T à zéro; le degré de R^2S^3T s'élève donc à $(2n - 6)(2\alpha + 3\beta)$. On aurait par conséquent pour PW par rapport aux coefficients une réduction de degré égale à $(2n - 6)(2\alpha + 3\beta)$ unités; mais d'après un exemple très-particulier (il est vrai) j'admets que PW contiendra encore le facteur constant AU, ce qui donnerait pour le nombre dont il s'agit la valeur $(2n - 6)(2\alpha + 3\beta) + \beta$.

J'ai dit que par rapport aux coefficients le degré de R est égal à $(2n - 6)\alpha$ et celui de S à $(2n - 6)\beta$: pour prouver l'exactitude de ces nombres il faut se rappeler que l'équation $\Theta = 0$ des tangentes menées par un point quelconque est du degré $(n^2 - n)$ par rapport aux variables et du degré $2(n - 1)$ par rapport aux coefficients. En prenant pour le point dont il s'agit un point

double ou de rebroussement et supposant que dans la courbe il n'y a que ce seul point double ou de rebroussement, le degré par rapport aux variables est (n^2-n-6) et celui par rapport aux coefficients est $2n-6$. Mais dans le cas général Θ contiendra comme facteur G^2H^3 en dénotant par $G=0$ l'équation des droites menées par le point dont il s'agit à tous les points doubles, et par $H=0$ l'équation des droites menées par ce point à tous les points de rebroussement. De cette manière on obtient un abaissement de $2(\alpha-1)+3\beta$, ou de $2\alpha+3(\beta-1)$ unités pour le degré par rapport aux variables, mais le degré par rapport aux coefficients est toujours $(2n-6)$. Donc en considérant les systèmes des points doubles et des points de rebroussement, pour R la réduction est égal à $(2n-6)\alpha$ est pour S à $(2n-6)\beta$ unités.

Les difficultés de cette investigation sont dûes aux points de rebroussement en admettant en FFU l'existence d'un facteur $(AU)^m$, il n'est pas clair que l'on doit avoir $m=1$; et la démonstration pour les valeurs des termes en β, des expressions $3\alpha+4\beta$ et $(2n-6)(2\alpha+3\beta)-\beta$ est imparfaite. Ecrivons

$$FFU = (AU)^m.KU.(PU)^2(QU)^3.U$$

et supposons que le nombre qui exprime la réduction de degré par rapport aux coefficients soit donné par la valeur $3\alpha+k\beta$ pour QU et par la valeur $(2n-6)(2\alpha+3\beta)+l\beta$ pour PU. La comparaison des degrés par rapport aux coefficients donne

$$\begin{aligned} 4(n-1)(n^2-n-2\alpha-3\beta) = {} & \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; m\beta \\ & +3(n-1)^2-7\alpha-11\beta \\ & +4n(n-2)(n-3)-(4n-12)(2\alpha+3\beta)-2l\beta, \\ & +9n(n-2)-9\alpha-3k\beta, \\ & +1, \end{aligned}$$

ce qui établit la relation $m-2l=3k-13$ à laquelle on satisfait en prenant $m=1$, $l=1$, $k=4$. Mais je serais bien aise de prouver ces valeurs par une démonstration plus concluante.

Cambridge 26. Mai 1864.

Note sur la surface du quatrième ordre de *Steiner*.

(Par M. *A. Cayley* à Cambridge.)

En considérant les deux coniques définies par les équations

$$U = (a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h)(x,\ y,\ z)^2 = 0$$
$$U' = (a',b',c',f',g',h')(x',y',z')^2 = 0,$$

on en déduit les trois équations dérivées

$$F = (bc - f^2,\ ca - g^2,\ ab - h^2,\ gh - af,\ hf - bg,\ fg - ch)(\xi, \eta, \zeta)^2 = 0,$$
$$G = (bc' + b'c - 2ff',\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)(\xi, \eta, \zeta)^2 = 0,$$
$$F' = (b'c' - f'^2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)(\xi, \eta, \zeta)^2 = 0,$$

et l'on sait que $F = 0$ est l'équation tangentielle de la conique $U = 0$ (autrement dit, l'équation qui exprime que cette conique est touchée par la droite $\xi x + \zeta y + \zeta z = 0$), que de même $F' = 0$ est l'équation tangentielle de la conique $U' = 0$, et enfin que $G = 0$ est l'équation tangentielle de la conique enveloppée par une droite $\xi x + \eta y + \zeta z = 0$ qui coupe harmoniquement les deux coniques $U = 0$, $U' = 0$.

Or, en considérant les deux surfaces quadriques

$$U = (a,\ b,\ c,\ d,\ f,\ g,\ h,\ l,\ m,\ n)(x, y, z, w)^2 = 0,$$
$$U' = (a', b', c', d', f', g', h', l', m', n')(x, y, z, w)^2 = 0,$$

on forme d'une manière analogue les quatre équations dérivées

$$F = (b\,c\,d + \text{etc.}, \ldots)(\xi, \eta, \zeta, \omega)^2 = 0,$$
$$G = (b'c\,d + \text{etc.}, \ldots)(\xi, \eta, \zeta, \omega)^2 = 0,$$
$$G' = (b'c'd + \text{etc.}, \ldots)(\xi, \eta, \zeta, \omega)^2 = 0,$$
$$F' = (b'c'd' + \text{etc.}, \ldots)(\xi, \eta, \zeta, \omega)^2 = 0.$$

$F = 0$ est l'équation tangentielle de la surface $U = 0$ (et de même $F' = 0$ est l'équation tangentielle de la surface $U' = 0$). Les deux équations $G = 0$, $G' = 0$, qui ont des coefficients formés d'après une loi facile à saisir se changent l'une dans l'autre, lorsqu'on échange entre elles les deux surfaces quadriques $U = 0$, $U' = 0$. L'équation $G' = 0$ (celle des deux dont il s'agira dans la suite) est l'équation tangentielle de la surface quadrique enveloppée par un plan $\xi x + \eta y + \zeta z + \omega w = 0$ qui coupe les surfaces $U = 0$, $U' = 0$ selon

des coniques $S=0$, $S'=0$ telles qu'il y ait sur la conique $S=0$ une infinité de systèmes de trois points conjugués par rapport à la conique $S'=0$.

En supposant à present que l'équation $U'=0$ est celle d'un cône, on peut dire que $G'=0$ est l'équation tangentielle de la surface quadrique enveloppée par un plan qui coupe la surface $U=0$ selon une conique $S=0$ telle que par cette conique et par le sommet du cône $U'=0$ on puisse faire passer une infinité de systèmes de trois droites conjuguées par rapport au cône $U'=0$. On peut présenter le theorème sous une autre forme; en faisant passer par le sommet du cône $U'=0$ trois droites conjuguées par rapport à ce cône, et en choississant à volonté l'un des deux points de rencontre de chacune des droites avec la surface $U=0$, on obtient trois points qui déterminent un plan; en considérant tous les systèmes des trois droites conjuguées, on a pour chaque système un plan, et l'enveloppe de ces plans n'est autre chose que la surface quadrique $G'=0$.

Je suppose que le sommet du cône $U'=0$ soit situé sur la surface $U=0$, et je dis que la surface $G'=0$ se réduira à un système de deux points, à savoir le sommet du cône $U'=0$ et un autre point. Pour démontrer cela, on peut prendre pour coordonnés du sommet $x=0, y=0, z=0$; les deux équations seront alors

$$U=(a,\ b,\ c,\ 0,f,\ g,\ h,\ l,\ m,\ n)(x,y,z,w)^2=0,$$
$$U'=(a',b',c',0,f',g',h',0,0,0)(x,y,z,w)^2=0,$$

(ou, ce qui est la même chose, $U'=(a',b',c',f',g',h')(x,y,z)^2=0$) et en substituant ces valeurs on voit sans peine que les coefficients de $x^2, y^2, z^2, xz, zx, xy$ dans la fonction G' se réduiront à zero, et que l'équation $G'=0$ aura la forme

$$G'=(0,0,0,D,0,0,0,L,M,N)(\xi,\eta,\zeta,\omega)^2=0,$$

c'est à dire nous aurons

$$G'=\omega(D\omega+2L\xi+2M\eta+2N\zeta)=0$$

équation qui représente en effet le point $\omega=0$ (ou ce qui est la même chose le point $x=0$, $y=0$, $z=0$) et un autre point $D\omega+2L\xi+2M\eta+2N\zeta=0$, ou ce qui est la même chose le point $x:y:z:w=2L:2M:2N:D$.

Dans le cas actuel chacune des trois droites rencontre la surface $U=0$ dans le sommet et de plus dans un seul point, et en prenant ce dernier point pour point de rencontre de la droite avec la surface $U=0$ le plan mené par les trois points ne passe pas par le sommet; ce plan passe donc par le point $x:y:z:w=2L:2M:2N:D$, et on a ainsi

Théorème I. Fn faisant passer par un point donné de la surface quadrique $U=0$ trois droites conjuguées par rapport au cône $U'=0$ (qui a ce même point pour sommet) le plan mené par les trois points de rencontre des droites avec la surface $U=0$ passe toujours (quel que soit le système des trois droites conjuguées) par un point fixe.

J'ajoute que lorsque les équations $U=0$, $U'=0$ ont la forme spéciale, qui leur a été donnée en dernier lieu, les coordonnés du point seront $x:y:z:w=2L:2M:2N:D$, et il convient de remarquer que ces valeurs L, M, N, D sont des fonctions quadriques par rapport aux coefficients $(a', \ldots)$ du cône $U'=0$.

Au lieu d'un cône donné $U'=0$, considérons le système entier des cônes $\lambda P+\mu Q+\nu R=0$, où $P=0$, $Q=0$, $R=0$ sont des cônes donnés ayant leur sommet commun dans le point $(x=0, y=0, z=0)$ de la surface et λ, μ, ν coefficients arbitraires, qui n'est autre chose que celui des cônes en involution avec les cônes donnés $P=0$, $Q=0$, $R=0$. A chaque système des coefficients λ, μ, ν correspond un point fixe, et en conservant pour ses coordonnées la notation antérieure $x:y:z:w=2L:2M:2N:D$, les quantités L, M, N, D sont des fonctions quadriques des quantités arbitraires λ, μ, ν. Le lieu du point dont il s'agit sera evidemment une surface, et on démontre sans peine que cette surface, est du quatrième ordre. Car pour trouver en combien de points la surface est rencontrée par une droite quelconque il faut combiner avec les équations $x:y:z:w=2L:2M:2N:D$ les équations de la droite dont il s'agit, c'est-à dire deux équations linéaires en x, y, z, w; cela donne deux équations linéaires en L, M, N, D, ou quadriques en (λ, μ, ν). On a ainsi quatre systèmes de valeurs de (λ, μ, ν); et à chaque système correspond un seul point (x, y, z, w), il y a par conséquent quatre points d'intersection, et la surface est du quatrième ordre. Nous avons donc

Théorème II. En considérant au lieu du cône $U'=0$ le système entier des cônes $\lambda P+\mu Q+\nu R=0$ en involution avec les cônes $P=0$, $Q=0$, $R=0$ qui ont leur sommet commun dans un point de la surface $U=0$, le lieu du point fixe du théorème I. est une surface du quatrième ordre.

Cette surface du quatrième ordre est la surface de *Steiner*, considérée dernièrement par MM. *Kummer*, *Weierstrass*, *Schröter*, et *Cremona*.

Cambridge 2[ième] Novembre 1864.

Ueber eine neue analytische Behandlungsweise der Brennpunkte.

(Von Herrn *Siebeck*.)

In seiner bekannten Abhandlung über die Brennpunkte der Curven n^{ter} Classe (Bd. 10 dieses Journals) ist *Plücker* zu einem Resultate gekommen, welches sich nach einigen Abänderungen kurz so ausdrücken lässt: „Ist bei Annahme eines rechtwinkligen Coordinatensystems $F(u, v, w) = 0$ die Gleichung einer Curve n^{ter} Classe (wobei vorausgesetzt wird, dass die Punkt- und die Liniencoordinaten durch die Gleichung $xu+yv+w=0$ mit einander verbunden sind), so giebt die Gleichung $F(-1, -i, x+yi) = 0$, wo $i=\sqrt{-1}$, die Brennpunkte der Curve." Es gewährt aber besondere Vortheile, wenn man hier, was wie es scheint noch nirgends geschehen ist, $F(-1, -i, x+yi)$ als Function *einer* Variabeln $z = x+yi$ d. h. als monogene Function betrachtet, *denn die Theorie der Brennpunkte algebraischer Curven fällt dadurch lediglich der Algebra binärer Formen anheim.* So ergiebt sich z. B. aus der Zerlegung von $F(-1, -i, z)$ in n Factoren, da mit der Gleichung

$$(x+yi-\alpha_1-\beta_1 i)(x+yi-\alpha_2-\beta_2 i)\dots(x+yi-\alpha_n-\beta_n i) = 0$$

zugleich die nachfolgende gilt

$$(x-yi-\alpha_1+\beta_1 i)(x-yi-\alpha_2+\beta_2 i)\dots(x-yi-\alpha_n+\beta_n i) = 0,$$

indem man einen beliebigen Factor der einen dieser beiden Gleichungen zugleich mit einem beliebigen Factor der andern $=0$ setzt (was auf n^2 verschiedene Arten geschehen kann), nicht allein, dass es, wie *Plücker* gezeigt hat, im Ganzen n^2 Brennpunkte giebt, sondern auch *dass unter diesen n reell* (mit den Coordinaten α_1, β_1, α_2, β_2 etc.) und $n(n-1)$ *imaginär* sind und dass von den letzteren je zwei einander so zugeordnet sind, dass sie in der Normalen liegen, welche man auf der Verbindungslinie zweier reeller Brennpunkte im Mittelpunkte errichten kann. Da somit die imaginären Brennpunkte durch die reellen vollständig bestimmt sind, so wollen wir in dem Nachfolgenden nur die reellen Brennpunkte betrachten.

Es ergiebt sich ferner auf diese Weise, dass $\frac{\partial F(-1, -i, z)}{\partial z} = 0$ die Gleichung der $n-1$ Brennpunkte der 1ten Polaren der unendlich entfernten

Geraden ist, ebenso $\frac{\partial^2 F(-1, -i, z)}{\partial z^2}$ die Gleichung für die $n-2$ Brennpunkte der zweiten Polare etc., $\frac{\partial^{n-1} F(-1, -i, z)}{\partial z^{n-1}} = 0$ die Gleichung für den Brennpunkt der $(n-1)^{\text{ten}}$ Polare d. h. für den Mittelpunkt der Curve. Auch ersieht man sofort, dass zwischen diesen Brennpunktgruppen dieselbe Familienzusammengehörigkeit Statt findet, wie zwischen den Curven, zu denen sie gehören, dass insbesondere durch die erste Gruppe, nämlich die Brennpunkte der ursprünglichen Curve, alle folgenden Gruppen vollständig bestimmt sind und von dieser ersten Gruppe in einer lediglich durch monogene Functionen ausgedrückten Abhängigkeit stehen; dass der Mittelpunkt, welcher die letzte Gruppe bildet, der Schwerpunkt einer jeden von den übrigen Gruppen ist; ferner dass zwei Brennpunkte einer gegebenen Curve zusammenfallen, wenn die Discriminante von $F(-1, -i, z)$ verschwindet, etc.

Um von dem Wesen dieser Methode einen deutlicheren Begriff zu geben, wollen wir sie zunächst auf die Kegelschnitte anwenden. Dieselbe Gleichung, welche in der Theorie der Grundgebilde die Bedingung angiebt, unter welcher vier in gerader Linie liegende Punkte harmonisch sind, ist bei Anwendung des Punktcalcüls mit complexen Zahlen der Ausdruck dafür, dass vier in einer Ebene liegende Punkte in einem Kreise liegen und harmonische Punkte dieses Kreises sind (sie enthält nämlich zwei Bestimmungen, wie jede Gleichung zwischen complexen Zahlen). Nun ist aber, wenn zwei binäre Formen zweiter Ordnung $az^2+2bz+c=0$ und $a'z^2+2b'z+c'=0$ gegeben sind, das Verschwinden der Invariante $ac'+a'c-2bb'$ die Bedingung dafür, dass die durch jene beiden Formen dargestellten Punktpaare harmonisch liegen. Dieselbe Invariante wird also, wenn wir unter a, b, c, z etc. *complexe* Zahlen verstehen, durch ihr Verschwinden anzeigen, dass die beiden Punktpaare harmonische Punkte eines Kreises sind. Für zwei Kegelschnitte $a_{11}u^2+a_{22}v^2+a_{33}w^2 +2a_{23}vw+2a_{13}uw+2a_{12}uv = 0$ und $b_{11}u^2+b_{22}v^2+$ etc. $=0$ sind aber die Brennpunkte durch die Gleichungen

$$a_{33}z^2-2(a_{13}+a_{23}i)z+a_{11}-a_{22}+2a_{12}i = 0,$$
$$b_{33}z^2-2(b_{13}+b_{23}i)z+b_{11}-b_{22}+2b_{12}i = 0$$

bestimmt. Das Verschwinden der obigen Invariante giebt daher die beiden Gleichungen

$$a_{33}b_{11}+a_{11}b_{33}-2a_{13}b_{13} = a_{33}b_{22}+a_{22}b_{33}-2a_{23}b_{23},$$
$$a_{33}b_{12}+a_{12}b_{33}-a_{13}b_{23}-a_{23}b_{13} = 0.$$

Hält man dieses Resultat zusammen mit der bekannten Gleichung für denjenigen Kegelschnitt, von dessen Punkten aus nur harmonische Tangenten an die beiden gegebenen Kegelschnitte gezogen werden können, und welcher u. A. auch durch die acht Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten derselben geht, so sieht man sogleich, dass dieser Kegelschnitt, wenn jene beiden Bedingungsgleichungen Statt finden, in einen Kreis übergehen muss. Wir erhalten somit den Satz: Sind die beiden Brennpunktspaare zweier Kegelschnitte harmonische Punkte eines Kreises, so liegen die acht Berührungspunkte der vier gemeinsamen Tangenten beider Kegelschnitte ebenfalls in einem Kreise.

Zu noch interressanteren Resultaten führt der bekannte Satz, nach welchem drei binäre Formen 2[ten] Grades f, φ, ψ drei in Involution stehende Punktpaare geben, wenn $\psi = \lambda f + \mu\psi$ (wo λ und μ constant) und die Doppelpunkte der Involution durch die *Hesse*sche Covariante zweier beliebiger dieser drei Formen dargestellt werden. Sind nämlich $f(u, v, w)$, $\varphi(u, v, w)$, $\psi(u, v, w)$ drei beliebige Kegelschnitte, welche jedoch der Bedingung $\lambda f + \mu\varphi = \psi$ genügen und folglich dieselben vier Geraden berühren, so erhalten wir, da anderntheils $f(-1, -i, z) = 0$, $\varphi(-1, -i, z) = 0$, $\psi(-1, -i, z) = 0$ die Gleichungen für die Brennpunte derselben sind, sofort den Satz: *Ist ein System von Kegelschnitten einem und demselben Vierseit einbeschrieben, so stehen die Brennpunktpaare derselben in Kreisinvolution, d. h. es giebt in der Ebene ein festes Punktpaar, welches mit jedem Brennpunktpaare des Systems vier harmonische Punkte eines Kreises bildet.* Dieses feste Punktpaar besteht nämlich aus den Doppelpunkten der Kreisinvolution und lässt sich mit Hülfe der *Hesse*schen Covariante leicht bestimmen.

Vorstehende Bemerkungen mögen genügen, um den Standpunkt anzudeuten, von welchem aus der Verfasser zu den nachstehenden Sätzen gelangt ist, deren Entwickelung, da sie in analytischer Beziehung nichts besonders Bemerkenswerthes darbieten würde, weggelassen worden ist.

I. Lehrsätze über die Curven der Brennpunkte eines Systems von Kegelschnitten, welche demselben Vierseit einbeschrieben sind.

1) *Fallen zwei conjugirte Punkte einer Curve dritter Ordnung in die beiden unendlich entfernten imaginären Kreispunkte, so lassen sich unendlich viele Vierseite von der Beschaffenheit construiren, dass jene Curve die Curve der Brennpunkte aller Kegelschnitte ist, welche einem beliebigen dieser Vier-*

seite einbeschrieben sind. Sind nämlich F_1 und F_2, G_1 und G_2 zwei beliebige Punktpaare der Curve, welche einander nach demjenigen der drei Beziehungssysteme conjugirt sind, nach welchem die beiden unendlich entfernten imaginären Kreispunkte einander entsprechen, so erhält man eines jener Vierseite, wenn man zwei beliebige Kegelschnitte construirt, welche resp. F_1 und F_2, G_1 und G_2 zu Brennpunkten haben, und die vier gemeinsamen Tangenten dieser Kegelschnitte zieht. Diese Tangenten bilden nämlich ein solches Vierseit und für jeden demselben Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitt liegen die beiden Brennpunkte auf der Curve und sind conjugirte Punkte desselben.

2) Da jede Curve dritter Ordnung so projicirt werden kann, dass zwei conjugirte Punkte in die beiden unendlich entfernten imaginären Kreispunkte fallen, so kann sie auch als Projection einer Brennpunktcurve betrachtet werden. Die rein projectivischen Eigenschaften der Brennpunktcurven sind also allgemeine Eigenschaften aller Curven dritter Ordnung.

3) Entsprechen einander zwei conjugirte Punkte einer Brennpunktcurve nach demselben System, nach welchem die beiden unendlich entfernten imaginären Kreispunkte conjugirt sind, so können sie immer als conjugirte Pole in Bezug auf drei feste gleichseitige Hyperbeln betrachtet werden; und umgekehrt: der Ort der gemeinsamen conjugirten Pole dreier gleichseitiger Hyperbeln ist immer eine Brennpunktcurve (folgt einfach daraus, dass die beiden unendlich entfernten imaginären Kreispunkte conjugirte Pole für alle gleichseitigen Hyperbeln sind).

4) Zieht man von einem Punkte einer Brennpunktcurve vier Tangenten an dieselbe und verbindet man die Berührungspunkte durch sechs gerade Linien, so stehen in dem so entstandenen vollständigen Viereck zwei gegenüberstehende Seiten auf einander normal, nämlich diejenigen, durch welche je zwei zusammengehörige Brennpunkte mit einander verbunden werden.

4) Die Curve der Brennpunkte eines Systems von Kegelschnitten, welche demselben Vierseit einbeschrieben sind, ist vollständig bestimmt durch die Gerade L, in welcher die Mittelpunkte der Kegelschnitte liegen und durch die beiden im Eingange erwähnten Doppelpunkte der Kreisinvolution J und J', und lässt sich aus diesen Elementen leicht construiren. Man nehme nämlich auf L einen beliebigen Punkt M an, halbire den Winkel JMJ' und trage auf der Halbirungslinie von M aus nach entgegengesetzten Richtungen Abschnitte MF und MF' auf, welche gleich der mittleren Proportionale der Strecken MJ und MJ' sind, so sind F und F' zwei conjugirte Punkte der Curve. Als

specieller Fall ist hier derjenige zu bemerken, in welchem L durch einen der Punkte J und J' geht. Die Brennpunktcurve hat dann einen Doppelpunkt, indem nämlich in J oder J' zwei conjugirte Punkte vereinigt sind; so dass sich also in dem System der Kegelschnitte ein Kreis befindet.

Beiläufig werde bemerkt, dass

$$F = (x^2+y^2)(\alpha x+\beta y+2\gamma)+\alpha x-\beta y = 0$$

die Gleichung der Curve ist für ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen x-Achse die Verbindungslinie von J und J' und dessen Mittelpunkt die Mitte von JJ' ist, wobei zugleich angenommen ist, dass die Abscissen von J und $J' = \pm 1$ und dass $\alpha x+\beta y+\gamma = 0$ die Gleichung von L ist. Ferner hat man

$$\tfrac{2}{3}\Delta F = 2(\alpha^2-\beta^2-2\gamma^2)F+(\alpha^2+\beta^2)\varphi,$$

wo

$$\varphi = \alpha x^3+3\beta x^2y-3\alpha xy^2-\beta y^3-3\alpha x-3\beta y-2\gamma,$$

also ein in Bezug auf α, β, γ linearer Ausdruck ist. Für die Invarianten S und T hat man die einfachen Ausdrücke

$$S = \tfrac{4}{81}(4(\alpha^2-\beta^2-2\gamma^2)^2-3(\alpha^2+\beta^2)^2),$$
$$T = \tfrac{8}{729}(8(\alpha^2-\beta^2-2\gamma^2)^2-9(\alpha^2+\beta^2)^2)(\alpha^2-\beta^2-2\gamma^2).$$

Auch ist

$$\Delta\varphi = 6(\alpha^2+\beta^2)F.$$

5) Das Product der Entfernungen des Centrums der Kreisinvolution (welches zugleich der Brennpunkt der dem Kegelschnittsystem zugehörigen Parabel ist) von zwei conjugirten Brennpunkten ist constant, nämlich gleich dem Quadrat der Entfernung der Punkte J und J' von diesem Centrum; auch bilden die Verbindungslinien dieses Centrums mit zwei conjugirten Punkten gleiche Winkel mit der Verbindungslinie der Punkte J und J'. Allgemeiner ist folgender Satz:

Sind F_1 und F_2, G_1 und G_2, H_1 und H_2 drei Paar conjugirter Brennpunkte, so ist nur

$$\frac{H_1F_1\,.\,H_1F_2}{H_2F_1\,.\,H_2F_2} = \frac{H_1G_1\,.\,H_1G_2}{H_2G_1\,.\,H_2G_2}$$

und ausserdem die Winkelsumme

$$G_1H_1F_1+G_2H_1F_2 = 0.$$

6) Die Enveloppe der Achsen eines Systems von Kegelschnitten, welche demselben Vierseit einbeschrieben sind, ist eine Curve dritter Classe, von

welcher zwei Brennpunkte mit den Doppelpunkten der mehrfach erwähnten Kreisinvolution zusammenfallen. Der dritte Brennpunkt ist derjenige unendlich entfernte Punkt, welcher in einer zur Geraden der Mittelpunkte normalen Richtung liegt. Je zwei nicht zu ein und demselben Kegelschnitt gehörige Achsen, welche auf einander normal stehen, sind conjugirte Tangenten der Curve und zwar bilden die Durchschnittspunkte derselben mit der Geraden der Kegelschnittmittelpunkte eine Involution. Die Gleichung der Curve ist $(u^2-w^2)(\alpha u+\beta v)+(u^2+v^2)(\gamma w-\alpha u)=0$.

II. Einige allgemeine Eigenschaften der Brennpunkte algebraischer Curven.

1) Es giebt in der Ebene einer Curve n^{ter} Classe immer n feste reelle Punkte von der Beschaffenheit, dass, wenn man einen beliebigen Punkt O der Ebene mit diesen Punkten verbindet, die Summe der Winkel, welche diese n Verbindungslinien mit einer beliebigen festen Richtung bilden, sich von der Summe der Winkel, welche die n von O aus an die Curve gelegten Tangenten mit derselben Richtung bilden, nur um ein ganzes Vielfaches von π unterscheidet. Jene n festen Punkte sind die reellen Brennpunkte der Curve n^{ter} Classe.

2) Denkt man sich von dem beliebigen Punkte O aus n Tangenten an die Curve gelegt, welche in beliebiger Ordnung genommen $L_1, L_2, \dots L_n$ heissen mögen und ausserdem n einander parallele Tangenten von beliebiger Richtung $P_1, P_2, \dots P_n$, und ist A_k der Durchschnittspunkt von L_k und P_k, so bleibt das Product $OA_1.OA_2\dots OA_n$ bei veränderter Richtung der parallelen Tangenten constant und zwar ist es gleich dem Product der Entfernungen des Punktes O von den n reellen Brennpunkten der Curve.

3) Sind in einer Ebene n beliebige Punkte $P_1, P_2, \dots P_n$ gegeben, so giebt es immer eine Curve $(n-1)^{ter}$ Classe, welche die $\frac{n(n-1)}{2}$ Verbindungslinien jener Punkte berührt und zwar so, dass die Berührungspunkte sämmtlich in die Mittelpunkte der Linien fallen. Die $n-1$ reellen Brennpunkte dieser Curve fallen zusammen mit den Brennpunkten der ersten Polaren der unendlich entfernten Geraden in Bezug auf eine beliebige Curve n^{ter} Classe, welche die Punkte $P_1\dots P_n$ zu Brennpunkten hat. Ist z. B. $n=3$, so giebt dies den Satz: Es giebt immer eine Ellipse, welche die Seiten eines gegebenen Dreiecks $P_1P_2P_3$ in ihrer Mitte berührt und die Brennpunkte dieser Ellipse fallen zusammen mit den Brennpunkten des von den sechs Asymptoten

einer beliebigen Curve dritter Classe, welche P_1, P_2, P_3 zu Brennpunkten hat, berührten Kegelschnitts.

4) Bringt man die Gleichung der Brennpunkte $F(-1, -i, z) = 0$ einer Curve n^{ter} Classe auf die Form

$$z^n - nP_1 z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} P_2 z^{n-2} - \cdots + (-1)^n P_n = 0,$$

und setzt man $P_k = p_k(\cos\pi_k + i\sin\pi_k)$, so ersieht man sofort Folgendes:

a) Es ist p_n das Product der Entfernungen des Anfangspunktes der Coordinaten von den n Brennpunkten der Curve; p_{n-1} hat dieselbe Bedeutung für die erste Polare der unendlich entfernten Geraden, p_{n-2} dieselbe Bedeutung für die zweite Polare etc.

b) π_n ist die Summe der Winkel, welche die n Verbindungslinien des Anfangspunktes der Coordinaten mit den n reellen Brennpunkten mit der X-Achse bilden, π_{n-1} hat dieselbe Bedeutung für die erste Polare der unendlich entfernten Geraden etc.

Aus dieser Bemerkung in Verbindung mit den vorhergehenden Sätzen lässt sich, indem man den Coordinatenanfangspunkt (Nullpunkt) der Ebene in den Mittelpunkt einer Curve dritter Classe und die Brennpunkte der conischen Polaren der unendlich entfernten Geraden nach ± 1 verlegt, in Folge der identischen Gleichung

$$z^3 - 3z - 2\cos 3m = (z - 2\cos m)\left(z - 2\cos\left(m + \frac{2\pi}{3}\right)\right)\left(z - 2\cos\left(m - \frac{2\pi}{2}\right)\right)$$

und wenn man berücksichtigt, dass $\cos(x + \alpha i)$ für ein reelles veränderliches x Ausdruck einer Ellipse ist, folgende *Construction der Brennpunkte einer beliebigen Curve dritter Classe* herleiten:

Sei O der Mittelpunkt der Curve dritter Classe, I und I' die Brennpunkte des von den sechs Asymptoten der Curve berührten Kegelschnitts, so lege man an die Curve drei beliebige parallele Tangenten P_1, P_2, P_3 und ziehe ausserdem von O aus die Tangenten L_1, L_2, L_3; sei nun A_k der Durchschnittspunkt von L_k und P_k, und α_k der Winkel, welchen OA_k mit OI bildet, so beschreibe man mit einem Radius, welcher gleich $\sqrt[3]{\frac{OA_1 . OA_2 . OA_3}{2}}$ ist, einen Kreis um O und theile die Peripherie desselben in drei gleiche Theile, so jedoch, dass, wenn C_1, C_2, C_3 die betreffenden Theilpunkte sind, für einen derselben die Winkelgleichung

$$IOC_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3}$$

Statt findet. Hierauf bestimme man die Punkte D_1, D_2, D_3 so, dass D_k zu I, I' und C_k vierter harmonischer Kreispunkt ist, ziehe die Linien C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3, deren Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 heissen mögen. Verlängert man dann die Strecken OM_1, OM_2, OM_3 um sich selbst über M_1, M_2, M_3 hinaus, wodurch man zu den Punkten F_1, F_2, F_3 gelangt, so sind letztere die Brennpunkte der Curve dritter Classe. Es mag hier noch bemerkt werden, dass die Linien OF_1, OF_2, OF_3 den Flächeninhalt der Ellipse, welche durch F_1, F_2, F_3 geht und O zum Mittelpunkte hat, in drei gleiche Theile theilen.

Liegnitz, 1864.

Note über die Evoluten sphärischer Curven.

(Von Herrn *Mehler* zu Danzig.)

Zwei Systeme von Normalen einer Raumcurve, welche zwei Evoluten derselben einhüllen, besitzen, wie sich leicht geometrisch nachweisen lässt, die Eigenschaft, dass irgend zwei entsprechende Normalen aus beiden Systemen einen Winkel von constanter Grösse einschliessen. Dieser Satz führt sogleich zu der Einsicht, dass die Evoluten jeder sphärischen Curve sich wie die jeder ebenen *ohne Hülfe von Quadraturen* bestimmen lassen, da man weiss, dass Eine Evolute sich hier auf einen Punkt, den Kugelmittelpunkt, reducirt. — Es möge dieser Punkt als der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt werden, und es seien x, y, z und ξ, η, ζ die Coordinaten von zwei einander entsprechenden Punkten A und B auf der Evolvente und Evolute. Der Punkt B liegt bekanntlich auf der zu A gehörigen Pollinie der Evolvente, und diese geht durch den Mittelpunkt C der Kugel. Wir wollen diejenige Richtung derselben, welche mit den Coordinatenaxen Winkel bildet, deren Cosinus mit den Differenzen

$$dy\,d^2z - dz\,d^2y = X, \quad dz\,d^2x - dx\,d^2z = Y, \quad dx\,d^2y - dy\,d^2x = Z$$

bezüglich gleiche Vorzeichen haben, durch CR und den Winkel RCA durch ω bezeichnen. Trägt man nun in der Ebene RCA an den Kugelradius $AC(a)$ einen Winkel $CAS = \lambda$ an, der constant bleibt, wenn A auf der Evolvente fortrückt, so ist der Punkt B der Evolute der Durchschnitt der Geraden CR und AS, wenn $\omega + \lambda < \pi$, und der ihrer Verlängerungen, wenn $\omega + \lambda > \pi$. Aus dem Dreiecke ABC findet man in jedem Falle die Länge der Linie BC, und indem man ausserdem BC auf die Coordinatenaxen projicirt und dabei beachtet, dass die Cosinus der von CR mit den Axen gebildeten Winkel resp. $\frac{\varrho X}{\partial s^3}, \frac{\varrho Y}{\partial s^3}, \frac{\varrho Z}{\partial s^3}$ sind, wenn $\varrho = a \sin \omega$ den Krümmungshalbmesser und ds das Bogenelement der Evolvente bezeichnet, so erhält man die Gleichungen der Evoluten in folgender Form:

$$\frac{\xi\,ds^3}{X} = \frac{\eta\,ds^3}{Y} = \frac{\zeta\,ds^3}{Z} = \frac{a^2}{\cot\lambda + \cot\omega}, \quad \text{worin:}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \qquad ds^3.\cot\omega = xX + yY + zZ.$$

Bekanntlich ist für jede beliebige Raumcurve das Differential des Winkels, welchen ihre Krümmungsebene mit der Tangente einer ihrer Evoluten bildet, gleich dem Winkel zweier unendlich nahen Krümmungsebenen. Die vorstehenden Formeln zeigen, dass dieser Differentialausdruck, welcher für ebene Curven den Werth Null annimmt, für sphärische Curven allgemein integrabel ist.

Ich will als Beispiel zur Evolvente den sphärischen Kegelschnitt nehmen:

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \qquad x^2=\frac{a^2-b^2}{b^2}y^2+\frac{a^2-c^2}{c^2}z^2,$$

dessen Projection auf die Ebene der yz eine Ellipse mit den Hauptaxen $2b$ und $2c$ ist. Dann findet man, wenn

$$\frac{[a^2x^2-(a^2-b^2)(a^2-c^2)]^{\frac{1}{2}}\cot\lambda}{bc(a^2-b^2)(a^2-c^2)}=q$$

gesetzt wird:

$$\xi = \frac{a^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\cdot\frac{x^3}{1+q},$$
$$\eta = \frac{a^2(b^2-c^2)}{b^4(a^2-c^2)}\cdot\frac{y^3}{1+q},$$
$$\zeta = -\frac{a^2(b^2-c^2)}{c^4(a^2-b^2)}\cdot\frac{z^3}{1+q}.$$

Die in dieser Note gegebenen Formeln habe ich zuerst mitgetheilt in der Abhandlung: Ueber abwickelbare Flächen und Curven doppelter Krümmung, im Programme der Realschule zu Fraustadt, Ostern 1861.

Danzig, den 2. October 1863.

Ueber Curvenbüschel, die sich gegenseitig berühren.

(Von Herrn *J. N. Bischoff* in Zweibrücken.)

Es seien

$$(1.)\qquad f+\lambda f' = 0$$

und

$$(2.)\qquad \varphi+k\varphi' = 0$$

zwei Curvenbüschel m^{ter} und n^{ter} Ordnung und

$$(3.)\qquad \psi = 0$$

die Bedingung dafür, dass sich (1.) und (2.) berühren. Vermöge (3.) werden die Curven beider Büschel so auf einander bezogen, dass jeder Curve aus (1.) $m(m+2n-3)$ Curven aus (2.) und jeder Curve aus (2.) $n(n+2m-3)$ Curven aus (1.) entsprechen. Demnach liegen die Durchschnittspunkte entsprechender Curvenpaare auf einer Curve von der $3mn(m+n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung. Diese Curve zerfällt aber 1°) zweimal in die Curve T der Berührpunkte, 2°) in die Curve T, auf welcher die übrigen Schnittpunkte liegen. Die Curve T ist von der $(2m+2n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, geht durch die m^2+n^2 Grundpunkte beider Büschel (1.) und (2.), dann durch die $\{(m-1)^2+(n-1)^2+4(m-1)(n-1)\}$ Pole, deren gerade Polaren bezüglich der 4 Curven $f=0$, $f'=0$, $\varphi=0$, $\varphi'=0$ sich im nämlichen Punkte kreuzen, ferner durch die $3(m-1)^2$ Doppelpunkte von ebensoviel Curven des Büschels (1.) und durch die $3(n-1)^2$ Doppelpunkte von ebensoviel Curven des Büschels (2.). Die Curve T ist von der $\{3mn(m+n-2)-2(2m+2n-3\}^{\text{ten}}$ Ordnung und hat jeden der m^2 Grundpunkte zum $\{n(n+2m-3)-2\}$fachen und jeden der n^2 Grundpunkte zum $\{m(m+2n-3)-2\}$fachen Punkt.

Jeder den Curven T und T gemeinschaftliche Punkt ist der Berührpunkt zweier entsprechender Curven aus (1.) und (2.), die sich doppelt berühren, und jeder gemeinschaftliche Punkt, in welchem sich T und T berühren, ist Schmiegungspunkt zweier entsprechender Curven aus (1.) und (2.). Heisst also d die halbe Anzahl der einfachen Schnittpunkte von T und T, r die Anzahl der Berührpunkte dieser beiden Curven, so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} (2m+2n-3)\{3mn(m+n-2)-2(2m+2n-3)\} \\ -n^2\{m(m+2n-3)-2\} \\ -m^2\{n(n+2m-3)-2\} \end{array}\right\} = 2d+2r.$$

Nun ist es leicht, die Zahl r zu finden. Denn zwei sich osculirende entsprechende Curven aus (1.) und (2.) berühren in ihrem Schmiegungspunkt zugleich die Curve T. Man braucht also nur die Anzahl der Curven aus (1.) oder (2.) zu kennen, welche die Curve T berühren. Die Berührpunkte dieser Curven aus (1.) liegen auf einer Curve U von der $2(n+2m-3)(2n+2m-3)^{\text{ten}}$ Ordnung; nun berührt aber U die Curve T in den m^2 Grundpunkten des Büschels (1.) und geht durch die n^2 Grundpunkte des Büschels (2.), sowie durch die $3(m-1)^2$ Doppelpunkte der eben so vielen Curven aus dem Büschel (1.). Folglich ist die Anzahl dieser Curven (1.), die T berühren, oder die Zahl r:

$$r = 2(n+2m-3)(2n+2m-3)-2m^2-n^2-3(m-1)^2 = 3\{(m+n)(m+n-6)+2mn+5\}$$

übereinstimmend mit der von *Steiner* im 49sten Bd. dieses Journals Seite 6 gegebenen Anzahl.

Für die Zahl d oder für die Anzahl der Paare sich entsprechender Curven, die sich doppelt berühren, folgt nun:

$$d = mn(2m^2+2n^2+5mn-9m-9n-11)-6(m^2+n^2-5m-5n+4).$$

Legt man in (1.) und (2.) dem λ und k die Zahlenwerthe λ_1 und k_1 bei und nimmt λ_1, k_1 als Coordinaten eines Punktes P der Ebene, so liefern die Verbindungslinien dieses Punktes P und der mn Schnittpunkte der beiden Curven $f+\lambda_1 f' = 0$, $\varphi+k_1\varphi' = 0$ die mn durch P gehenden Tangenten einer Curve K von der mn^{ten} Classe. So oft λ_1, k_1 der Gleichung (3.) genügen, gehört der Punkt P der Curve K selbst an. Daher ist (3.) die Gleichung der K in Coordinaten, also K von der $\{m(m+2n-3)+n(n+2m-3)\}^{\text{ten}}$ Ordnung. Die beiden unendlich entfernten Punkte der Achsen der λ und k sind der eine ein $n(n+2m-3)$, der andere ein $m(m+2n-3)$ facher Punkt der Curve K, welche die obengenannte Anzahl d von weiteren Doppelpunkten und ausser der obengenannten Anzahl r von Rückkehrpunkten noch weitere $\{m(m-1)+n(n-1)+(m-1)(n-1)\}$ Rückkehrpunkte hat, deren jeder zwei entsprechenden, nicht eigentlich osculirenden Curven aus (1.) und (2.) angehört oder besser entspricht.

München, den 29. Februar 1864.

Bemerkung zu „*Hesse*, Zerlegung der Bedingung für die Gleichheit der Hauptaxen eines auf einer Oberfläche zweiter Ordnung liegenden Kegelschnittes in die Summe von Quadraten." (Bd. 60, p. 305.)

(Von Herrn *Henrici* zu Kiel.)

In der Abhandlung, welche die Ueberschrift nennt, giebt Herr *Hesse* für die Discriminante $(\lambda_1-\lambda_2)^2$ der in λ quadratischen Gleichung

$$(1.)\quad \begin{vmatrix} a_{00}-\lambda & a_{01} & a_{02} & a \\ a_{10} & a_{11}-\lambda & a_{12} & b \\ a_{20} & a_{21} & a_{22}-\lambda & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wo $a_{\varkappa\lambda}=a_{\lambda\varkappa}$ und $a^2+b^2+c^2=1$, verschiedene Darstellungen als Summe von 10, 7, 6 und 5 Quadraten, indem derselbe die Ansicht ausspricht, dass eine directe Zerlegung in zwei Quadrate wegen der Complicirtheit der Coefficienten von λ, wenn nicht ganz unmöglich, so doch unausführbar wird. Lässt man jedoch als Wurzeln der Quadrate gebrochene Functionen von a, b, c zu, so kann man leicht auch Zerlegungen in 2 Quadrate angeben.

Man erhält eine solche Darstellung von $(\lambda_1-\lambda_2)^2$ sofort, wenn man die Gleichung (1.) auf die Form

$$(2.)\quad \begin{vmatrix} e_{11}-\lambda & e_{12} \\ e_{21} & e_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

bringt; denn dann wird

$$(\lambda_1-\lambda_2)^2 = (e_{11}-e_{22})^2+4e_{12}^2.$$

Diese Umformung von (1.) in (2.) lässt sich in folgender Weise ausführen. Da zwischen den a, b, c die Gleichung $a^2+b^2+c^2=1$ besteht, kann man 6 Grössen α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2 so wählen, dass dieselben mit a, b, c verbunden die Coefficienten einer orthogonalen Substitution bilden, also den Gleichungen

$$(3.)\quad \begin{cases} \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1, & \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1, & a^2+b^2+c^2=1, \\ \alpha_2 a+\beta_2 b+\gamma_2 c=0, & a\alpha_1+b\beta_1+c\gamma_1=0, & \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0 \end{cases}$$

genügen. Man bilde sodann die Determinanten

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad R = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & b \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

und multiplicire R zweimal nacheinander mit $\varDelta$. Setzt man hierbei

$$\varphi(x,y,z) = a_{00}x^2+a_{11}y^2+a_{22}z^2+2a_{12}yz+2a_{20}zx+2a_{01}xy,$$

$$\varphi_{11} = \varphi(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1), \quad \varphi_{22} = \varphi(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2), \quad \varphi_{33} = \varphi(a,b,c),$$

$$\varphi_{12} = \varphi_{21} = \tfrac{1}{2}\{\alpha_1\varphi'(\alpha_2)+\beta_1\varphi'(\beta_2)+\gamma_1\varphi'(\gamma_2)\}, \quad \text{u. s. w.}$$

so wird

$$\varDelta.R = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\varphi'(\alpha_1) & \frac{1}{2}\varphi'(\beta_1) & \frac{1}{2}\varphi'(\gamma_1) & 0 \\ \frac{1}{2}\varphi'(\alpha_2) & \frac{1}{2}\varphi'(\beta_2) & \frac{1}{2}\varphi'(\gamma_2) & 0 \\ \frac{1}{2}\varphi'(a) & \frac{1}{2}\varphi'(b) & \frac{1}{2}\varphi'(c) & 1 \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix},$$

$$\varDelta^2.R = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & 0 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & 0 \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix},$$

oder, da $\varDelta$ die Determinante einer orthogonalen Substitution, also $\varDelta^2=1$ ist,

$$R = -\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix}.$$

Substituirt man hierin $a_{00}-\lambda$, $a_{11}-\lambda$, $a_{22}-\lambda$ für a_{00}, a_{11}, a_{22}, so geht R in die linke Seite der Gleichung (1.) über und aus φ_{11}, φ_{12}, φ_{22} wird unter Beachtung der Gleichungen (3.) $\varphi_{11}-\lambda$, φ_{12}, $\varphi_{22}-\lambda$. Es folgt somit die in λ identische Gleichung

$$-\begin{vmatrix} a_{00}-\lambda & a_{01} & a_{02} & a \\ a_{10} & a_{11}-\lambda & a_{12} & b \\ a_{20} & a_{21} & a_{22}-\lambda & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_{11}-\lambda & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22}-\lambda \end{vmatrix},$$

welche die gesuchte Umformung enthält. Die Discriminante der Gleichung (1.) wird also

$$(4.)\left\{\begin{aligned}(\lambda_1-\lambda_2)^2 &= (\varphi_{11}-\varphi_{22})^2+4\varphi_{12}^2\\ &= \{\varphi(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)-\varphi(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)\}^2+\{\alpha_1\varphi'(\alpha_2)+\beta_1\varphi'(\beta_2)+\gamma_1\varphi'(\gamma_2)\}^2.\end{aligned}\right.$$

Um die 6 hier eingeführten Grössen α, β, γ zu bestimmen, sind die Gleichungen (3.) aufzulösen. Da aber nur 5 derselben die 6 gesuchten Grössen enthalten, so werden letztere als Functionen der a, b, c und einer willkürlichen Grösse erscheinen. Nun drückt *Euler* (Nov. Comm. Petrop. XV, p. 101) die Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution in folgender Weise durch drei unabhängige Grössen λ, μ, ν aus:

$$(5.)\left\{\begin{aligned}&hA_0 = 1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2, && hB_0 = 2(\lambda\mu+\nu), && hC_0 = 2(\lambda\nu-\mu),\\ &hA_1 = 2(\lambda\mu-\nu), && hB_1 = 1+\mu^2-\nu^2-\lambda^2, && hC_1 = 2(\mu\nu+\lambda),\\ &hA_2 = 2(\lambda\nu+\mu), && hB_2 = 2(\mu\nu-\lambda), && hC_2 = 1+\nu^2-\lambda^2-\mu^2),\\ & && h\;=\;1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2. &&\end{aligned}\right.$$

Bestimmt man also zwei von den Grössen λ, μ, ν so, dass drei in einer Horizontalreihe stehende Coefficienten die gegebenen Werthe a, b, c annehmen und setzt die Coefficienten in den beiden anderen Reihen entsprechend gleich α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2, so erhält man drei verschiedene Werthsysteme für die letzten Grössen, jenachdem man den A, B, C aus der ersten, zweiten oder dritten Reihe die Werthe a, b, c beilegt. Das erste dieser Systeme, welches man erhält, wenn man μ, ν so bestimmt, dass $A_0=a$, $B_0=b$, $C_0=c$ wird, und $A_1=\alpha_1$, $A_2=\alpha_2$ u. s. w. setzt, wird

$$(6.)\left\{\begin{aligned}&\alpha_1 = -\frac{b(1-\lambda^2)+2c\lambda}{1+\lambda^2}, && \alpha_2 = \frac{-c(1-\lambda^2)+2b\lambda}{1+\lambda^2},\\ &\beta_1 = \frac{(1+a-b^2)(1-\lambda^2)-2bc\lambda}{(1+\lambda^2)(1+a)}, && \beta_2 = -\frac{bc(1-\lambda^2)+2(1+a-b^2)\lambda}{(1+\lambda^2)(1+a)},\\ &\gamma_1 = \frac{-bc(1-\lambda^2)+2(1+a-c^2)\lambda}{(1+\lambda^2)(1+a)}, && \gamma_2 = \frac{(1+a-c^2)(1-\lambda^2)+2bc\lambda}{(1+\lambda^2)(1+a)},\end{aligned}\right.$$

welche Werthe jetzt für jedes λ den Gleichungen (3.) genügen. Aus diesem System gehen die beiden anderen hervor, wenn man α, β, γ; a, b, c; λ, μ, ν cyclisch vertauscht. Setzt man die Werthe (6.) in (4.) ein, so kommt:

$$\varphi_{11}-\varphi_{22}=\frac{((1-\lambda^2)^2-4\lambda^2)P_a+8\lambda(1-\lambda^2)Q_a}{(1+\lambda^2)^2(1+a)^2},\quad \varphi_{12}=\frac{-2\lambda(1-\lambda^2)P_a+((1-\lambda^2)^2-4\lambda^2)Q_a}{(1+\lambda^2)^2(1+a)^2},$$

wo P_a und Q_a von λ unabhängige Functionen der a, b, c sind, nämlich

$$
(7.)\quad \begin{cases}
P_a = (1+a)^2\{c_{11}a - a_{22}a + 2a_{20}c - 2a_{01}b\} \\
\quad + (b^2-c^2)\{c_{00}(1+a)^2 - a_{11}(1+a-b^2) - a_{22}(1+a-c^2) \\
\qquad + 2a_{12}bc + 2a_{20}c(1+a) + 2a_{01}b(1+a)\}, \\
Q_a = (1+a)^2\{a_{\text{[illegible]}}a - a_{\text{[illegible]}}b - a_{01}c\} \\
\quad + bc\ \{a_{00}(1+a)^{\text{[illegible]}} - a_{11}(1+a-b^2) - a_{22}(1+a-c^2) \\
\qquad + 2a_{12}bc + 2a_{20}c(1+a) + 2a_{01}b(1+a)\}.
\end{cases}
$$

Man sieht hieraus, dass die willkürlichen Grössen in den α, β, γ auf die Bedingungen $\varphi_{11}-\varphi_{22}=0$, $\varphi_{12}=0$, unter welchen (1.) gleiche Wurzeln hat, gar keinen Einfluss ausüben, dass vielmehr beide Ausdrücke unabhängig von λ gleichzeitig mit P_a und Q_a zu Null werden. Da nun nur die letzteren Grössen von Interesse sind, so kann man in den α, β, γ die willkürliche Grösse von vorn herein verschwinden lassen und dann nehmen die oben erwähnten drei Systeme folgende einfache Werthe an

$$
(8^a.)\quad \begin{cases}
\alpha_1 = -b, & \beta_1 = \dfrac{1+a-b^2}{1+a}, & \gamma_1 = \dfrac{-bc}{1+a}, \\
\alpha_2 = -c, & \beta_2 = \dfrac{-bc}{1+a}, & \gamma_2 = \dfrac{1+a-c^2}{1+a},
\end{cases}
$$

$$
(8^b.)\quad \begin{cases}
\alpha_1 = \dfrac{-ca}{1+b}, & \beta_1 = -c, & \gamma_1 = \dfrac{1+b-c^2}{1+b}, \\
\alpha_2 = \dfrac{1+b-a^2}{1+b}, & \beta_2 = -a, & \gamma_2 = \dfrac{-ca}{1+b},
\end{cases}
$$

$$
(8^c.)\quad \begin{cases}
\alpha_1 = \dfrac{1+c-a^2}{1+c}, & \beta_1 = \dfrac{-ab}{1+c}, & \gamma_1 = -a, \\
\alpha_2 = \dfrac{-ab}{1+c}, & \beta_2 = \dfrac{1+c-b^2}{1+c}, & \gamma_2 = -b.
\end{cases}
$$

von denen das erste aus (6.) für $\lambda=0$ folgt, während die beiden anderen aus ihm durch cyclische Vertauschung von a, b, c und α, β, γ sich ergeben. Ihnen entsprechen die drei Darstellungen

$$
\varphi_{11}-\varphi_{22} = \frac{P_a}{(1+a)^2}, \qquad \varphi_{12} = \frac{Q_a}{(1+a)^2},
$$
$$
\varphi_{11}-\varphi_{22} = \frac{P_b}{(1+b)^2}, \qquad \varphi_{12} = \frac{Q_b}{(1+b)^2},
$$
$$
\varphi_{11}-\varphi_{22} = \frac{P_c}{(1+c)^2}, \qquad \varphi_{12} = \frac{Q_c}{(1+c)^2},
$$

worin P_b, Q_b uud P_c, Q_c übrigens auch durch cyclische Vertauschung von a, b, c und den Indices 0, 1, 2 der $a_{\varkappa\lambda}$ aus P_a, Q_a hervorgehen. Durch



Einsetzen in (4.) erhalten wir hieraus endlich

$$(9.)\qquad (\lambda_1-\lambda_2)^2 = \frac{P_a^2+4Q_a^2}{(1+a)^4} = \frac{P_b^2+4Q_b^2}{(1+b)^4} = \frac{P_c^2+4Q_c^2}{(1+c)^4},$$

wodurch drei verschiedene Zerlegungen der Discriminante in 2 Quadrate gegeben sind. Die Wurzeln dieser Quadrate sind aber gebrochene Functionen der a, b, c, sie sind ferner nicht homogen und vollständig unsymmetrisch. In Bezug auf die Symmetrie bemerke ich, dass die Gleichung (1.) die Eigenschaft besitzt, durch cyclische Vertauschung von a, b, c und der Indices 0, 1, 2 der $a_{\varkappa\lambda}$ ungeändert zu bleiben, eine Eigenschaft, welche daher auch ihrer Discriminante zukommen muss. In unseren Darstellungen ist dies jedoch in der Form nicht gewahrt, es bilden vielmehr erst die drei Ausdrücke in (9.) zusammen ein System, dessen Form bei der obigen Vertauschung ungeändert bleibt. Die Zerlegungen in 10, 7 und 6 Quadrate, welche Herr *Hesse* giebt, haben dagegen diese Eigenschaft bewahrt, indem dieselben bis auf ein Quadrat in den beiden ersten dieser Entwickelungen aus Systemen von je drei Quadraten zusammengesetzt sind, welche eben wie die drei Ausdrücke in (9.) durch die angegebene cyclische Vertauschung in einander übergehen.

Es hält nicht schwer von den Wurzeln der Quadrate in (9.) zu denen in den *Hesse*schen Entwickelungen überzugehen. Sucht man nämlich solche lineare Functionen von $\frac{P_a}{(1+a)^2}$ und $\frac{Q_a}{(1+a)^2}$, in denen die Nenner wegfallen, so bieten sich aus (7.) sofort

$$(10.)\qquad R_a = \frac{bcP_a-(b^2-c^2)Q_a}{(1+a)^2},\qquad S_a = \frac{aP_a+2bcR_a}{(1+a)^2}$$

und entsprechend R_b, R_c, S_b, S_c. Ihre Entwickelung giebt die einfachen Ausdrücke

$$(11.)\quad \begin{cases} R_a = (a_{11}-a_{22})abc-a_{12}a(b^2-c^2)+a_{20}b(b^2+c^2)-a_{01}c(b^2+c^2),\\ R_b = (a_{22}-a_{00})abc-a_{20}b(c^2-a^2)+a_{01}c(c^2+a^2)-a_{12}a(c^2+a^2),\\ R_c = (a_{00}-a_{11})abc-a_{01}c(a^2-b^2)+a_{12}a(a^2+b^2)-a_{20}b(a^2+b^2),\\ S_a = a\{a_{00}(b^2-c^2)+a_{11}(c^2+a^2)-a_{22}(a^2+b^2)\}+2a_{20}c(a^2+b^2)-2a_{01}b(c^2+a^2),\\ S_b = b\{a_{11}(c^2-a^2)+a_{22}(a^2+b^2)-a_{00}(b^2+c^2)\}+2a_{01}a(b^2+c^2)-2a_{12}c(a^2+b^2),\\ S_c = c\{a_{22}(a^2-b^2)+a_{00}(b^2+c^2)-a_{11}(c^2+a^2)\}+2a_{12}b(c^2+a^2)-2a_{20}a(b^2+c^2). \end{cases}$$

Dies sind bis auf das Vorzeichen genau die Ausdrücke, aus deren Quadraten die Zerlegung [47] besteht, (wobei sich wie im Folgenden die in [ ] citirten Nummern auf die Abhandlung des Herrn *Hesse* beziehen); denn die Entwickelung der Function [45] zeigt, dass

$$(12.)\quad \begin{cases} a_{200} = -R_a, & a_{020} = -R_b, & a_{002} = -R_c, \\ a_{011} = -S_a, & a_{101} = -S_b, & a_{110} = -S_c. \end{cases}$$

Um auch die Wurzeln der zehn Quadrate in [21] durch die R und S auszudrücken, hat man nur zu beachten, dass dieselben, wie aus [19] und [45] folgt, mit den obigen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ durch die in x, y, z identische Gleichung

$$\Sigma a_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} x^{\alpha_0} y^{\alpha_1} z^{\alpha_2} = (ax+by+cz) \Sigma a_{\alpha'_0 \alpha'_1 \alpha'_2} x^{\alpha'_0} y^{\alpha'_1} z^{\alpha'_2}$$

zusammenhängen, wo die Summen über alle ganzen Zahlen auszudehnen sind, für welche $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 = 3$, $\alpha'_0+\alpha'_1+\alpha'_2 = 2$ ist. Man hat also

$$(13.)\quad \begin{cases} a_{300} = -aR_a, \quad a_{030} = -bR_b, \quad a_{003} = -cR_c, \\ \qquad a_{111} = -aS_a - bS_b - cS_c, \\ a_{201} = -cR_a - aS_b, \quad a_{210} = -bR_a - aS_c, \\ a_{120} = -aR_b - bS_c, \quad a_{021} = -cR_b - bS_a, \\ a_{012} = -bR_c - cS_a, \quad a_{102} = -aR_c - cS_b. \end{cases}$$

Nun bestehen zwischen den Grössen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ oder den ihnen proportionalen Grössen $A_{\varkappa\lambda\mu}$ des Herrn *Hesse* einige Relationen, welche uns Relationen zwischen den R und S geben. Aus der Gleichung $A_{200}+A_{020}+A_{002} = 0$ wird

$$(14.)\quad R_a + R_b + R_c = 0$$

und die Gleichungen

$$A_{120}+A_{102}+3A_{300} = 0, \quad A_{021}+A_{210}+3A_{030} = 0, \quad A_{201}+A_{021}+3A_{003} = 0$$

(*Hesse,* Anal. Geom. d. R. p. 217) liefern unter Beachtung von (14.)

$$(15.)\quad \begin{cases} 2aR_a + cS_b + bS_c = 0, \\ 2bR_b + aS_c + cS_a = 0, \\ 2cR_c + bS_a + aS_b = 0. \end{cases}$$

Diese vier Gleichungen (14.) und (15.), welche man auch leicht aus den Formeln (11.) verificirt, genügen, um alle sechs Grössen R und S durch zwei von ihnen auszudrücken, und zeigen, dass alle verschwinden, wenn zwei $= 0$ werden. Für die letzteren wird man am einfachsten zwei correspondirende R und S nehmen, z. B. R_a und S_a. Wollte man, um die Bedingungen zu erhalten, unter welchen (1.) gleiche Wurzeln hat, zwei symmetrische Functionen der R und S wählen, welche bei der cyclischen Vertauschung von a, b, c und der Indices 0, 1, 2 der $a_{\varkappa\lambda}$ ungeändert bleiben, so würde man sehr viel complicirtere Gleichungen erhalten, als wenn man zwei der Ausdrücke (11.) verschwinden lässt.

Berlin, October 1864.

Ueber die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch lokale Messungen auf derselben.

(Von Herrn *E. B. Christoffel* in Zürich.)

Die bisherigen Untersuchungen über die Gestalt der Erde gehen sämmtlich von der durch hydrostatische Gründe nahegelegten Voraussetzung aus, dass dieselbe bis auf geringe und nur zufällige Abweichungen ein Sphäroid ist, welches seine Drehungsaxe mit der Erde gemein hat. Dieses Sphäroid, welches man zum Unterschiede von der wirklichen die wahre Oberfläche der Erde nennt, wird dadurch bestimmt, dass die auf der erstern wirklich ausgeführten Gradmessungen durch möglichst wenig beträchtliche Abänderungen der Beobachtungsresultate mit den auf der letztern ihnen entsprechenden in genaue Uebereinstimmung gebracht werden.

Das in Rede stehende Problem lässt sich indessen auch noch von einem zweiten Gesichtspunkte aus behandeln, welcher von jeder willkürlichen, wenn auch noch so annehmbaren Voraussetzung über die zu ermittelnde Gestalt der Erde unabhängig ist, und aus diesem Grunde zur Entscheidung über die Zulässigkeit einer solchen Voraussetzung führen könnte.

Es versteht sich von selbst, dass auch bei dieser Untersuchung das Studium spezieller Terrains von der Bestimmung der Erdoberfläche im Allgemeinen getrennt werden muss. Aus diesem Grunde wird es keine willkürliche Voraussetzung in sich schliessen, wenn man als die zu bestimmende Gestalt der Erde, mit Berücksichtigung unserer vorläufigen Kenntniss von ihrer allgemeinen Wölbung diejenige allenthalben gewölbte und stetig gekrümmte Oberfläche E bezeichnet, welche mit der wirklichen Erdoberfläche nach Beseitigung ihrer lokalen Hebungen und Senkungen vollständig zusammenfällt. Es muss hinzugefügt werden, dass die in der letzten Bedingung liegende Unbestimmtheit wegen der relativen Geringfügigkeit der zu beseitigenden Unebenheiten als thatsächlich gar nicht vorhanden betrachtet werden kann.

Zur Orientirung über die Lage eines Punktes m auf der Oberfläche E sind die an die tägliche Bewegung der Himmelskugel geknüpften sphärischen Coordinaten desselben im vorliegenden Falle nicht geeignet, weil sie von der Beschaffenheit der Fläche E in der Nähe des Punktes m unabhängig

sind, also auch für sich allein keinen Rückschluss auf dieselbe gestatten. Ich bediene mich aus diesem Grunde zur Bestimmung der Lage von m auf E der sphärischen Coordinaten eines Punktes, den ich das wahre Zenith der Fläche E im Punkte m nenne, und verstehe hierunter denjenigen Punkt m der unendlich entfernten Himmelskugel, in welchem diese von der in m auf der zugänglichen Seite von E errichteten Normale geschnitten wird.

Dies festgestellt, erhält man aus den folgenden Untersuchungen für den vorliegenden Fall den Satz:

> Wenn die Oberfläche E eines sich nicht ins Unendliche erstreckenden Körpers allenthalben gewölbt und stetig gebogen ist, ferner in keinem Punkte derselben ein Hauptkrümmungshalbmesser unendlich gross oder unstetig ist, endlich für jedes wahre Zenith, unabhängig davon, welcher Punkt der Fläche ihm entsprechen mag, die Summe der in letzterem stattfindenden Hauptkrümmungshalbmesser gegeben ist, so ist die Fläche selbst und ihre Lage in der Himmelskugel völlig bestimmt, bis auf einen beliebigen mit ihr verbundenen Punkt, über dessen Ort im absoluten Raume noch verfügt werden kann.

In Folge dieses Satzes kann die Gestalt der Fläche E mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmt werden, wenn man im Stande ist, für eine genügende Anzahl von Punkten derselben, über deren gegenseitige Lage keine anderweitigen Angaben erforderlich sind, 1) die sphärischen Coordinaten ihres wahren Zeniths, und 2) die Summe der in ihnen stattfindenden Hauptkrümmungshalbmesser zu ermitteln.

In der That kann man unter dieser Voraussetzung die Summe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser als Function der Coordinaten des wahren Zeniths darstellen, wobei man nur darauf Rücksicht zu nehmen hat, dass der bei der Interpolation zu Grunde gelegte Ausdruck in keinem Zenith unendlich oder unstetig wird, und einer im art. VIII näher zu bezeichnenden Bedingung genügt. Durch den numerischen Verlauf dieser Function und die übrigen Bedingungen des Satzes ist aber die Fläche E völlig bestimmt.

Es muss hier unerörtert bleiben, in wie weit sich diese Resultate zur wirklichen Ausführung eignen. Die Grundlage zu derselben ist in dem Satze zu suchen, dass ein stetig gekrümmtes, hinlänglich kleines Stück jeder beliebigen Oberfläche als einer Fläche zweiten Grades angehörig betrachtet werden kann. Die letztere muss für jedes passend gewählte Stück T der zur Untersuchung vorgelegten Fläche durch Messungen von derselben Art

bestimmt werden, wie man sie bisher zur Bestimmung des ganzen Erdsphäroïds ausgeführt hat, und liefert dann für die Punkte des genauesten Anschlusses an T das wahre Zenith und die Summe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser.

I.

Dem vorliegenden Zwecke gemäss beschränken wir die nachfolgenden Untersuchungen auf den Fall, wo die vorgelegte Fläche E sich weder ins Unendliche erstreckt, noch auf ihrer zugänglichen Seite in verschiedenen Punkten gleichgerichtete Normalen hat, noch in Zusammenhang, Biegung oder Krümmung irgendwo eine Unstetigkeit darbietet. Zur Vereinfachung schliessen wir überdies den Fall aus, wo ein Hauptkrümmungshalbmesser auf E unendlich gross wird; es mag indessen beiläufig bemerkt werden, dass sämmtliche Resultate gültig bleiben, wenn dieser Fall in einer begrenzten Anzahl von Punkten eintritt, sobald nur nicht das Product aus einem Hauptkrümmungshalbmesser und jeder Potenz der Entfernung von einem dieser Punkte, deren Exponent kleiner als 1 ist, in demselben unendlich wird (art. Vb. und VI).

Die nächste Folgerung, welche wir aus diesen Einschränkungen ziehen, besteht darin, dass nicht bloss zu jedem Punkte m der Fläche E ein einziger Punkt m als wahres Zenith, sondern auch umgekehrt zu jedem wahren Zenith nur ein einziger Punkt der Fläche E gehört.

Dies festgestellt, sei C der Nordpol der Himmelskugel, A der Durchschnitt des ersten Meridians mit dem durch C bestimmten Aequator, B der von A aus auf letzteren um einen Quadraten östlich entfernte Punkt. In dem hierdurch gegebenen Coordinatensystem soll die nach Osten wachsende Länge von m durch φ, seine nach Norden wachsende Breite durch θ bezeichnet werden.

Zur Bestimmung der Lage des entsprechenden Punktes m im Raume bediene ich mich rechtwinkliger Coordinaten x, y, z, welche in den durch die unendlich entfernten Punkte A, B, C bestimmten Richtungen wachsen. Ueber ihren Anfangspunkt, der vorläufig nicht in Betracht kommt, kann erst später (art. VIII) verfügt werden.

Nach dem, was oben festgestellt wurde, sind die rechtwinkligen Coordinaten von m durch die Länge und Breite von m vollständig bestimmt. Da ausserdem wegen des ununterbrochenen Zusammenhanges und der stetigen Biegung von E beide Punkte zugleich ihren Ort nach der Stetigkeit ändern, endlich nach der Voraussetzung kein Punkt m im Unendlichen liegt, so sind

x, y und z einwerthige, endliche und stetige Functionen der Variabeln θ und φ, und letztere von einander unabhängig.

Da aber φ und θ nicht bloss die Lage von m, sondern auch die Richtung der Tangentialebene von E in diesem Punkte bestimmen, so sind sie rückwärts von den verschwindenden Aenderungen abhängig, welche x, y und z durch eine unendlich kleine Ortsänderung des Punktes m auf E erleiden. Aus diesem Grunde erlangen x, y und z, wenn sie als Functionen von φ und θ dargestellt werden, bestimmte Eigenschaften, welche die Grundlage unserer Untersuchung bilden.

II.

Es seien ∂x, ∂y, ∂z die Zunahmen, welche die Coordinaten von m beim Uebergange zu einem auf E unendlich benachbarten Punkte m_1 erlangen Projizirt man das Linienelement mm_1 auf die Normale mm, und bezeichnet die Winkel zwischen dieser und den Richtungen der wachsenden Coordinaten durch (mA), (mB), (mC), so folgt:

$$\partial x \cos(mA) + \partial y \cos(mB) + \partial z \cos(mC) = 0;$$

hier ist, weil φ und θ die Länge und Breite von m sind,

$$\cos(mA) = \cos\varphi\cos\theta, \quad \cos(mB) = \sin\varphi\cos\theta, \quad \cos(mC) = \sin\theta.$$

An Stelle von θ führe ich eine neue veränderliche Grösse ϱ mittelst der Gleichungen

$$(1.) \qquad \cos\theta = \frac{1}{C_\varrho}, \quad \sin\theta = \frac{S_\varrho}{C_\varrho}$$

ein, wo C und S den hyperbolischen Cosinus und Sinus bedeuten, also

$$(2.) \qquad C_\varrho = \frac{e^\varrho + e^{-\varrho}}{2}, \quad S_\varrho = \frac{e^\varrho - e^{-\varrho}}{2}$$

ist. Damit also θ seine Werthe von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ der Reihe nach erlange, muss ϱ die reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen.

Daraus folgt

$$(3.) \qquad \cos(mA) = \frac{\cos\varphi}{C}, \quad \cos(mB) = \frac{\sin\varphi}{C}, \quad \cos(mC) = \frac{S}{C},$$

wenn zur Abkürzung C und S statt C_ϱ und S_ϱ gesetzt wird, also weiter

$$\partial z = -\frac{\cos\varphi}{S}\partial x - \frac{\sin\varphi}{S}\partial y,$$

endlich

$$(4.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial \varrho} = -\dfrac{1}{S}\left(\cos\varphi\dfrac{\partial x}{\partial \varrho} + \sin\varphi\dfrac{\partial y}{\partial \varrho}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = -\dfrac{1}{S}\left(\cos\varphi\dfrac{\partial x}{\partial \varphi} + \sin\varphi\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\right). \end{cases}$$

Da aber die Variabeln φ und ϱ von einander unabhängig sind, also jede Aenderung der einen die andere und ihr Differential ungeändert lässt, so muss man gleiche Resultate erhalten, wenn man von den vorstehenden Gleichungen die erste nach φ, die zweite nach ϱ differentiirt. Multiplicirt man vorher mit S, und subtrahirt nach dem Differentiiren die erste von der zweiten, so folgt

$$(5.)\quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\frac{1}{C}\left(\sin\varphi\frac{\partial x}{\partial \varrho} - \cos\varphi\frac{\partial y}{\partial \varrho}\right).$$

Zu diesen Gleichungen kommen noch andere, welche sich aus der Untersuchung über die Krümmung von E ergeben.

III.

Um bei der Bestimmung der Krümmungshalbmesser von E jede Unsicherheit in Bezug auf die Bedeutung der Zeichen auszuschliessen, zählen wir auf jeder Normale $m\mathfrak{m}$ Abscissen R, welche im Fusspunkte m Null sind, und in der Richtung nach dem Zenith $\mathfrak{m}$ hin abnehmen, also auf der unzugänglichen Seite von E positiv werden.

Bezeichnet man nun durch u, v, w die rechtwinkligen Coordinaten eines der auf $m\mathfrak{m}$ liegenden Krümmungsmittelpunkte von E, und durch R seine auf dieser Normale gezählte Abscisse, also abgesehen vom Zeichen den ihm entsprechenden Krümmungshalbmesser, so ist für jedes Vorzeichen von R

$$\frac{x-u}{R} = \cos(\mathfrak{m}A),\quad \frac{y-v}{R} = \cos(\mathfrak{m}B),\quad \frac{z-w}{R} = \cos(\mathfrak{m}C).$$

Ertheilt man aber den Grössen φ und ϱ verschwindende Aenderungen $\partial\varphi$ und $\partial\varrho$, welche so gewählt sind, dass m an dem zu R gehörigen Krümmungskreise entlang rückt, so bleiben u, v, w und R ungeändert, und es folgt

$$\partial x = R\partial\cos(\mathfrak{m}A),\quad \partial y = R\partial\cos(\mathfrak{m}B),\quad \partial z = R\partial\cos(\mathfrak{m}C).$$

Von diesen drei Gleichungen, ebenso wie von den vorigen, folgt jedesmal eine aus den beiden andern. Führt man rechts die in (3.) gegebenen Werthe ein, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\left(R\frac{\sin\varphi}{C} + \frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)\partial\varphi + \left(R\frac{S\cos\varphi}{C^2} + \frac{\partial x}{\partial\varrho}\right)\partial\varrho &= 0,\\
-\left(R\frac{\cos\varphi}{C} - \frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\partial\varphi + \left(R\frac{S\sin\varphi}{C^2} + \frac{\partial y}{\partial\varrho}\right)\partial\varrho &= 0,\\
\frac{\partial z}{\partial\varphi}\partial\varphi + \left(\frac{\partial z}{\partial\varrho} - \frac{R}{C^2}\right)\partial\varrho &= 0.
\end{aligned}$$

Von diesen Gleichungen dienen zwei zur Bestimmung von R und dem zugehörigen Werthe von $\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}$. Eliminirt man den letztern, auf dessen Bestimmung es hier nicht ankommt, so erhält man ohne Mühe aus den beiden ersten Gleichungen mit Rücksicht auf (4.) die folgende

$$R^2-RC^2\left[\frac{\partial z}{\partial\varrho}-\frac{1}{C}\left(\sin\varphi\frac{\partial x}{\partial\varphi}-\cos\varphi\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\right]+\frac{C^4}{S}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\varrho}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\varrho}\right) = 0.$$

Bezeichnet man daher die beiden Hauptkrümmungshalbmesser von E im Punkte m durch R_1 und R_2, indem man diese Grössen negativ oder positiv nimmt, jenachdem der zugehörige Krümmungsmittelpunkt auf der zugänglichen oder der entgegengesetzten Seite von E liegt, so folgt:

$$(6.)\quad \frac{\partial z}{\partial\varrho} = \frac{1}{C}\left(\sin\varphi\frac{\partial x}{\partial\varphi}-\cos\varphi\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)+\frac{R_1+R_2}{C^2},$$

$$(7.)\quad R_1R_2 = \frac{C^4}{S}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\varrho}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\varrho}\right).$$

IV.

Durch Auflösung der Gleichungen (4.), (5.) und (6.) erhält man

$$(8.)\quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial\varrho} = -\frac{\partial z}{\partial\varrho}S\cos\varphi-\frac{\partial z}{\partial\varphi}C\sin\varphi, \\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} = \frac{\partial z}{\partial\varrho}C\sin\varphi-\frac{\partial z}{\partial\varphi}S\cos\varphi-\frac{R_1+R_2}{C}\sin\varphi, \end{cases}$$

$$(9.)\quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial\varrho} = -\frac{\partial z}{\partial\varrho}S\sin\varphi+\frac{\partial z}{\partial\varphi}C\cos\varphi, \\ \frac{\partial y}{\partial\varphi} = -\frac{\partial z}{\partial\varrho}C\cos\varphi-\frac{\partial z}{\partial\varphi}S\sin\varphi+\frac{R_1+R_2}{C}\cos\varphi, \end{cases}$$

und wenn man diese Werthe in (7.) einsetzt, oder auf anderem Wege,

$$(10.)\quad R_1R_2-(R_1+R_2)C^2\frac{\partial z}{\partial\varrho}+\left(C^2\frac{\partial z}{\partial\varrho}\right)^2+\left(C^2\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2 = 0.$$

Bezeichnet man durch i die $\sqrt{-1}$, und setzt zur Abkürzung

$$x+iy = \Omega,$$

so lassen sich die Gleichungen (8.) und (9.) in die beiden folgenden zusammenziehen:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho} = e^{\varphi i}\left(-S\frac{\partial z}{\partial\varrho}+iC\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right),$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi} = e^{\varphi i}\left(-iC\frac{\partial z}{\partial\varrho}-S\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)+ie^{\varphi i}\frac{R_1+R_2}{C}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden hieraus für $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varrho \partial \varphi}$ folgenden Ausdrücke erhält man, als Bedingung dafür, dass die Gleichungen (8.) und (9.) die vollständigen Differentiale von x und y liefern, die Gleichung

$$(\text{I.}) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{R_1 + R_2}{C} \right).$$

Sodann erhält man

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi^2} = -S e^{\varphi i} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \right) + i \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(e^{\varphi i} \frac{R_1 + R_2}{C} \right),$$

oder wegen der vorigen Gleichung

$$= -\frac{S}{C} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(e^{\varphi i} \frac{R_1 + R_2}{C} \right) + i \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(e^{\varphi i} \frac{R_1 + R_2}{C} \right).$$

Durch Trennung des Reellen vom Imaginären ergiebt sich endlich

$$(\text{II.}) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} = -\frac{S}{C} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\cos\varphi \frac{R_1 + R_2}{C} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin\varphi \frac{R_1 + R_2}{C} \right),$$

$$(\text{III.}) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} = -\frac{S}{C} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\sin\varphi \frac{R_1 + R_2}{C} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos\varphi \frac{R_1 + R_2}{C} \right).$$

V.

Die im vorigen art. gefundenen Differentialgleichungen gewähren das Mittel zur Lösung der Eingangs gestellten Aufgabe, die Fläche E mit Rücksicht auf die übrigen von ihr verlangten Eigenschaften unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass an ihr entlang für jede Richtung der Normale, unabhängig von der Lage ihres Fusspunktes, die Summe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser, d. h. letztere als Function jener gegeben ist.

Unsere nächste Aufgabe besteht nun darin, aus den von der Fläche E verlangten Eigenschaften für die Functionen x, y und z diejenigen Grenz- und Stetigkeitsbedingungen abzuleiten, welche zu ihrer völligen Bestimmung durch die Differentialgleichungen (I.), (II.) und (III.) erforderlich sind.

Zu diesem Zwecke betrachte ich ϱ und φ als rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene, wobei dann zu beachten ist, dass, weil φ die östliche Länge des wahren Zeniths bedeutet, von dieser Ebene nur der durch die Ungleichheit $0 < \varphi < 2\pi$ begrenzte Streifen in Betracht kommt.

a. Zunächst ist die schon früher gemachte Bemerkung zu wiederholen, dass in Folge jener Bedingungen x, y und z allenthalben einwerthige, endliche und stetige Functionen von ϱ und φ sind.

b. Da ferner R_1 und R_2 der Voraussetzung gemäss nirgendwo unendlich werden, so folgt aus der oben gefundenen Gleichung (10.),

$$\left(C^2\frac{\partial s}{\partial \varrho}-\frac{R_1+R_2}{2}\right)^2+\left(C^2\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{R_1-R_2}{2}\right)^2,$$

dass $C^2\frac{\partial s}{\partial \varrho}$ und $C^2\frac{\partial s}{\partial \varphi}$ nirgendwo, auch für $\varrho = \pm\infty$ nicht, über alle Grenzen wachsen. In der That erkennt man leicht, dass $C^2\frac{\partial s}{\partial \varphi}$ numerisch nie grösser als die halbe Differenz der beiden Hauptkrümmungshalbmesser wird, und in Folge dessen $C^2\frac{\partial s}{\partial \varrho}$ stets zwischen den Grenzen R_1 und R_2 eingeschlossen bleibt.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (8.) und (9.) folgt hieraus, dass die ersten Derivirten von x, y und s in keinem Punkte unendlich werden, und wenn der numerische Werth von ϱ über alle Grenzen wächst, so stark abnehmen, dass die Producte

$$C^2\left(\frac{\partial s}{\partial \varrho}, \frac{\partial s}{\partial \varphi}\right), \quad C\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho}, \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varrho}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)$$

sämmtlich unterhalb endlicher Grenzen beharren.

c. Hieran schliesst sich der Satz, dass es in der Ebene der ϱ, φ keine Linie giebt, auf deren beiden Seiten eine der ersten Derivirten von x, y, s verschiedene Werthe hat.

Zunächst sind x, y und s wegen ihrer Stetigkeit auf beiden Seiten einer beliebigen Linie die nämlichen Functionen ihres Bogens σ, also auch ihre Derivirten $\frac{\partial x}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial y}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial s}{\partial \sigma}$ auf beiden Seiten dieselben.

Errichtet man ferner im Anfange des Bogenelementes $\partial\sigma$ über ihm die Normale ∂n so, dass ∂n und $\partial\varphi$ denselben Winkel wie $\partial\sigma$ und $\partial\varrho$ einschliessen, so ist

$$\frac{\partial s}{\partial \sigma} = \frac{\partial s}{\partial \varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial \sigma}+\frac{\partial s}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}, \qquad \frac{\partial s}{\partial n} = \frac{\partial s}{\partial \varphi}\frac{\partial \varrho}{\partial \sigma}-\frac{\partial s}{\partial \varrho}\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma},$$

welche Gleichungen auch für x und y gelten. Folglich erhält man aus den Gleichungen des art. IV, indem man Ω durch seinen Werth ersetzt:

$$\frac{\partial(x+iy)}{\partial \sigma} = e^{\varphi i}\left(-S\frac{\partial s}{\partial \sigma}+iC\frac{\partial s}{\partial n}+i\frac{R_1+R_2}{C}\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}\right).$$

Diese Gleichung zeigt wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von R_1+R_2, dass auch $\frac{\partial z}{\partial n}$ beim Durchgange durch $\partial\sigma$ keine Unstetigkeit erleidet.

Da hiernach die ersten Derivirten von z sich beim Durchgange durch $\partial\sigma$ nach der Stetigkeit ändern, so gilt dasselbe wegen (8.) und (9.) auch von den ersten Derivirten der beiden andern Coordinaten x und y.

d. Da die Lage des ersten Meridians auf der Himmelskugel nach Belieben gewählt werden kann, und durch eine Aenderung derselben φ nur um eine constante Grösse, sein Differential gar nicht geändert wird, so folgt aus dem Vorangehenden, dass x, y und z nebst ihren ersten Derivirten beim Durchgange durch denselben stetig bleiben.

Daraus folgt für die Ebene ϱ, φ, dass jede dieser Functionen für denselben Werth von ϱ auf beiden Begrenzungslinien $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$ denselben Werth erlangt.

e. Den Polen der Himmelskugel entsprechen zwei Punkte der Fläche E, in denen die Länge φ jeden beliebigen Werth hat, ohne dass ihre rechtwinkligen Coordinaten unbestimmt werden. Folglich werden letztere von φ unabhängig, wenn ϱ unendlich grosse Werthe erlangt.

Diese Sätze enthalten für die hier zu lösende Aufgabe alles, was zur völligen Bestimmung der Functionen x, y und z ausser den Differentialgleichungen I., II. und III. an Grenz- und Stetigkeitsbedingungen erforderlich ist, soweit diese Functionen nicht von der bis jetzt verfügbar gebliebenen Lage des Coordinatenursprungs abhängen.

VI.

Zur Bestimmung der Functionen x, y und z suchen wir die Lösung der folgenden Aufgabe, aus welcher sich jene durch Particularisirung ergiebt.

Es sei $\mathfrak{u}$ eine Function von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{f}$, welche für alle reellen Werthe von $\mathfrak{r}$ und von $\mathfrak{f}=0$ bis $\mathfrak{f}=2\pi$ den folgenden Bedingungen genügt.

1. $\mathfrak{u}$ und seine ersten Derivirten sind überall einwerthig, endlich, und ersteres in keinem Punkte, letztere an keiner Linie entlang unstetig.

2. $\mathfrak{u}$ genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\mathfrak{u}}{\partial\mathfrak{r}^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{u}}{\partial\mathfrak{f}^2} = F(\mathfrak{r},\mathfrak{f}).$$

3. Für den nämlichen Werth von $\mathfrak{r}$ erhalten $\mathfrak{u}$ und $\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial\mathfrak{f}}$ an der Grenze $\mathfrak{f}=0$ dieselben Werthe, wie an der andern Grenze $\mathfrak{f}=2\pi$.

4. Für unendliche Werthe von $\mathfrak{r}$ verschwindet $\mathfrak{r}\frac{\partial u}{\partial \mathfrak{r}}$, u selbst wird von f unabhängig.

5. Die Summe der beiden für $\mathfrak{r} = +\infty$ und $\mathfrak{r} = -\infty$ eintretenden Werthe von u ist gegeben.

Die zu lösende Aufgabe besteht darin, 1) die Function u zu bestimmen und 2) die Beschränkungen anzugeben, denen die gegebene Function $F(\mathfrak{r}, f)$ vermöge der u auferlegten Bedingungen unterworfen ist.

Die erste Frage erledigt sich durch die Bestimmung desjenigen Werthes u, den die Function u in einem beliebig gewählten Punkte $\mathfrak{r} = \varrho$, $f = \varphi$ erlangt. Um denselben zu finden, multiplicire ich die Gleichung (2.) mit dem Factor

$$\omega = \frac{1}{4\pi} \lg\left(C(\mathfrak{r}-\varrho) - \cos(f-\varphi)\right)$$

und dem Elemente $\partial\mathfrak{r}\,\partial f$ einer um den Punkt ϱ, φ herumführenden Fläche T, deren innerer Rand ein um diesen Punkt mit dem Halbmesser c beschriebener Kreis K ist, und deren nachher zu bestimmender äusserer Rand S heissen soll. Beide Ränder sollen sich innerhalb des hier allein zu betrachtenden Streifens $0 < f < 2\pi$ halten.

Man erhält diesen Factor ω, indem man mittelst des von Herrn *Riemann* (Inauguraldiss. S. 13—14) angegebenen Factors $\frac{1}{4\pi}\lg((\mathfrak{r}-\varrho)^2+(f-\varphi)^2)$ zunächst den gesuchten Werth u durch Begrenzungswerthe von u und seinen ersten Derivirten ausdrückt, und dann diese letztern nach dem von mir in meiner Inauguraldiss. S. 39 angewandten Verfahren mit Hülfe von Bedingungsgleichungen eliminirt, welche sich mittelst desselben Factors ergeben, wenn man seinen Unstetigkeitspunkt ϱ, φ aus dem Streifen $0 < \varphi < 2\pi$ hinaus verlegt, also φ durch einen ausserhalb dieser Grenzen liegenden Werth φ_1 ersetzt. Mit Rücksicht auf die Bedingung (3.) findet man leicht, dass für $\varphi_1 - \varphi$ alle Vielfachen der ganzen Breite jenes Streifens genommen werden müssen, und gelangt nun durch Verbindung dieser Multiplicatoren zu dem nach f periodischen Factor ω.

Durch Integration über die Fläche T erhält man

$$\int \omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \mathfrak{r}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial f^2}\right)\partial\mathfrak{r}\,\partial f = \int F(\mathfrak{r}, f)\,\omega\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f.$$

Da auf T überall $\frac{\partial^2 \omega}{\partial \mathfrak{r}^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial f^2} = 0$ ist, so lässt sich die linke Seite in die Form

$$\int\left[\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}\left(\omega\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{r}}-\mathfrak{u}\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{r}}\right)+\frac{\partial}{\partial f}\left(\omega\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial f}-\mathfrak{u}\frac{\partial \omega}{\partial f}\right)\right]\partial \mathfrak{r}\,\partial f$$

bringen, und es hat hiernach der Factor ω die Eigenschaft, die Integration ohne vorläufige Kenntniss der Function $\mathfrak{u}$ zu ermöglichen, d. h. die Elimination aller zwischen den Rändern von T' stattfindenden Werthe dieser Function zu bewirken. Dass dieser Factor ausserdem die Eigenschaft besitzt, bei gehöriger Erweiterung der Fläche T, auch alle übrigen unbekannten Werthe, bis auf den gesuchten Werth u, zu eliminiren, also diesen zu bestimmen, wird sich aus dem Folgenden ergeben.

Sind $c\partial\sigma$ und ∂S die stets positiven Bogenelemente von K und S, und bedeutet ∂n das erste Element der über ∂S aus T hinaus errichteten Normale, so ist nach einem bekannten Satze, sobald P und Q zwei auf T überall einwerthige und endliche Functionen sind, welche höchstens in einzelnen Punkten, aber an keiner Linie entlang, unstetig werden,

$$\int\frac{\partial P}{\partial \mathfrak{r}}\partial \mathfrak{r}\,\partial f=\int P\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial n}\partial S-\int P\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}c\,\partial\sigma,$$

$$\int\frac{\partial Q}{\partial f}\partial \mathfrak{r}\,\partial f=\int Q\frac{\partial f}{\partial n}\partial S-\int Q\frac{\partial f}{\partial c}c\,\partial\sigma.$$

Die linke Seite obiger Gleichung geht hiernach über in

$$\int\left(\omega\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial n}-\mathfrak{u}\frac{\partial \omega}{\partial n}\right)\partial S-\int\left(\omega\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial c}-\mathfrak{u}\frac{\partial \omega}{\partial c}\right)c\,\partial\sigma.$$

Der Werth des über K erstreckten Integrals ergiebt sich für verschwindende Werthe von c wie folgt. Statt der im Bogenelemente $c\partial\sigma$ stattfindenden Coordinaten $\mathfrak{r}$, f führe ich den Winkel σ mittelst der Gleichungen $f-\varphi=c\cos\sigma$, $\mathfrak{r}-\varrho=c\sin\sigma$ ein; dann wird dort

$$\omega=\frac{1}{4\pi}\lg\left(\tfrac{1}{2}c^2-\tfrac{1}{24}c^4\cos 2\sigma\,..\right),$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial c}=\frac{1}{2\pi}\,\frac{c-\frac{1}{6}c^3\cos 2\sigma\ldots}{c^2-\frac{1}{12}c^4\cos 2\sigma\ldots},$$

woraus für ein verschwindendes c $\lim c\omega=0$, $\lim c\frac{\partial\omega}{\partial c}=\frac{1}{2\pi}$ folgt. Da gleichzeitig $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial c}$ nicht unendlich gross wird, $\mathfrak{u}$ dagegen ohne Unstetigkeit in den festen Werth u übergeht, so folgt

$$\lim -\int\left(\omega\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial c}-\mathfrak{u}\frac{\partial\omega}{\partial c}\right)c\,\partial\sigma=u.$$

In der hieraus folgenden Gleichung

$$(11.)\qquad u = \int\left(\mathfrak{u}\frac{\partial\omega}{\partial n} - \omega\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial n}\right)\partial S + \int F(\mathfrak{r}, f)\,\omega\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f$$

ist das erste Integral zur Rechten über den ganzen Umfang der Curve S, das andere über die von ihr eingeschlossene Fläche zu erstrecken, und die Summe beider von der Gestalt der Curve S unabhängig, so lange sie den Punkt ϱ, φ einschliesst.

Dies festgestellt, ersetze ich S durch ein den Punkt ϱ, φ einschliessendes Rechteck $mnop$, dessen Seiten mn, no, op, pm der Reihe nach durch die Gleichungen $\mathfrak{r} = -g$, $f = 2\pi$, $\mathfrak{r} = h$, $f = 0$ gegeben sind. Dann zerfällt das über S erstreckte Integral in vier Theile, die ich (mn), (no), (po), (mp) nennen will. Es wird aber

$$(mp)+(no) = \int_{-g}^{h}\left(-\mathfrak{u}\frac{\partial\omega}{\partial f} + \omega\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial f}\right)_{f=0}\cdot\partial\mathfrak{r} + \int_{-g}^{h}\left(\mathfrak{u}\frac{\partial\omega}{\partial f} - \omega\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial f}\right)_{f=2\pi}\cdot\partial\mathfrak{r},$$

also diese Summe gleich Null, weil die entsprechenden Elemente beider Integrale sich wegen der auch durch ω und $\frac{\partial\omega}{\partial f}$ erfüllten Bedingung (3.) gegenseitig aufheben. Sodann erhält man

$$(po) = \int_0^{2\pi}\left(\mathfrak{u}\frac{\partial\omega}{\partial\mathfrak{r}} - \omega\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial\mathfrak{r}}\right)_{\mathfrak{r}=h}\cdot\partial f,$$

$$(mn) = \int_0^{2\pi}\left(-\mathfrak{u}\frac{\partial\omega}{\partial\mathfrak{r}} + \omega\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial\mathfrak{r}}\right)_{\mathfrak{r}=-g}\cdot\partial f,$$

oder

$$(po) = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\mathfrak{u}}{4\pi}\cdot\frac{S(h-\varrho)}{C(h-\varrho)-\cos(f-\varphi)} - \frac{\omega}{h}\cdot\mathfrak{r}\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial\mathfrak{r}}\right)_{\mathfrak{r}=h}\cdot\partial f,$$

$$(mo) = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\mathfrak{u}}{4\pi}\cdot\frac{S(g+\varrho)}{C(g+\varrho)-\cos(f-\varphi)} - \frac{\omega}{g}\cdot\mathfrak{r}\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial\mathfrak{r}}\right)_{\mathfrak{r}=-g}\cdot\partial f.$$

Lässt man nun g und h über alle Grenzen wachsen, so verschwindet in beiden Integralen der Subtrahend wegen der Bedingung (4.), da $\frac{\omega}{h}$ und $\frac{\omega}{g}$, wie leicht zu sehen ist, beide gegen die Grenze $\frac{1}{4\pi}$ convergiren. Ferner haben die Factoren von $\frac{\mathfrak{u}}{4\pi}$ die Einheit zur Grenze, während $\mathfrak{u}$ in beiden Fällen von f unabhängig wird.

Ist also u' der für $\mathfrak{r} = +\infty$, u_1 der für $\mathfrak{r} = -\infty$ eintretende feste Werth von $\mathfrak{u}$, so wird, wenn g und h über alle Grenzen wachsen,

$$\lim((po)+(mn)) = \frac{u'+u_1}{2}.$$

Durch die nämliche Erweiterung des Rechtecks *mnop* geht also die für u gefundene Gleichung in die folgende über

$$\text{(IV.)} \qquad u = \frac{u'+u_1}{2} + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} F(\mathfrak{r}, f)\,\omega\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f,$$

welche den gesuchten Werth u durch bekannte Grössen ausdrückt, also die Lösung der ersten Aufgabe enthält.

Die vorstehende Gleichung muss für $\varrho = +\infty$, $u = u'$, für $\varrho = -\infty$, $u = u_1$, also in beiden Fällen $u' - u_1$ durch ein Integral ausgedrückt liefern. Zu dem nämlichen Resultate gelangt man bequemer, und ohne der Lösung der zweiten Aufgabe vorzugreifen, indem man die Gleichung (2.) mit $-\frac{1}{4\pi}\mathfrak{r}\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f$ multiplicirt, und dann zwischen denselben Grenzen, wie in IV. integrirt. Man findet sofort

$$\text{(V.)} \qquad \frac{u'-u_1}{2} = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} F(\mathfrak{r}, f)\,\mathfrak{r}\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f.$$

VII.

Wir gehen jetzt zur zweiten Frage über, ob die Function F bis auf die in IV. und V. hervortretenden Convergenzbedingungen vollkommen willkürlich gegeben werden kann, oder ob die der Function u auferlegten Bedingungen noch weitere Beschränkungen in der Wahl von F nach sich ziehen.

Beschränkungen dieser Art, falls sie überhaupt existiren, müssen in Gleichungen bestehen, welche keinen Aufschluss über die Function u mehr enthalten, also aus (2.) durch Elimination sämmtlicher Werthe von u gefunden werden.

Um diese Elimination zu bewirken, multiplicire ich die Gleichung (2.) mit einem geeigneten Factor Ω und mit $\partial\mathfrak{r}\,\partial f$, und integrire dann über alle Werthe von $\mathfrak{r}$ und f. Damit hierdurch zunächst alle innerhalb der Begrenzung stattfindenden Werthe von u eliminirt werden, muss Ω nebst seinen ersten Derivirten zwischen den Grenzen einwerthig, endlich und bis auf einzelne Punkte auch stetig bleiben, und der Differentialgleichung $\frac{\partial^2\Omega}{\partial\mathfrak{r}^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial f^2} = 0$ genügen, weil jede mit den übrigen Bedingungen verträgliche Verletzung einer derselben eine Theilung des Integrationsgebietes nöthig macht, und zu einer Gleichung zwischen den an der Theilungsstelle stattfindenden Werthen von u führt. Damit ferner die an den Grenzen $f = 0$, $f = 2\pi$ stattfindenden Werthe von u sich

[illegible] Ω und $\frac{\partial\Omega}{\partial f}$ für das nämliche r an beiden Grenzen [illegible] Werthe [illegible].

Sind diese Bedingungen erfüllt, so wird

$$\int\int \Omega F(\mathfrak{r},f)\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f = \int_0^{2\pi}\left[\Omega\frac{\partial u}{\partial \mathfrak{r}} - u\frac{\partial\Omega}{\partial\mathfrak{r}}\right]_{-\infty}^{\infty}\cdot\partial f.$$

Ausserdem ergiebt sich aber aus denselben, etwa indem man die Gleichung [illegible] auf Ω anwendet, dass Ω, ausserhalb etwa vorhandener Unstetigkeitspunkte, in seinem ganzen Verlaufe durch einen nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von f fortschreitenden Ausdruck dargestellt werden kann, von dem es in jenen Punkten nur um messbare Grössen abweicht, und man erhält dann aus der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\Omega = A + A_1 e^{\mathfrak{r}}\cos(f-a_1) + A_2 e^{2\mathfrak{r}}\cos(2f-a_2)\dots\\ + B_1 e^{-\mathfrak{r}}\cos(f-b_1) + B_2 e^{-2\mathfrak{r}}\cos(2f-b_2)\dots\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck zeigt sofort, dass die noch rückständige Elimination der für $\mathfrak{r} = \pm\infty$ eintretenden Werthe von $\frac{\partial u}{\partial\mathfrak{r}}$ und u, wenn man sich jeder neuen Bedingung über die dort verschwindenden, von f abhängigen Theile von u enthält, nur dann gelingt, wenn der Ausdruck für Ω auf sein erstes Glied A reducirt wird.

Für $\Omega = 1$ fällt die rechte Seite völlig weg, und es ergiebt sich als einzige, der Function F aufzuerlegende Bedingung die Gleichung

$$\text{(VI.)}\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} F(\mathfrak{r},f)\,\partial\mathfrak{r}\,\partial f = 0.$$

Da dieses Resultat von der Geschwindigkeit, mit welcher $\frac{\partial u}{\partial\mathfrak{r}}$ im Unendlichen verschwindet, unabhängig ist, so gilt es auch für die bei der Bestimmung von x, y, z für F zu wählenden Functionen.

VIII.

Seien jetzt o' und o_1 diejenigen beiden Punkte der Oberfläche E, deren wahre Zenithe der Nord- und Südpol der Himmelskugel sind. Den bisher verfügbar gebliebenen Anfangspunkt der Coordinaten x, y, z verlegen wir in die Mitte zwischen o' und o_1, so dass, wenn die Coordinaten dieser Punkte beziehungsweise x', y', z' und x_1, y_1, z_1 sind,

$$x'+x_1 = 0,\quad y'+y_1 = 0,\quad z'+z_1 = 0$$

wird

Bezeichnet man daher die Werthe, welche R_1, R_2, S und C für $\varrho = \mathfrak{r}$, $\varphi = f$ annehmen, durch $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{C}$, so folgt aus IV. mit Rücksicht auf die durch die Gleichungen (I.), (II.), (III.) jedesmal gegebene Bedeutung von F, wenn wie oben

$$\omega = \frac{1}{4\pi} \lg \left(C(\mathfrak{r}-\varrho) - \cos(f-\varphi) \right)$$

gesetzt wird,

$$x = \int \left[-\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}} \left(\cos f \frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}} \right) - \frac{\partial}{\partial f} \left(\sin f \frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}} \right) \right] \omega \, \partial \mathfrak{r} \, \partial f,$$

$$y = \int \left[-\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}} \left(\sin f \frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}} \right) + \frac{\partial}{\partial f} \left(\cos f \frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}} \right) \right] \omega \, \partial \mathfrak{r} \, \partial f,$$

$$z = \int \frac{1}{\mathfrak{C}} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}} \left(\frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}} \right) \omega \, \partial \mathfrak{r} \, \partial f,$$

wo, wie auch in den folgenden Formeln, nach $\mathfrak{r}$ von $-\infty$ bis ∞, nach f zwischen den Grenzen 0 und 2π zu integriren ist.

Ersetzt man hier ω durch $-\frac{\mathfrak{r}}{4\pi}$, so erhält man nach V., weil $\frac{x'-x_1}{2} = x'$ ist, die Coordinaten desjenigen Punktes o', der sein wahres Zenith im Nordpol der Himmelskugel hat. Wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2$ fallen die Glieder mit den nach f genommenen Derivirten weg, und es folgt:

$$x' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}} \left(\frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}} \right) \mathfrak{r} \cos f \, \partial \mathfrak{r} \, \partial f,$$

$$y' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}} \left(\frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}} \right) \mathfrak{r} \sin f \, \partial \mathfrak{r} \, \partial f,$$

$$z' = \frac{1}{4\pi} \int -\frac{1}{\mathfrak{C}} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}} \left(\frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}} \right) \mathfrak{r} \, \partial \mathfrak{r} \, \partial f.$$

Ersetzt man endlich ω durch die Einheit, so erhält man mit Rücksicht auf VI. die den rechten Seiten von I., II. und III. aufzuerlegenden Bedingungen, welche sich auf die folgenden reduciren:

$$\int \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}} \left(\frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}} \right) \cos f \, \partial \mathfrak{r} \, \partial f = 0,$$

$$\int \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}} \left(\frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}} \right) \sin f \, \partial \mathfrak{r} \, \partial f = 0,$$

$$\int \frac{1}{\mathfrak{C}} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}} \left(\frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}} \right) \partial \mathfrak{r} \, \partial f = 0.$$

Da R_1+R_2 als Function von ϱ und φ gegeben oder durch Interpolation dar-

gestellt werden muss, so enthalten die vorstehenden Gleichungen eine bei der Wahl dieser Function massgebende Bedingung, ohne deren Berücksichtigung die übrigen Bedingungen des Problems untereinander in Widerspruch gebracht werden.

Die sämmtlichen auf R_1+R_2 bezüglichen Bedingungen lassen sich dahin zusammenfassen, dass diese Function nirgendwo unendlich oder unstetig werden darf, und dass in ihrer Entwicklung nach Kugelfunctionen der $\cos(\mathfrak{m}A)$, $\cos(\mathfrak{m}B)$, $\cos(\mathfrak{m}C)$ das zweite, nach diesen Cosinus lineare und homogene Glied fehlen muss. In der That führen die vorstehenden Gleichungen unmittelbar auf diese letzte Bedingung, wenn man die Derivirte von $\frac{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{G}}$ durch theilweise Integration wegschafft, und dann an Stelle von $\mathfrak{r}$ das Supplement der Breite θ einführt.

IX.

Für ein abgeplattetes Sphäroid S, dessen Umdrehungsaxe zur z-Axe parallel ist, hat man

$$R_1+R_2 = -\frac{a}{\sin\theta\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\theta^2}}\right),$$

wenn die Wurzel positiv genommen wird, und a den Halbmesser des Aequators, ε die Excentricität der Meridianellipse bedeutet, also die Abplattung $\alpha = 1-\sqrt{1-\varepsilon^2}$ ist.

Umgekehrt kann nach den obigen Resultaten eine Fläche E, welche der vorstehenden Gleichung gemäss verläuft, nur dann von dem Sphäroid S verschieden sein, wenn sie entweder auf ihrer zugänglichen Seite in verschiedenen Punkten gleichgerichtete Normalen hat, oder sich ins Unendliche erstreckt, oder Stetigkeitsunterbrechungen in Zusammenhang, Biegung oder Krümmung darbietet, wobei jedoch von der Frage, ob bei obiger Gleichung auch jeder von diesen Fällen möglich sei, Abstand genommen ist. Sind aber alle diese Fälle ausgeschlossen, so fällt die Fläche E entweder mit S zusammen, oder sie kann mit S durch eine Verschiebung ohne Drehung zur völligen Deckung gebracht werden.

Wenn daher die obige Gleichung bei passender Wahl von a und ε in einer genügenden Zahl von Punkten der Erdoberfläche erfüllt würde, so wäre dies allein schon hinreichend, um die Identität der letztern mit dem Sphäroid S sicher zu stellen.

Abgesehen von den Schwierigkeiten, welche die hier geforderte genaue Bestimmung des wahren Zeniths und der entsprechenden Hauptkrümmungshalbmesser darbietet, gewähren die obigen Resultate den Vortheil, eine stufenweise und nur durch die nothwendige Unvollkommenheit der Messungen begrenzte Annäherung an die Wirklichkeit zu gestatten, indem die geschlossenen Ausdrücke für die Coordinaten x, y, z die Werthe der Function R_1+R_2 nur linear enthalten, also für jedes Glied, welches zur genaueren und vollständigeren Darstellung dieser Function in ihren Ausdruck neu aufgenommen werden muss, ein von den bereits vorhandenen Ausdrücken für die Coordinaten unabhängiges Correctionsglied zu denselben liefern.

Zürich 10. December 1864.

Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

Der vorliegende Aufsatz behandelt die Theorie desjenigen Geschlechts ebener Curven, für welche in dem nach *Riemann* von mir festgehaltenen Sinne $p=1$, welche also mit Hülfe nichtlinearer Projection in Curven dritter Ordnung übergeführt werden können. Diese Curven besitzen, wenn ihre Ordnung n ist, $\frac{n.n-3}{2}$ Doppel- und Rückkehrpunkte; ihre Natur hängt wesentlich von einer einzigen Constante ab, dem Modul der entsprechenden elliptischen Functionen, und diese characteristische Constante hat die einfache geometrische Bedeutung eines bestimmten unveränderlichen Doppelverhältnisses, ähnlich wie bei den Curven dritter Ordnung der Modul dies Doppelverhältniss der von einem Punkt der Curven an sie gezogenen Tangenten angiebt.

Entspricht so jedem Punkt der Curve ein bestimmter Werth eines elliptischen Integrals und umgekehrt, so giebt das *Abel*'sche Theorem für die zwischen den Schnittpunkten der Curve mit einer andern algebraischen Curve zu erfüllenden Bedingungen sehr einfache Relationen zwischen den entprechenden Integralen erster und zwischen gewissen Integralen dritter Gattung. Die Aufgabe, aus einigen Punkten des Schnittpunktsystems die übrigen zu finden, führt sodann zu einem Umkehrungsprobleme, dessen speciellsten Fall Hr. *Rosenhain* in seiner Preisschrift behandelt hat. Das allgemeine Problem, dessen Lösung hier gegeben wird, ist folgendes: Die Summe von m Integralen erster Gattung, und $m-1$ Summen von je m gleichartigen Integralen dritter Gattung sind gegeben; man soll eine Gleichung m^{ten} Grades angeben, deren Wurzeln die m in jenen Integralen auftretenden oberen Grenzen sind.

Als Anwendung der allgemeinen Theorie habe ich denjenigen Fall behandelt, welcher nächst den Curven dritter Ordnung der einfachste ist, und welcher zugleich bei vorhandenen Doppelpunkten das Wesen der hier anzustellenden Untersuchungen vollkommen erkennen lässt, nämlich die Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten.

§. 1.

Characterisirung der zu betrachtenden Curven. Ihre Coordinaten werden mit Hülfe eines Systems von Curven $(n-2)^{ter}$ Ordnung durch einen Parameter ausgedrückt.

Diejenigen algebraischen Curven n^{ter} Ordnung, welche es gestatten, ihre Coordinaten als rationale Functionen von $\sin\operatorname{am} u$, $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u$ auszudrücken, wobei u die Stelle eines veränderlichen Parameters versieht, werden dadurch characterisirt, dass sie $\frac{n.n-3}{2}$ Doppel- resp. Rückkehrpunkte besitzen. Die wirkliche Darstellung der Coordinaten in jener Form kann man folgendermassen ausführen.

Die $\frac{n.n-3}{2}$ Doppelpunkte (Rückkehrpunkte als specielle Fälle immer mit einbegriffen) bestimmen zusammen eine einzige Curve $(n-3)^{ter}$ Ordnung, welche sich durch dieselben legen lässt. Will man aber Curven $n-2^{ter}$ Ordnung hindurchlegen, so kann man auf der gegebenen Curve noch $(n-2)$ weitere Punkte beliebig annehmen. Diese mit den Doppelpunkten zusammen bestimmen einen Büschel von Curven $(n-2)^{ter}$ Ordnung, deren jede die gegebene noch in zwei andern Punkten schneidet. Sei $f=0$ die Gleichung der gegebenen Curve, $u+\lambda v=0$ die Gleichung des Büschels, und legen wir einen Büschel von Geraden $a+\mu b=0$ mit beliebigem Scheitel, deren Strahlen, nach den Durchschnitten von $f=0$ mit $u+\lambda v=0$ gerichtet sind. Eliminiren wir nun aus den Gleichungen

$$(1.)\qquad f=0,\quad u+\lambda v=0,\quad a+\mu b=0$$

die Coordinaten, so erhalten wir eine Resultante $\Omega(\lambda,\mu)=0$, und zugleich die Verhältnisse der Coordinaten als rationale Functionen von λ, μ. Untersuchen wir diese Ausdrücke und die Resultante Ω genauer.

Wenn wir, ohne auf die gegenseitigen Beziehungen der Coefficienten von f, u, v zu achten, diese Bildungen vornehmen, so gelangen wir zu einer Resultante Ω, welche vom Grade $n-2$ für die Coefficienten von f, vom Grade n für die von $u+\lambda v$, und vom Grade $n.n-2$ für die von $a+\mu b$ ist. Betrachten wir die Gleichung $\Omega=0$ als Gleichung für λ, so giebt sie die n Parameter, deren entsprechende Curven durch je einen der n Schnittpunkte von f mit einem Strahl $a+\mu b$ hindurchgehen. Setzen wir dagegen an die Stelle der Coefficienten von $a+\mu b$ beliebige Liniencoordinaten, und betrachten diese als Veränderliche, so stellt Ω offenbar das Product von $n.n-2$ linearen Factoren, also den Complex derjenigen $n.n-2$ Punkte dar, in denen f von der Curve $u+\lambda v$ getroffen wird.

Bezeichnen wir ferner durch f_{ikh}, u_{ikh}, v_{ikh} die Coefficienten von $x_1^i x_2^k x_3^h$ in f, u, v, und setzen wir

$$a = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \quad b = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3,$$

so werden nach bekannten Regeln (vgl. *Salmon*, Algebra der linearen Transformationen, übers. v. *Fiedler*, p. 74) die Verhältnisse der den Gleichungen (1.) genügenden Coordinaten aus folgenden Formeln gefunden:

$$2.\quad \begin{cases} \varrho\, x_1^i x_2^k x_3^h = \dfrac{\partial \Omega}{\partial f_{ikh}}, & (i+k+h=n), \\ \sigma\, x_1^i x_2^k x_3^h = \dfrac{\partial \Omega}{\partial u_{ikh}}, & (i+k+h=n-2), \\ \tau\, x_i = \dfrac{\partial \Omega}{\partial a_i}. & \end{cases}$$

§. 2.

Untersuchung der Discriminante von $\Omega = 0$.

Die Discriminante D der Gleichung Ω in Bezug auf μ ist, da Ω selbst für μ vom Grade $n(n-2)$ ist, vom Grade $2(n^2-2n-1)$ für die Coefficienten von Ω, also vom Grade $2n(n^2-2n-1)$ für λ, und vom Grade $2n(n-2)(n^2-2n-1)$ in Bezug auf die a und b. Setzt man $D=0$, so entsteht eine Gleichung für λ, welche diejenigen Werthe liefert, für welche zwei Wurzeln μ einander gleich werden.

Das letztere aber kann auf doppelte Weise geschehen. Erstlich kann eine solche Curve $u+\lambda v=0$ die Curve f berühren, und deswegen zwei Strahlen $a+\mu b$, welche nach dem Berührungspunkt gezogen werden, zusammenrücken. Oder zwei Schnittpunkte von f mit $u+\lambda v$ liegen in einer Geraden mit dem Büschelscheitel, und diese Gerade wird deswegen Doppelstrahl. Ich werde zeigen, *dass jeder Werth von λ, für den das letztere eintritt, eine Doppelwurzel der Gleichung $D=0$ ist.*

Für einen solchen Werth von λ und den zugehörigen von μ ist nämlich erstens, weil zwei Werthe von μ zusammenfallen, $\dfrac{\partial \Omega}{\partial \mu} = 0$. Aber zugleich werden die Werthe der x nothwendig unbestimmt, weil zwei Punkte x gleichzeitig allen Bedingungen genügen; es müssen also die rechten Theile von (2.) sämmtlich verschwinden, so dass auch

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = \Sigma\, v_{ikh} \frac{\partial \Omega}{\partial u_{ikh}} = 0.$$

Denken wir uns also $\Omega(\lambda,\mu)=0$ als Gleichung einer Curve, deren rechtwinklige Coordinaten λ, μ sind, so hat diese Curve bei dem in Rede stehenden Werthepaar λ, μ einen Doppelpunkt. Aber $D=0$, welches das Zusammenbestehen von $\Omega=0$, $\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}=0$ angiebt, ist die Gleichung, welche die der Axe μ parallelen Tangenten der Curve liefert. Da nun ein Doppelpunkt stets *zwei* Tangenten absorbirt, so ist auch der fragliche Werth von λ eine Doppelwurzel von $D=0$.

Untersuchen wir jetzt, welche Modificationen diese Verhältnisse erfahren, wenn man die zwischen den Coefficienten von f, u, v stattfindenden Beziehungen berücksichtigt.

Die $n.n-2$ Punkte, deren Gleichungen $\Omega=0$ darstellte, wenn man darin die $a+\mu b$ durch veränderliche Liniencoordinaten ersetzte, sondern sich hier in die $\frac{n.n-3}{2}$ Doppelpunkte, welche immer zweimal zu rechnen sind, in die $n-2$ festen einfachen Punkte, welche auf $f=0$ gewählt wurden, und in nur zwei veränderliche Punkte. Die Gleichung $\Omega=0$, wenn darin die $a+\mu b$ durch Liniencoordinaten ersetzt sind, nimmt also die Form an

$$\Omega_1^2.\Omega_2.\Omega_0 = 0,$$

wo $\Omega_1=0$ das Product der Gleichungen aller Doppelpunkte, $\Omega_2=0$ das Product der Gleichungen aller festen einfachen Punkte, und endlich $\Omega_0=0$ das Product der Gleichungen der beiden beweglichen Punkte ist, um welche allein es sich handelt.

Der Factor Ω_0 enthält λ, nicht so die andern Factoren, welche feste, d. h. von λ unabhängige Punkte darstellen. Es ist also Ω_0 von der Form

$$(3.)\qquad \Omega_0 = \Sigma\Sigma\omega_{ik}\gamma_i\gamma_k,$$

wobei die ω Functionen n^{ter} Ordnung in λ, die γ Liniencoordinaten darstellen; und da Ω_0 das Product der Gleichungen zweier Punkte ist, so hat man nothwendig auch

$$(4.)\qquad W=\begin{vmatrix}\omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13}\\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23}\\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33}\end{vmatrix}=0.$$

Sind W_{ik} die Unterdeterminanten der W, so ist nach bekannten Regeln

$$(5.)\qquad \Sigma\Sigma W_{ik}x_i x_k = L^2 = 0$$

das Quadrat der Gleichung der Verbindungslinie der beiden beweglichen Punkte,

welche, indem λ sich ändert, eine Curve von einer weiterhin zu bestimmenden Classe umhüllt.

Die Gleichung für μ wird, nach Absonderung des von $\Omega_1^2.\Omega_2$ herrührenden, von λ freien Factors, von der Form

$$(6.)\quad A+2\mu C+\mu^2 B = 0,$$

und zwar entsteht die linke Seite dieser Gleichung, wenn man in (3.) γ_i durch $a_i+\mu b_i$ ersetzt; es ist also

$$(7.)\quad \begin{cases} A = \Sigma\Sigma\omega_{ik}a_i a_k, \\ B = \Sigma\Sigma\omega_{ik}b_i b_k, \\ C = \Sigma\Sigma\omega_{ik}a_i b_k. \end{cases}$$

Die Discriminante $AB-C^2$ ist vom Grade $2n$ in λ, und hat die Form $P^2.Q$, wo $Q=0$ diejenigen Werthe von λ giebt, deren entsprechende Curven $u+\lambda v=0$ die Curve $f=0$ berühren, während $P=0$ solche Curven $u+\lambda v=0$ liefert, bei denen die beweglichen Schnittpunkte mit dem Büschelscheitel ($a=0$, $b=0$) in einer Geraden liegen. Die Grade von P und Q sollen weiterhin bestimmt werden. Die Auflösung der Gleichung (6.) giebt dann:

$$(8.)\quad \mu = \frac{-C+P\sqrt{-Q}}{B}.$$

Die Discriminante lässt sich aber noch in einer andern bemerkenswerthen Form darstellen; nach bekannten Determinantensätzen hat man nämlich auch:

$$(9.)\quad AB-C^2 = P^2 Q = \Sigma\Sigma W_{ik}p_i p_k,$$

wo p_i, p_k die Coordinaten des Büschelscheitels a, b sind, also:

$$(10.)\quad \begin{cases} p_1 = a_2 b_3 - b_2 a_3, \\ p_2 = a_3 b_1 - b_3 a_1, \\ p_3 = a_1 b_2 - b_1 a_2. \end{cases}$$

Endlich liefert die letzte Gleichung (2.) die Coordinaten der beweglichen Schnittpunkte. Statt Ω kann man rechts Ω_0 setzen, und es ist also:

$$(11.)\quad \varrho x_i = (\omega_{1i}a_1+\omega_{2i}a_2+\omega_{3i}a_3)+\mu(\omega_{1i}b_1+\omega_{2i}b_2+\omega_{3i}b_3).$$

§. 3.

Curven des Systems $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Curve n^{ter} Ordnung berühren.

Ehe man nun diese Ausdrücke weiter transformiren kann, ist es nothwendig, die Natur der Functionen P, Q genauer zu erforschen. Man findet die Wurzeln von Q mit Hülfe folgender Betrachtung.

Die Werthe von λ, für welche Q verschwindet, sind dadurch characterisirt, dass die beiden beweglichen Schnittpunkte einander unendlich nahe rücken, dass also die Curven $f=0$, $u+\lambda v=0$ einander berühren. Bezeichnen wir durch angehängte Indices Differentialquotienten nach den x, so sind hierzu folgende Bedingungen nöthig:

$$\begin{aligned} \varrho f_1 &= u_1+\lambda v_1, \\ \varrho f_2 &= u_2+\lambda v_2, \qquad f=0. \\ \varrho f_3 &= u_3+\lambda v_3. \end{aligned}$$

Indem man aber ϱ eliminirt, erhält man die Gleichungen

$$(12.)\qquad \left\{\Theta = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad f=0,\right.$$

deren Durchschnittspunkte diejenigen Punkte angeben, in welchen eine Curve des Büschels $u+\lambda v=0$ die Curve $f=0$ berührt. Aber eine genauere Betrachtung zeigt, dass von den Durchschnittspunkten von $\Theta=0$, $f=0$ einige der Frage fremd sind. Denn in der That schneiden diese Curven sich mehrfach in den festgelegten Punkten des Büschels; aber diese können nicht Wurzeln der Discriminante P^2Q geben, weil, wenn auch in diesen Punkten eine Curve $u+\lambda v=0$ die Curve $f=0$ berühren kann, dennoch für sie nicht zwei Factoren von Ω_0 einander gleich werden, sondern nur ein Factor von Ω_0 einem Factor von Ω_1 oder Ω_2 gleich wird.

Die Natur der Curve $\Theta=0$ (nach Hrn. *Cremona* die *Jacobi*sche Curve des Systems f, u, v genannt) ist mehrfach untersucht worden, und es ist namentlich der Satz bekannt, dass diese Curve durch etwaige gemeinsame Punkte der drei Curven f, u, v hindurchgeht (*Cremona*, introd. ad una teor. geom. delle curve piane p. 73.). Ferner hat Hr. *Hesse* bewiesen (dieses Journal Bd. 41. p. 286), dass, wenn wie hier zwei Functionen von gleichem Grade sind, für einen Schnittpunkt aller drei Curven die Differentialquotienten von Θ sich wie die der Curve ungleichen Grades (hier f) verhalten, *dass also in solchen Punkten die Jacobische Curve die dritte Curve berührt.* Diesem kann man folgenden weitern Satz hinzufügen:

Sind $u=0$, $v=0$ von gleichem Grade, und gehen sie durch einen Doppelpunkt von $f=0$, so hat auch Θ in diesem Punkte einen Doppelpunkt, und zwar sind die Tangenten des Doppelpunkts für beide Curven dieselben.

Den Beweis dieses Satzes kann man ähnlich führen, wie Herr *Hesse* a. a. O. seine Sätze bewiesen hat. Sind c_1, c_2, c_3 irgend welche Constanten, so ist immer identisch

$$(13.)\qquad \Theta.(c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3) = -\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & nf \\ u_1 & u_2 & u_3 & mu \\ v_1 & v_2 & v_3 & mv \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{vmatrix},$$

wobei der Allgemeinheit wegen m für $(n-2)$ gesetzt ist, da es nur darauf ankommt, dass u, v den gleichen Grad m besitzen. Da im Doppelpunkte die Ausdrücke u, v, f, f_1, f_2, f_3 gleichzeitig verschwinden, so sind auch die Determinanten

$$\begin{vmatrix} f_{i1} & f_{i2} & f_{i3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

gleich Null. Differentiirt man also (13.) zweimal, und zwar nach x_i und x_k, und lässt man alles im Doppelpunkt verschwindende fort, so kommt:

$$(c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3)\Theta_{ik} = -\begin{vmatrix} f_{1ik} & f_{2ik} & f_{3ik} & nf_{ik} \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} f_{1i} & f_{2i} & f_{3i} & 0 \\ u_{1k} & u_{2k} & u_{3k} & mu_k \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f_{1k} & f_{2k} & f_{3k} & 0 \\ u_{1i} & u_{2i} & u_{3i} & mu_i \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f_{1i} & f_{2i} & f_{3i} & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ v_{1k} & v_{2k} & v_{3k} & mv_k \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f_{1k} & f_{2k} & f_{3k} & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ v_{1i} & v_{2i} & v_{3i} & mv_i \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= n.\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} f_{ik} - m \begin{vmatrix} f_{1i} & f_{2i} & f_{3i} & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_k \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_k \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} f_{1k} & f_{2k} & f_{3k} & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_i \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_i \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man nun die ersten drei Verticalreihen der beiden letzten Determinanten mit $\frac{x_1}{m-1}$, $\frac{x_2}{m-1}$, $\frac{x_3}{m-1}$, und zieht sie von der letzten Reihe ab, so verschwinden die Glieder der letzten Verticalreihe, bis auf das letzte, welches aber in Null multiplicirt wird. So verschwinden beide Determinanten,

und es bleiben die Θ_{ik} den f_{ik} proportional. Da nun das Product der Tangenten des Doppelpunktes in beiden Curven durch die Ausdrücke

$$\Sigma\Sigma\Theta_{ik}X_iX_k,\quad f_{ik}X_iX_k$$

dargestellt wird, so folgt hieraus unmittelbar der angegebene Satz.

Die Curve $\Theta = 0$ ist von der Ordnung $3n-7$; $\Theta = 0$ und $f = 0$ haben also $n(3n-7)$ Schnittpunkte. Aber von diesen absorbirt dem Vorigen nach jeder der $\frac{n.n-3}{2}$ Doppelpunkte 6, jeder der $n-2$ andern festen Punkte 2. Die Anzahl der übrig bleibenden Punkte beträgt also

$$n(3n-7)-3n(n-3)-2(n-2) = 4.$$

Die Function Q ist also von der vierten Ordnung, und zugleich hat man den Satz:

Durch die $\frac{n.n-3}{2}$ Doppelpunkte der gegebenen Curve n^{ter} Ordnung und durch $n-2$ feste Punkte derselben kann man vier Curven $(n-2)^{ter}$ Ordnung legen, welche die gegebene Curve berühren.

Wesentlich ist noch, dass die Function Q offenbar von den a, b unabhängig ist. Der andere Factor der Discriminante enthält diese Grössen; und P ist also für die p vom ersten Grade, während es für λ vom Grade $(n-2)$ ist. In der That stellt P, wenn man darin die p als veränderliche Coordinaten ansieht, die Gleichung der Geraden dar, welche die beiden beweglichen Schnittpunkte verbindet. Sieht man aber die p als gegeben, λ als unbekannt an, so drückt dies den Satz aus:

Die Verbindungslinie der beweglichen Schnittpunkte, welche das System $u+\lambda v$ mit der gegebenen Curve gemein hat, umhüllt eine Curve $(n-2)^{ter}$ Classe.

§. 4.

Weitere Behandlung der Ausdrücke der Coordinaten.

Aus dem Entwickelten geht hervor, dass man setzen kann

$$(14.)\qquad W_{ik} = Q.l_il_k,$$

wobei Q eine Function vierten Grades, l_i, l_k Functionen $(n-2)^{ten}$ Grades von λ sind.

Nunmehr ist es auch möglich, die Ausdrücke (11.) der x weiter zu transformiren. Setzt man zunächst für μ seinen Werth ein, und lässt den gemeinschaftlichen Nenner B in ρ eingehen, so findet man

$$\begin{aligned}\varrho x_i &= B(\omega_{1i}a_1+\omega_{2i}a_2+\omega_{3i}a_3)-C(\omega_{1i}b_1+\omega_{2i}b_2+\omega_{3i}b_3)\\ &\quad +P\sqrt{-Q}(\omega_{1i}b_1+\omega_{2i}b_2+\omega_{3i}b_3).\\ &= \tfrac{1}{2}\frac{\partial.P^2Q}{\partial a_i}+P\sqrt{-Q}(\omega_{1i}b_1+\omega_{2i}b_2+\omega_{3i}b_3).\end{aligned}$$

Hier enthält nach Ausführung der Differentiation die rechte Seite offenbar $P\sqrt{-Q}$ als Factor, und indem man diesen abermals in ϱ eingehen lässt, bleibt

$$(15.)\qquad \varrho x = \omega_{1i}b_1+\omega_{2i}b_2+\omega_{3i}b_3-\frac{\partial P}{\partial a_i}\sqrt{-Q}.$$

Inzwischen ist aus der Vergleichung von (9.), (14.):

$$P=l_1p_1+l_2p_2+l_3p_3=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix},$$

und daher endlich:

$$(16.)\quad\begin{cases}\varrho x_1 = \omega_{11}b_1+\omega_{21}b_2+\omega_{31}b_3-(b_2l_3-b_3l_2)\sqrt{-Q},\\ \varrho x_2 = \omega_{12}b_1+\omega_{22}b_2+\omega_{32}b_3-(b_3l_1-b_1l_3)\sqrt{-Q},\\ \varrho x_3 = \omega_{13}b_1+\omega_{23}b_2+\omega_{33}b_3-(b_1l_2-b_2l_1)\sqrt{-Q}.\end{cases}$$

Diese Gleichungen geben die Darstellung der x als Functionen des Parameters λ. Sie ist rational, bis auf die Wurzel eines Ausdrucks Q der vierten Ordnung; die rationalen Functionen in welche dieselbe multiplicirt ist, sind von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, und die übrigen Theile der x sind rationale Functionen der n^{ten} Ordnung. Die willkürlichen Grössen a kommen darin nicht mehr vor; die b nur noch in linearer Weise.

Die Ausdrücke (16.) gestatten übrigens eine sehr einfache geometrische Deutung. Die Coefficienten von $\sqrt{Q}$ sind nämlich die Coordinaten des Punktes, in welchem die willkürlich gewählte Gerade b die Verbindungslinie l der beweglichen Punkte trifft; die ersten Theile der rechten Seiten sind die Coordinaten des Pols von b in Bezug auf jenes Punktepaar selbst, oder die Coordinaten des Punktes, welcher mit dem ersterwähnten und mit dem Paare selbst, zu welchem x gehört, ein harmonisches System bildet.

Aber die Ordnungen auf der rechten Seite von (16.) sind noch höher, als es die Natur der Sache erfordert. Man erkennt dies sofort, wenn man etwa den Durchschnitt einer beliebigen Geraden

$$(17.)\qquad c_1x_1-c_2x_2-c_3x_3 = 0$$

mit der durch (16.) dargestellten Curve bestimmt. Diese Aufgabe muss auf

eine Gleichung n^{ten} Grades für λ führen. Aber wenn man die Werthe der x in (17.) einsetzt, so kommt:

$$(17^a.)\qquad \Sigma\Sigma\omega_{ik}b_ic_k = \sqrt{-Q}.\Sigma\pm c_1b_2l_3,$$

und wenn man diese Gleichung rational macht, erhält man die Gleichung

$$(18.)\qquad (\Sigma\Sigma\omega_{ik}b_ic_k)^2+Q(\Sigma\pm c_1b_2l_3)^2 = 0,$$

welche für λ von der Ordnung $2n$ ist. Dieselbe enthält daher einen überflüssigen Factor; er ist leicht zu bestimmen. Nach den Formeln (9.), (14.) ist nämlich

$$Q.(\Sigma\pm c_1b_2l_3)^2 = \Sigma\Sigma\omega_{ik}b_ib_k.\Sigma\Sigma\omega_{ik}c_ic_k-(\Sigma\Sigma\omega_{ik}b_ic_k)^2,$$

und (18.) geht also über in

$$0 = \Sigma\Sigma\omega_{ik}b_ib_k.\Sigma\Sigma\omega_{ik}c_ic_k.$$

Der wirklich dem Problem angehörige Factor ist also der Factor n^{ten} Grades

$$0 = \Sigma\Sigma\omega_{ik}c_ic_k,$$

während der Factor

$$0 = \Sigma\Sigma\omega_{ik}b_ib_k$$

als von der Geraden c ganz unabhängig, nur Fremdartiges liefern kann: Dieser fremde Factor hat aber für die b ganz die gleiche Beschaffenheit, wie der andere für die c, er liefert also die Schnittpunkte der Curve mit der willkürlich gegebenen Geraden b, und der zu hohe Grad der rechten Theile von (16.) erklärt sich dadurch, dass alle jene Ausdrücke noch für gewisse, mit den Schnittpunkten der Geraden b mit der Curve zusammenhängende Werthe verschwinden.

§. 5.

Einführung eines neuen Parameters, für welchen die Ausdrücke der Coordinaten ihre einfachste Form annehmen.

In welcher Weise man diese der Sache fremden Werthe entfernen kann, und wie die Gestalt der resultirenden Ausdrücke ist, übersieht man leicht mit Hülfe der Theorie der elliptischen Functionen. Ich denke mir für λ einen linearen Ausdruck $\frac{\alpha+\beta\lambda}{\gamma+\delta\lambda}$ gesetzt, und die Constanten α, β, γ, δ so bestimmt, dass der Zähler von Q, abgesehen von einem constanten Factor in $\lambda.1-\lambda.1-x^2\lambda$ übergeht. Man kann dies auch geometrisch dadurch ausdrücken, dass man an Stelle der bisher beliebig dem Curvenbüschel $(n-2)^{ter}$ Ordnung entnommenen Curven $u=0$, $v=0$ zwei solche treten lässt, welche die Curve $f=0$

berühren, so dass $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ Wurzeln von $Q = 0$ werden. Dies vorausgesetzt sei nun

$$\sqrt{\lambda} = \sin \operatorname{am} u, \quad \sqrt{1-\lambda} = \cos \operatorname{am} u, \quad \sqrt{1-\varkappa^2\lambda} = \Delta \operatorname{am} u.$$

Jeder der Ausdrücke, welche die rechten Theile von (16.) bilden, hat also die Form

$$F(\sin^2 \operatorname{am} u) + F_1(\sin^2 \operatorname{am} u) \cdot \frac{d.\sin^2 \operatorname{am} u}{du},$$

und zwar ist dabei die Willkürlichkeit verschwunden, welche früher in dem zweifelhaften Vorzeichen der Wurzelgrösse lag; ein Paar auf derselben Curve des Systems $u + \lambda v = 0$ gelegener Punkte wird in dieser Form durch die Argumente u und $-u$ unterschieden.

Die angegebene Form lässt sich nach *Hermite* (Note zur dritten Ausgabe von *Lacroix*, p. 66) ersetzen durch einen Ausdruck von der Gestalt

$$C \cdot \frac{H(u-\alpha')H(u-\alpha'')\ldots H(u-\alpha^{(2n)})}{\Theta^{2n}(u)};$$

wo

$$(19.) \qquad \alpha' + \alpha'' \ldots \alpha^{(2n)} = 0,$$

und ebendies gilt nicht bloss für die rechten Theile von (16.) selbst, sondern für jede, einer beliebigen Geraden entsprechende Combination, sodass die für den Schnitt einer beliebigen Geraden $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0$ mit den Curven geltenden Bedingungen immer die Form annehmen

$$H(u-\alpha').H(u-\alpha'') \ldots H(u-\alpha^{(2n)}) = 0.$$

Hiebei ist ein Theil der α, nämlich n derselben, veränderlich, den veränderlichen Schnittpunkten der Geraden mit der Curve entsprechend; die n übrigen α sind aber constant; sie führen auf diejenigen Werthe von λ, welche in den Schnittpunkten der Geraden b mit der Curve $f = 0$ eintreten, und sind also den dort stattfindenden Werthen von u gleich oder entgegengesetzt. Hierüber zu entscheiden gestattet die Gleichung (17^a.). Wenn wir nämlich die Gerade c mit der Geraden b selbst zusammenfallen lassen, so gehen die n ersten α unbedingt in diejenigen Werthe vou u über, welche in den Schnittpunkten von b mit $f = 0$ stattfinden. Weil aber für diesen Fall aus der entsprechenden Gleichung (17^a.) für λ die Wurzelgrösse herausfällt, und man nur eine Gleichung n^{ten} Grades für $\lambda = \sin^2 \operatorname{am} u$ aufzulösen hat, so sind die ihr entsprechenden Werthe von u paarweise gleich und entgegengesetzt, so dass, wenn die den Schnittpunkt von $b = 0$ mit $f = 0$ zugehörigen Werthe

von u mit $\beta', \beta'', \ldots \beta^{(n)}$ bezeichnet werden, die übrigen jener Gleichung genügenden Werthe $-\beta', -\beta'', \ldots -\beta^{(n)}$ sind. Die Argumente $\alpha^{(n+1)}, \alpha^{(n+2)}, \ldots \alpha^{(2n)}$ müssen also mit diesen letzten Werthen übereingestimmt haben.

Lassen wir nur den bei jedem der x auftretenden Factor

$$H(u+\beta').H(u+\beta'') \ldots H(u+\beta^{(n)})$$

in ϱ eingehen, so erhalten wir Formeln folgender Art:

$$(20.)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = c_1 \cdot \dfrac{H(u-\alpha'_1)H(u-\alpha''_1)\ldots H(u-\alpha_1^{(n)})}{\Theta^n(u)}, \\ \varrho x_2 = c_2 \cdot \dfrac{H(u-\alpha'_2)H(u-\alpha''_2)H\ldots(u-\alpha_2^{(n)})}{\Theta^n(u)}, \\ \varrho x_3 = c_3 \cdot \dfrac{H(u-\alpha'_3)H(u-\alpha''_3)H\ldots(u-\alpha_3^{(n)})}{\Theta^n(u)}. \end{cases}$$

Die rechten Theile lassen sich hier nicht mehr unmittelbar mit Anwendung des *Hermite*schen Satzes in algebraische Form zurückführen; denn die Summe der α ist nicht mehr Null. Vielmehr, setzen wir

$$\beta'+\beta''+\cdots+\beta^{(n)} = c,$$

so ergiebt sich aus (19.), dass für die Schnittpunkte jeder Geraden mit der Curve auch

$$\alpha'+\alpha''+\cdots+\alpha^{(n)} = c.$$

Es folgt also einerseits, *dass die Summe der zu den Schnittpunkten einer Geraden mit der Curve gehörigen Argumente stets denselben constanten Werth besitzt,* ein Satz, den wir weiter unten in viel allgemeinerer Form wieder auftreten sehen werden. Andrerseits aber liegt es nahe, wenn c diesen constanten Werth bezeichnet, an Stelle von u die Variable

$$u' = u-\frac{c}{n},$$

und an Stelle der α die constanten Werthe

$$\beta = \alpha-\frac{c}{n}$$

einzuführen, wodurch die Formeln (20.) ungeändert bleiben. Nunmehr ist die Summe der β immer gleich Null, und nach demselben *Hermite*schen Satz, von welchem bereits oben Gebrauch gemacht wurde, kann man den rechten Theilen von (20.) jetzt die Form geben

$$C.\{f(\lambda')+\sqrt{\lambda'.1-\lambda'.1-k^2\lambda'}.\varphi(\lambda')\},$$

wenn n gerade ist, oder die Form

$$C.\{f(\lambda')\sqrt{\lambda'}+\sqrt{1-\lambda'.1-k^2\lambda'}.\varphi(\lambda')\},$$

wenn n eine ungerade Zahl ist. Und zwar ist dabei im ersten Falle f von der Ordnung $\frac{n}{2}$, φ von der Ordnung $\frac{n}{2}-2$, im zweiten Falle ist f von der Ordnung $\frac{n-1}{2}$, φ von der Ordnung $\frac{n-3}{2}$. Die Variable λ' aber hat die Bedeutung

$$(21.)\qquad \sqrt{\lambda'} = \sin\operatorname{am}\left(u-\frac{c}{n}\right) = \frac{\sqrt{\lambda.1-\varepsilon.1-k^2\varepsilon}-\sqrt{\varepsilon.1-\lambda.1-k^2\lambda}}{1-k^2\varepsilon\lambda},$$

wenn

$$(22.)\qquad \sqrt{\varepsilon} = \sin\operatorname{am}\frac{c}{n}$$

gesetzt ist. Man ist also von den Formeln (16.) zu den reducirten Formeln übergegangen mittels einer irrationalen Substitution (21.), welche die Entfernung der in (16.) enthaltenen überflüssigen Factoren ermöglicht.

Das Endresultat dieser Untersuchung lässt sich etwas bequemer aussprechen, wenn man für λ' wieder einen linearen Ausdruck $\frac{\alpha+\beta z}{\gamma+\delta z}$ einführt. Hiedurch treten nach Entfernung der Nenner an Stelle der Factoren der Wurzelgrösse wieder allgemein lineare Ausdrücke $p+qz$, und man kann folgenden Satz aussprechen:

Die Coordinaten eines Punkts einer Curve n^{ter} Ordnung mit $\frac{n.n-3}{2}$ Doppelpunkten lassen sich immer in der Form darstellen:

$$(23.)\qquad \begin{cases} \varrho x_1 = f_1(z)\sqrt{M}+\varphi_1(z)\sqrt{N}, \\ \varrho x_2 = f_2(z)\sqrt{M}+\varphi_2(z)\sqrt{N}, \\ \varrho x_3 = f_3(z)\sqrt{M}+\varphi_3(z)\sqrt{N}, \end{cases}$$

wobei die Ausdrücke f von der Ordnung $k \overline{\gtrless} \frac{1}{2}n$, die Ausdrücke φ von der Ordnung $h \overline{\gtrless} \frac{1}{2}n$, wobei ferner M von der Ordnung $n-2k$, N von der Ordnung $n-2h$ und $k+h=n-2$ ist, so dass $M.N$ immer ein Ausdruck vierter Ordnung wird; und zwar kann man immer einer der beiden Functionen M, N die Ordnung 0, der anderen die Ordnung 4, oder einer die Ordnung 1, der anderen die Ordnung 3 geben.

§. 6.

Andere Hülfssysteme. Der Modul ist von der Wahl der festen Punkte unabhängig.

Der Curvenbüschel $(n-2)^{ter}$ Ordnung $u+\lambda v=0$, welcher hier benutzt wurde, zeichnet sich dadurch aus, dass er der Büschel niedrigster Ordnung

ist, welcher zu dem vorliegenden Zwecke brauchbar ist, und zugleich durch *alle* Doppelpunkte geht. Der Curvenbüschel niedrigster Ordnung, an den man überhaupt Betrachtungen wie die vorliegenden anknüpfen kann, ist von der $n-3^{\text{ten}}$ Ordnung; man muss aber bei ihm als Grundpunkte die Doppelpunkte der gegebenen Curven mit Ausschluss eines derselben ansehen. Auch hat dieser Büschel den Nachtheil, dass er bei den Curven dritter Ordnung, für welche die Anzahl der Doppelpunkte Null wird, nicht mehr besteht, während der oben gebrauchte die Substitution des Herrn *Aronhold* (Monatsbericht der Berliner Academie, 25. April 1861) liefert. Man kann aber genau mit demselben Erfolge und mit der gleichen Allgemeinheit einen Curvenbüschel $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung anwenden, welcher durch die Doppelpunkte und durch $2(n-1)$ beliebig auf der Curve $f=0$ gewählte feste Punkte hindurchgeht.

Wir haben schon oben gesehen, dass der Modul k der hier auftretenden elliptischen Functionen allein von der Curve $f=0$ und von den Constanten des Büschels abhängen kann, d. h. von den Coordinaten der beliebigen $n-2$ Punkte, welche man zu Grundpunkten des Büschels gemacht hat. Es ist leicht zu zeigen, dass er auch von diesen letzten nicht abhängig ist. Bilden wir nämlich das Integral

$$\int \frac{\theta \,.\, \Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3},$$

wobei die Variabeln x_1, x_2, x_3 durch die Gleichung $f=0$ verbunden sein sollen, und wo $\theta=0$ die Gleichung der Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, welche durch die Doppelpunkte hindurchgeht. Dieses Integral kann man mit Benutzung der Werthe (23.) in ein elliptisches Integral nach λ verwandeln, und da die zu integrirende Function nirgends von einer höheren als von der $\frac{1}{2}^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich wird, so ist es nothwendig ein Integral erster Gattung, d. h. es geht über in

$$C \,.\! \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda \,.\, 1-\lambda \,.\, 1-k^2\lambda}}.$$

Wenn wir nun die $n-2$ beliebigen Grundpunkte des Büschels verändern, so mag ein neuer Modul k_1 und eine neue Constante C_1 entstehen. Es ist also einerseits

$$C \,.\! \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda \,.\, 1-\lambda \,.\, 1-k^2\lambda}} = C_1 \,.\! \int \frac{d\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1 \,.\, 1-\lambda_1 \,.\, 1-k^2\lambda_1}},$$

andererseits folgt aus der doppelten Darstellungsweise der α, und daraus, dass λ und λ_1 als rationale Functionen der x darstellbar sind, dass λ sich ebenso-

wohl durch λ_1 und $\sqrt{\lambda_1 . 1-\lambda_1 . 1-k_1^2\lambda_1}$, als λ_1 durch λ und $\sqrt{\lambda . 1-\lambda . 1-k^2\lambda}$ rational ausdrücken lässt. Dies ist nur möglich, wenn k_1 einer der zu k conjugirten Module k', $\frac{1}{k}$ etc. ist; und da eben die Einführung der letztern nichts als eine veränderte Benutzung der vier Wurzeln von $Q=0$ anzeigt, so kann man es immer so einrichten, dass $k_1 = k$ wird, und man sieht also, *dass k nothwendig von der Lage der $n-2$ gewählten Grundpunkte unabhängig ist.*

Dieses Resultat, nach welchem k eine für die Curve $f=0$ charakteristische Constante ist, erlaubt eine geometrische Deutung, welche eine von Herrn *Salmon* (Bd. 42, p. 274 dieses Journals) zuerst gegebene Eigenschaft der Curven dritter Ordnung in merkwürdiger Weise verallgemeinert. Denken wir uns nämlich die vier Curven des Büschels $u+\lambda v$, welche $f=0$ berühren, und in irgend einem gemeinsamen Punkte derselben die Tangenten gelegt, so ist das Doppelverhältniss der vier Tangenten, was auch kurz das Doppelverhältniss der vier Curven heissen mag, gleich dem Doppelverhältniss der vier entsprechenden λ, oder der Wurzeln von Q, also nur von k abhängig, mithin unabhängig von der Lage der $n-2$ gewählten Grundpunkte. Und so hat man den Satz:

Wählen wir auf einer Curve n^{ter} Ordnung mit $\frac{n.n-3}{2}$ Doppelpunkten $n-2$ beliebige Punkte, und legen durch sie und die Doppelpunkte die vier Curven $n-2^{ter}$ Ordnung, welche die gegebene Curve ausserdem noch berühren. Dann ist das Doppelverhältniss dieser vier Curven immer das gleiche, wo man auch jene $n-2$ Punkte angenommen habe.

Bei Curven dritter Ordnung ist dies der oben angedeutete Satz, dass das von einem Punkt der Curve gelegte Tangentenbüschel stets dasselbe Doppelverhältniss habe.

Obiger Satz gilt auch noch, wenn man statt der Curven $n-2^{ter}$ Ordnung immer Curven $(n-1)^{ter}$ Ordnung und statt der $n-2$ gewählten Grundpunkte deren immer $2(n-1)$ substituirt.

§. 7.

Untersuchung der Curven, welche durch die Formeln (23.) dargestellt werden. Sie sind immer von der n^{ten} Ordnung und haben $\frac{n.n-3}{2}$ Doppelpunkte.

Ich stelle mir jetzt umgekehrt die Aufgabe, alle Curven zu untersuchen, die durch Gleichungen von der Form (23.) dargestellt sind. Dabei

darf man voraussetzen, dass weder M einen sämmtlichen φ gemeinsamen Factor enthält, noch N einen sämmtlichen f gemeinsamen; und dass überhaupt die Grössen $f_i^2 M - \varphi_i^2 N$ keinen allen gemeinschaftlichen Factor enthalten. Man erkennt dann leicht, dass die durch (23.) dargestellte Curve von der n^{ten} Ordnung ist und $\frac{n.n-3}{2}$ Doppelpunkte besitzt. Hiedurch wird die völlige Identität beider Definitionen festgestellt, so dass es gleichgültig ist, ob man die Curve durch die Ordnung und die Zahl ihrer Doppelpunkte, oder ob man sie durch die Form (23.) characterisirt.

Was zunächst die Ordnung der Curve (23.) betrifft, so wird dieselbe ermittelt, indem man in den Ausdruck einer Geraden $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$ jene Werthe der x substituirt, und die Anzahl der Schnittpunkte der Geraden mit der Curve ermittelt. Man findet die Gleichung

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3)^2 M - (c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3)^2 N = 0.$$

Dieselbe ist für z von der n^{ten} Ordnung, daher auch n die Ordnung der Curve, da das Auftreten von den c unabhängiger Factoren ausgeschlossen wurde.

Die Doppelpunkte der Curve (23.) bestimmen sich dadurch, dass für zwei verschiedene Werthe z, z', die dem Doppelpunkt im Verlauf der sich in ihm schneidenden Zweige entsprechen, proportionale Werthe der Coordinaten herauskommen müssen.

Man hat also ein zusammengehöriges Werthepaar z, z' aus den Gleichungen zu bestimmen:

$$(24.)\quad \begin{cases} f_1 \sqrt{M} + \varphi_1 \sqrt{N} = \sigma(f'_1 \sqrt{M'} + \varphi'_1 \sqrt{N'}), \\ f_2 \sqrt{M} + \varphi_2 \sqrt{N} = \sigma(f'_2 \sqrt{M'} + \varphi'_2 \sqrt{N'}), \\ f_3 \sqrt{M} + \varphi_3 \sqrt{N} = \sigma(f'_3 \sqrt{M'} + \varphi'_3 \sqrt{N'}), \end{cases}$$

wo die obern Striche auf das Argument z' hinweisen sollen. Werden nun die Unterdeterminanten, welche man durch Weglassung einer Verticalreihe aus dem unvollständigen System

$$\begin{matrix} f_1 & \varphi_1 & f'_1 & \varphi'_1, \\ f_2 & \varphi_2 & f'_2 & \varphi'_2, \\ f_3 & \varphi_3 & f'_3 & \varphi'_3, \end{matrix}$$

erhält, dividirt durch $z-z'$, durch

$$F, \quad \Phi, \quad F', \quad \Phi'$$

bezeichnet, so folgt aus (24.) das folgende aequivalente System:

$$\sqrt{M} : \sqrt{N} : \sigma\sqrt{M'} : \sigma\sqrt{N'}$$
$$= F : \Phi : F' : \Phi'.$$

oder

$$(25.)\quad \begin{cases} F^2 N - \Phi^2 M = 0 = \Omega(s, s'), \\ F'^2 N' - \Phi'^2 M' = 0 = \Omega(s', s). \end{cases}$$

Beide Gleichungen unterscheiden sich nur durch Vertauschung von s mit s'; beide sind für das erste Argument vom Grade $n-2$, für das zweite vom Grade $2n-6$. Die Gleichung, welche nach Elimination von s' übrig bleibt, ist nach *Abel* durch $\Omega(s, s)$ theilbar, und der Rest also vom Grade

$$(n-2)^2+(2n-6)^2-3n-8 = (5n-16)(n-3).$$

Aber auch noch die so erhaltene Gleichung besitzt einen überflüssigen Factor. Denn die Gleichungen (25.) bedingen rückwärts die Gleichungen (24.) nur dann, wenn nicht F, Φ, F', Φ' gleichzeitig verschwinden. Dies kann in der That geschehen; und ein davon herrührender Factor muss noch in der letzten Gleichung unterdrückt werden. Betrachten wir die Gleichungen (25.) als Gleichungen zweier Curven mit den Coordinaten s, s', so sind für dieselben diejenigen Punkte, in denen F, Φ, F', Φ' gleichzeitig verschwinden, Doppelpunkte; ist die Zahl solcher Punkte gleich ϱ, so erniedrigt sich die Anzahl der übrigen Schnittpunkte um 4ϱ, und der Grad der oben erwähnten Endgleichung reducirt sich auf

$$(5n-16)(n-3)-4\varrho.$$

Es kommt also nur noch darauf an, die Anzahl von Lösungen zu bestimmen, welche die Gleichungen

$$F=0,\quad \Phi=0,\quad F'=0,\quad \Phi'=0$$

gemeinsam haben. Aber die dritte und vierte Gleichung ist immer eine Folge der beiden ersten. Denn da der Entstehung dieser Ausdrücke nach identisch

$$Ff_i+\Phi\varphi_i+F'f'_i+\Phi'\varphi'_i = 0,$$

so finden für $F=0$, $\Phi=0$ immer die Gleichungen statt:

$$F'f'_1+\Phi'\varphi'_1 = 0,$$
$$F'f'_2+\Phi'\varphi'_2 = 0,$$
$$F'f'_3+\Phi'\varphi'_3 = 0,$$

aus denen im Allgemeinen immer $F'=0$, $\Phi'=0$ folgt. Es ist also ϱ die Anzahl von Lösungen, welche den Gleichungen $F=0$, $\Phi=0$ gemeinsam sind.

Nun sind die Ordnungen dieser Ausdrücke

$$\text{für } s: \quad h-1 \text{ und } k-1,$$
$$\text{für } s': \quad h+k-1;$$

daher kommt nach Elimination von s eine Gleichung vom Grade $(h+k-1)(h+k-2) = (n-3)(n-4)$. Dies also ist der Werth von ρ, und der Grad der zu bestimmenden Endgleichung ist

$$(5n-16)(n-3)-4(n-3)(n-4) = n.n-3.$$

Dies stimmt mit der Existenz von $\frac{n.n-3}{2}$ Doppelpunkten überein. Denn da jedem Doppelpunkte zwei Argumente zukommen, so müssen $n.n-3$ Argumente gefunden werden. Die Gleichung $n.n-3^{\text{ten}}$ Grades aber hat die Eigenschaft, dass aus (25.) immer eine Wurzel s' eine rationale Function von s, und s dieselbe rationale Function von s' wird. Man löst also jene Gleichung mit Hülfe einer Gleichung vom Grade $\frac{n.n-3}{2}$, und von $\frac{n.n-3}{2}$ quadratischen Gleichungen.

So ist nachgewiesen, dass die Curve n^{ter} Ordnung, deren Coordinaten die Form (23.) annehmen können, immer $\frac{n.n-3}{2}$ Doppelpunkte besitzt, und also immer von der Eingangs betrachteten Art ist. Von diesen Doppelpunkten können einige in Rückkehrpunkte übergehen: dies tritt ein, sobald die Grössen s, s' eines zu einem Doppelpunkte gehörigen Paares einander gleich werden.

§. 8.

Bedingungen für das System der Schnittpunkte der gegebenen mit einer andern algebraischen Curve.

Wenn eine Curve m^{ter} Ordnung die gegebene Curve schneidet, so treten zwischen den Parametern der mn Schnittpunkte gewisse nothwendige Beziehungen ein, welche von der Natur der Curve m^{ter} Ordnung unabhängig sind, und nur von der Zahl m selbst abhängen. Das *Abel*sche Theorem lehrt diese Bedingungen kennen. Man weiss, dass die Anzahl derselben $\frac{n-1.n-2}{2}$ ist, sobald m grösser als $n-3$ wird, während sie für kleinere Werthe von m sich vermindert. Diese Bedingungen sollen nun aufgestellt werden.

Denken wir uns die Gleichung irgend einer Curve m^{ter} Ordnung gegeben, deren Durchschnitt mit der vorliegenden Curve untersucht werden soll. Führen wir in diese Gleichung die Ausdrücke (23.) ein, so haben wir eine

Gleichung in z, welche die gesuchten Schnittpunkte liefert. Diese Gleichung hat, jenachdem m ungrade oder gerade ist, eine der Formen

$$P\sqrt{M}+Q\sqrt{N}=0, \qquad P+Q\sqrt{MN}=0,$$

wo P, Q rationale Functionen von λ sind. Ich will diese beiden Formen zusammen durch

$$(26.) \qquad P\sqrt{U}+Q\sqrt{V} = 0$$

bezeichnen, wo denn immer $UV=MN$. Die rationale Gleichung in z ist dann $P^2U-Q^2V=0$, und nennt man die Parameter der Schnittpunkte $z_1, z_2, \dots z_{mn}$, so ist immer

$$(26^a.) \qquad P^2U-Q^2V = K.z-z_1.z-z_2\dots z-z_{mn}.$$

Denken wir uns die Curve m^{ter} Ordnung beweglich, so dass auch das Schnittpunktsystem sich continuirlich ändert, so folgt aus dieser Gleichung

$$(27.) \qquad \sum_{i=1}^{i=mn}\int\frac{dz_i}{z-z_i} = -\log\frac{P^2U-Q^2V}{K}+\text{Const.}$$

Aber das *Abel*sche Theorem (Bd. III, p. 314 dieses Journals) liefert aus (26^a.) auch noch folgende Gleichung:

$$(28.) \qquad \sum_{i=1}^{i=mn}\int\frac{\sqrt{MN}.dz_i}{(z-z_i)\sqrt{M_iN_i}} = \log\frac{P\sqrt{U}-Q\sqrt{V}}{P\sqrt{U}+Q\sqrt{V}}+\text{Const.},$$

so dass aus (27.), (28.) die Combination folgt:

$$(29.) \qquad \sum_{i=1}^{i=mn}\int\frac{\sqrt{M_iN_i}+\sqrt{MN}}{(z-z_i)\sqrt{M_iN_i}}dz_i = -2\log\frac{P\sqrt{U}+Q\sqrt{V}}{K}+\text{Const.}$$

Diese Gleichungen sind für z identisch, so dass man dieser bei den Integrationen als constant betrachteten Grösse noch jeden beliebigen Werth beilegen kann. Setzen wir zunächst in (28.) $z=\infty$; dann ergiebt sich das Additionstheorem für die Integrale erster Gattung:

$$(30.) \qquad \sum_{i=1}^{i=mn}\frac{dz_i}{\sqrt{M_iN_i}} = \text{Const.}$$

Bezeichnen wir ferner durch a, b das Parameterpaar irgend eines Doppelpunktes. Nach (24.) finden dann immer Gleichungen von folgender Form statt:

$$(f_i\sqrt{M}+\varphi_i\sqrt{N})_{z=a} = c.(f_i\sqrt{M}+\varphi_i\sqrt{N})_{z=b}.$$

Der Ausdruck $P\sqrt{U}+Q\sqrt{V}$ also, welcher nichts Anderes ist, als die Gleichung der Curve m^{ter} Ordnung, wenn darin die x_i durch die Ausdrücke $f_i\sqrt{M}+\varphi_i\sqrt{N}$ ersetzt werden, erfüllt die Gleichung

$$(P\sqrt{U}+Q\sqrt{V})_{z=a} = c^m.(P\sqrt{U}+Q\sqrt{V})_{z=b}.$$

Diese Gleichung kann man benutzen um aus (29.) eine weitere Reihe von Combinationen zu bilden, welche von den Coefficienten der Curve m^{ter} Ordnung vollkommen unabhängig sind. Denn bildet man die Gleichung (29.) einmal für $z = a$, das andere Mal für $z = b$, so giebt die Differenz beider Gleichungen

$$(31.)\quad \sum_{i=1}^{i=mn}\int\left\{\frac{\sqrt{M_iN_i}+\sqrt{M_aN_a}}{(a-z_i)\sqrt{M_iN_i}}-\frac{\sqrt{M_iN_i}+\sqrt{M_bN_b}}{(b-z_i)\sqrt{M_iN_i}}\right\}dz_i = \text{Const.}$$

oder, wenn man will, gleich Const. $-2m\log c$, was dasselbe sagt, da c von den Coefficienten der Curve m^{ter} Ordnung unabhängig ist. Solcher Gleichungen wie (31.) giebt es $\frac{n.n-3}{2}$, den verschiedenen Doppelpunkten entsprechend; diese, mit (30.) zusammen, bilden das vollständige System von $\frac{n-1.n-2}{2}$ Bedingungen, denen das Schnittpunktsystem zu genügen hat. Es ergiebt sich also der Satz:

Wenn $a_1, b_1;\ a_2, b_2;\ \ldots\ a_{\frac{n.n-3}{2}}, b_{\frac{n.n-3}{2}}$ die Parameterpaare der Doppelpunkte sind, so müssen die Parameter $z_1, z_2, \ldots z_{mn}$ solcher Punkte der Curve (23.), welche zugleich auf einer Curve m^{ter} Ordnung liegen, den $\frac{n-1.n-2}{2}$ Bedingungen genügen:

$$(\text{I.})\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=mn}\int\frac{dz_i}{\sqrt{M_iN_i}} = \text{Const.},\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{i=mn}\int\left\{\frac{\sqrt{M_iN_i}+\sqrt{M_aN_a}}{(a-z_i)\sqrt{M_iN_i}}-\frac{\sqrt{M_iN_i}+\sqrt{M_bN_b}}{(b-z_i)\sqrt{M_iN_i}}\right\}dz_i = \text{Const.},\\ \left(a, b = a_1, b_1;\ a_2, b_2;\ \ldots\ a_{\frac{n.n-3}{2}}, b_{\frac{n.n-3}{2}}\right), \end{cases}$$

wobei die Werthe der Constanten nur noch von der Natur der gegebenen Curve selbst und von der Zahl m abhängen können.

§. 9.

Einführung der elliptischen Functionen in die Bedingungen für das Schnittpunktsystem.

Die Bedingungsgleichungen (I.) können einfacher dargestellt werden, indem man an Stelle der Parameter z die zugehörigen elliptischen Integrale erster Gattung als Argumente einführt. Denken wir uns wieder statt z einen linearen Ausdruck in z gesetzt, und seine Coefficienten so bestimmt, dass

$\sqrt{MN}$ bis auf einen constanten Factor in $\sqrt{s.1-s.1-k^2s}$ übergeht, und setzen wir dann

$$s = \sin^2 \mathrm{am}\, u, \quad a = \sin^2 \mathrm{am}\, \alpha, \quad b = \sin^2 \mathrm{am}\, \beta,$$

so verwandeln sich die Gleichungen (I.) in

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{mn} = \text{Const.},$$

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \left\{ \log \frac{\sin^2 \mathrm{am}\beta - \sin^2 \mathrm{am} u_i}{\sin^2 \mathrm{am}\alpha - \sin^2 \mathrm{am} u_i} + 2 \int \left[\frac{\sin \mathrm{am}\alpha \cos \mathrm{am}\alpha \Delta \mathrm{am}\alpha}{\sin^2 \mathrm{am}\alpha - \sin^2 \mathrm{am} u_i} - \frac{\sin \mathrm{am}\beta \cos \mathrm{am}\beta \Delta \mathrm{am}\beta}{\sin^2 \mathrm{am}\beta - \sin^2 \mathrm{am} u_i} \right] du_i \right\} = \text{Const.}$$

Die letzte Formel aber verwandelt sich nach *Jacobi* (dieses Journal Bd. 39, p. 348) in

$$\text{Const.} = \Sigma \left\{ \log \frac{\sin^2 \mathrm{am}\,\beta - \sin^2 \mathrm{am}\, u_i}{\sin^2 \mathrm{am}\,\alpha - \sin^2 \mathrm{am}\, u_i} - 2u_i \left(\frac{\Theta'\alpha}{\Theta\alpha} - \frac{\Theta'\beta}{\Theta\beta} \right) + \log \frac{H(\alpha+u_i) H(\beta-u_i)}{H(\alpha-u_i) H(\beta+u_i)} \right\};$$

und wenn man das Glied

$$-2\left(\frac{\Theta'\alpha}{\Theta\alpha} - \frac{\Theta'\beta}{\Theta\beta} \right) \Sigma u_i$$

als wegen der ersten Gleichung constant in die Constante eingehen lässt, wenn man sodann die Formel

$$\frac{\sin^2 \mathrm{am}\,\beta - \sin^2 \mathrm{am}\, u_i}{\sin^2 \mathrm{am}\,\alpha - \sin^2 \mathrm{am}\, u_i} = \frac{\Theta^2\alpha}{\Theta^2\beta} \cdot \frac{H^2\beta\Theta^2 u_i - \Theta^2\beta H^2 u_i}{H^2\alpha\Theta^2 u_i - \Theta^2\alpha H^2 u_i} = \frac{\Theta^2\alpha}{\Theta^2\beta} \cdot \frac{H(\beta+u_i) H(\beta-u_i)}{H(\alpha+u_i) H(\alpha-u_i)}$$

anwendet, erhält man endlich:

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \log \frac{H(\alpha-u_i)}{H(\beta-u_i)} = \text{Const.},$$

oder auch

$$\frac{H(\alpha-u_1) H(\alpha-u_2) \ldots H(\alpha-u_{mn})}{H(\beta-u_1) H(\beta-u_2) \ldots H(\beta-u_{mn})} = \text{Const.}$$

Und so finden sich die Formeln (I.) ersetzt durch das System:

$$\text{(II.)} \quad \begin{cases} u_1 + u_2 + \cdots + u_{mn} = c, \\ \dfrac{H(\alpha_h-u_1).H(\alpha_h-u_2)\ldots H(\alpha_h-u_{mn})}{H(\beta_h-u_1).H(\beta_h-u_2)\ldots H(\beta_h-u_{mn})} = c_h, \\ \left(h = 1, 2, \cdots \dfrac{n.n-3}{2} \right). \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen hätte man auch unmittelbar aus dem Theorem des Hrn. *Hermite* schliessen können, und zugleich hätte man die Constante c gleich Null gefunden. Nach jenem Satze wird nämlich immer, wenn $s = \sin^2 \mathrm{am}\, u$ gesetzt wird, für u identisch

$$P\sqrt{U} + Q\sqrt{V} = C.e^{-\frac{\nu i \pi u}{K}} \cdot \frac{H(u-u_1) H(u-u_2) \ldots H(u-u_{mn})}{\Theta^{mn}(u)},$$

und zugleich ist

$$u_1+u_2+\cdots+u_{mn} \equiv 0,$$

wenn durch das Congruenzzeichen angedeutet ist, dass linke und rechte Seite sich nur um ganze Vielfache der Perioden $2\mu K+2\nu iK'$ unterscheiden sollen. Dies giebt offenbar die erste Formel der Systeme I., II., und zwar findet sich dabei $c \equiv 0$.

Um die anderen c zu bestimmen, bemerke ich zunächst, dass, wenn die einzelnen u_k um $2\mu_k K+2\nu_k iK'$ wachsen, und dadurch ihre Summe um $2\mu K+2\nu iK'$ vermehrt wird, die linke Seite der zweiten Gleichung (II.) um den Factor $e^{-\frac{\pi i\nu}{K}(\alpha_h-\beta_h)}$ zunimmt (vgl. das unten über die Perioden Gesagte). Daher ist es zweckmässig auch hier das Congruenzzeichen anzuwenden; dann kann man die c_h als absolut bestimmt ansehen, und die Logarithmen beider Seiten der zweiten Gleichung (II.) können sich noch um $2m_h i\pi-\frac{\pi i\nu}{K}(\alpha_h-\beta_h)$ unterscheiden. Die Gleichungen (II.) gelten, wie auch die Curve m^{ter} Ordnung in einfachere Curven zerfallen möge. Denken wir uns nun die Curve m^{ter} Ordnung, um deren Schnittpunktsystem es sich handelt, in m Gerade aufgelöst, und bezeichnen wir durch γ_h die zu $m=1$ gehörigen Werthe der c_h, so folgt offenbar

$$c_h \equiv \gamma_h^m,$$

wo nun die γ von m unabhängig sind. Es bleiben also nur die Grössen γ noch zu bestimmen.

Diese Grössen bestimmt man aus dem Werthe $m=n-3$, indem man eine Reihe von Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung bildet, für welche die Argumente u von vorn herein bekannt sind. Erstlich nämlich kann man eine Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung durch sämmtliche Doppelpunkte legen. Die Argumente ihres Schnittpunktsystems sind

$$\alpha_1,\quad \beta_1,\quad \alpha_2,\quad \beta_2,\quad \ldots\quad \alpha_{\frac{n.n-3}{2}},\quad \beta_{\frac{n.n-3}{2}}.$$

Die der zweiten Gleichung (II.) entsprechenden Gleichungen werden dabei sämmtlich illusorisch, und es bleibt nur

$$(32.)\qquad \Sigma(\alpha_h+\beta_h) \equiv 0.$$

Man erhält also hiedurch nur den Satz:

Die Summe der den Doppelpunkten entsprechenden Argumentenpaare ist gleich einem ganzen Vielfachen der Perioden.

Wenn man nun Curven $n-3^{\text{ter}}$ Ordnung legt, welche durch alle Doppelpunkte mit Ausschluss eines derselben (α_h, β_h) hindurchgehen, so hat man

noch eine Bestimmung zu seiner Verfügung. Diese soll so getroffen werden, dass die zwei noch übrigen Schnittpunkte mit der Curve n^{ter} Ordnung zusammenfallen. Es wird also eine Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung gesucht, welche durch $\frac{n.n-3}{2}-1$ Doppelpunkte geht, und die gegebene Curve berührt. Ist u das Argument des Berührungspunktes, so giebt zunächst die erste der Gleichungen (II.) mit Rücksicht auf (32.)

$$2u \equiv \alpha_h + \beta_h,$$

also für u die vier Werthe

$$u = \frac{\alpha_h+\beta_h}{2}, \quad \frac{\alpha_h+\beta_h}{2}+K, \quad \frac{\alpha_h+\beta_h}{2}+iK', \quad \frac{\alpha_h+\beta_h}{2}+K+iK'.$$

Es folgt daraus

$$\left(\frac{H(\alpha_h-u)}{H(\beta_h-u)}\right)^2 = 1 \quad \text{oder} \quad = e^{-i\pi\frac{\beta_h-\alpha_h}{K}}$$

und die von den Gleichungen (II.) allein übrigbleibende Gleichung, welche dem Doppelpunkte α_h, β_h entspricht, liefert die Formel zur Bestimmung von γ_h:

$$(33.) \qquad \gamma_h^{n-3} \equiv \overset{\bullet}{\Pi} \frac{H(\alpha_h-\alpha_i)H(\alpha_h-\beta_i)}{H(\beta_h-\alpha_i)H(\beta_h-\beta_i)},$$

wobei der über das Productzeichen gesetzte Punkt andeutet, dass dem Index i alle Werthe von 1 bis $\frac{n.n-3}{2}$, mit Ausschluss des Index h beigelegt werden sollen.

Hiedurch ist die Bestimmung der Constanten geleistet, und man kann das Resultat der Betrachtung in folgenden Satz ausdrücken:

Die Argumente u des Schnittpunktsystemes einer Curve m^{ter} Ordnung mit der gegebenen Curve müssen den folgenden $\frac{n-1.n-2}{2}$ Bedingungen genügen:

$$(\text{III.}) \quad \begin{cases} u_1+u_2+\cdots+u_{mn} \equiv 0, \\ \prod_{i=1}^{i=mn} \frac{H(\alpha_h-u_i)}{H(\beta_h-u_i)} \equiv \left\{\overset{\bullet}{\Pi} \frac{H(\alpha_h-\alpha_i)H(\alpha_h-\beta_i)}{H(\beta_h-\alpha_i)H(\beta_h-\beta_i)}\right\}^{\frac{m}{n-3}}, \\ h = 1,\ 2,\ \ldots \frac{n.n-3}{2}. \end{cases}$$

Man kann diesen Satz noch modificiren, indem man ihn für eine Curve ausspricht, welche durch einige der Doppelpunkte geht. Sind α_1, β_1; α_2, β_2; ... α_μ, β_μ die Parameter derjenigen Doppelpunkte, durch welche die Curve m^{ter} Ordnung *nicht* gelegt ist, so wird von den aus der zweiten Gleichung (III.) herrührenden Bedingungen jede illusorisch, für welche $h > \mu$, und es bleibt folgender Satz:

Wenn eine Curve m^{ter} Ordnung durch $\frac{n.n-3}{2}-\mu$ *Doppelpunkte der Curve n^{ter} Ordnung gelegt ist, und es sind* $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \ldots \alpha_\mu, \beta_\mu$ *die Argumente der übrigen Doppelpunkte, so sind die noch übrigen* $mn-n(n-3)+2\mu$ *Schnittpunkte beider Curven den folgenden* $\mu+1$ *Bedingungen unterworfen:*

$$(\text{IV.})\left\{\begin{array}{l} u_1+u_2+\cdots+u_k \equiv \alpha_1+\beta_1+\alpha_2+\beta_2+\cdots+\alpha_\mu+\beta_\mu, \quad (k=mn-n(n-3)+2\mu), \\ \prod_{i=1}^{i=k}\frac{H(\alpha_h-u_i)}{H(\beta_h-u_i)} \\ \equiv \left\{\prod_{i=1}^{i=\mu}\frac{H(\alpha_h-\alpha_i)H(\alpha_h-\beta_i)}{H(\beta_h-\alpha_i)H(\beta_h-\beta_i)}\right\}^{\frac{m}{n-3}} \cdot \left\{\prod_{i=\mu+1}^{i=\frac{n.n-3}{2}}\frac{H(\alpha_h-\alpha_i)H(\alpha_h-\beta_i)}{H(\beta_h-\alpha_i)H(\beta_h-\beta_i)}\right\}^{\frac{m-n+3}{n-3}}, \\ h=1,\ 2,\ \ldots\ \mu. \end{array}\right.$$

§. 10
Umkehrungsproblem.

Ich gehe jetzt zu der Aufgabe über, aus einer gegebenen Anzahl von Schnittpunkten die übrigen zu bestimmen. Ist $m > n-3$, so bestimmen sich immer $\frac{n-1.n-2}{2}$ durch die übrigen, sobald unter den gegebenen Punkten kein Doppelpunkt ist. Sind aber unter den gegebenen Punkten $\frac{n.n-3}{2}-\mu$ Doppelpunkte, so bestimmen diese eine doppelt so grosse Anzahl von Argumenten, und es bleiben nur noch $\mu+1$ Schnittpunkte zu bestimmen übrig, *so dass immer die Anzahl der aus den Gleichungen* (III.), (IV.) *bestimmten Schnittpunkte die Anzahl der nicht dem System zugehörigen Doppelpunkte um Eins übertrifft.* Denken wir uns also, um möglichste Allgemeinheit zu bewahren, das Schnittpunktsystem enthalte $\frac{n.n-3}{2}-\mu$ Doppelpunkte mit den Argumenten $\alpha_{\mu+1}, \beta_{\mu+1}; \alpha_{\mu+2}, \beta_{\mu+2}; \ldots$, und ausserdem noch $k-\mu-1 = mn-n(n-3)+\mu-1$ gegebene Punkte mit den Argumenten

$$u_{\mu+2}, \quad u_{\mu+3}, \quad \ldots \quad u_k.$$

Die Argumente $u_1, u_2, \ldots u_{\mu+1}$ der noch übrigen Schnittpunkte sind dann nach (IV.) aus folgenden Gleichungen gegeben, in welchen alles Gegebene in die rechten Theile geworfen ist:

$$
(\text{V.})\quad\begin{cases}
u_1+u_2+\cdots+u_{\mu+1} = v, \\[4pt]
\dfrac{H(\alpha_1-u_1)H(\alpha_1-u_2)\dots H(\alpha_1-u_{\mu+1})}{H(\beta_1-u_1)H(\beta_1-u_2)\dots H(\beta_1-u_{\mu+1})} = e^{v_1}, \\[8pt]
\dfrac{H(\alpha_2-u_1)H(\alpha_2-u_2)\dots H(\alpha_2-u_{\mu+1})}{H(\beta_2-u_1)H(\beta_2-u_2)\dots H(\beta_2-u_{\mu+1})} = e^{v_2}, \\[4pt]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[4pt]
\dfrac{H(\alpha_\mu-u_1)H(\alpha_\mu-u_2)\dots H(\alpha_\mu-u_{\mu+1})}{H(\beta_\mu-u_1)H(\beta_\mu-u_2)\dots H(\beta_\mu-u_{\mu+1})} = e^{v_\mu}.
\end{cases}
$$

Die Aufgabe, aus diesen Gleichungen die Grössen

$$z_1 = \sin^2\text{am}\, u_1,\quad z_2 = \sin^2\text{am}\, u_2,\quad \dots\quad z_{\mu+1} = \sin^2\text{am}\, u_{\mu+1}$$

mittels einer Gleichung $(\mu+1)^{\text{ten}}$ Grades zu finden, umfasst (abgesehen von den speciellen Werthen der rechten Theile) ein Umkehrungsproblem von allgemeinem analytischen Interesse, insofern es aus dem *Jacobi*schen Umkehrungsproblem für *Abel*sche Functionen hervorgeht, sobald die *Abel*schen Integrale durch Specialisirung ihrer Constanten in elliptische Integrale ausarten. Für $\mu = 1$ ist ein besonderer Fall des Problems, auf einem von dem hier zu verfolgenden abweichenden Wege, von Hrn. *Rosenhain* im ersten Capitel seiner Preisschrift über die vierfach periodischen Functionen gelöst worden.

Die Lösung des Umkehrungsproblems gelingt durch Anwendung des schon wiederholt benutzten *Hermite*schen Satzes. Man setze zunächst

$$u'_i = u_i - \frac{v}{\mu+1},\quad \alpha'_i = \alpha_i - \frac{v}{\mu+1},\quad \beta'_i = \beta_i - \frac{v}{\mu+1}$$

und drücke die u durch die u' aus. Dadurch ändern sich die Gleichungen (V.) nur insofern, als überall die gestrichnen Buchstaben an Stelle der früheren treten, und als die erste Gleichung übergeht in

$$u'_1+u'_2+\cdots+u'_{\mu+1} = 0.$$

Dieses aber ist die Bedingung, unter welcher der Ausdruck

$$\frac{H(\omega'-u'_1)H(\omega'-u'_2)\dots H(\omega'-u'_{\mu+1})}{(\Theta(\omega'))^{\mu+1}}$$

nach dem erwähnten Satze in die Form einer ganzen rationalen Function von $\sqrt{z'} = \sin\text{am}\,\omega'$ und von $\sqrt{1-z'.1-k^2z'}$ gebracht werden kann, deren Coefficienten dann nur noch von den u' abhängen. Diese Function $\Phi(z')$ nimmt, wenn μ ungerade ist, die Form an

$$\Phi(z') = F_{\frac{\mu+1}{2}}(z') + F_{\frac{\mu-3}{2}}(z').\sqrt{z'.1-z'.1-k^2z'},$$

wo die F ganze Functionen ihres Arguments sind, deren Ordnung durch ihren Index angezeigt ist. Wenn aber μ gerade ist, so hat man

$$\Phi(z') = F_{\frac{\mu}{2}}(z').\sqrt{z'}+F_{\frac{\mu-2}{2}}(z').\sqrt{1-z'.1-k^2z'};$$

in beiden Fällen enthält Φ noch $\mu+1$ unbestimmte Coefficienten.

Nach Einführung dieser Function $\Phi(z')$ nehmen nun die Gleichungen (V.) die Form an:

$$(34.)\quad \begin{cases} \Phi(\alpha_1') = \left(\dfrac{\Theta(\beta_1')}{\Theta(\alpha_1')}\right)^{\mu+1} e^{v_1}\Phi(\beta_1'), \\ \Phi(\alpha_2') = \left(\dfrac{\Theta(\beta_2')}{\Theta(\alpha_2')}\right)^{\mu+1} e^{v_2}\Phi(\beta_2'), \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \Phi(\alpha_\mu') = \left(\dfrac{\Theta(\beta_\mu')}{\Theta(\alpha_\mu')}\right)^{\mu+1} e^{v_\mu}\Phi(\beta_\mu'). \end{cases}$$

In diesen Gleichungen ist alles bekannt, bis auf die Coefficienten der Function Φ, und man kann daher die Verhältnisse derselben aus den Gleichungen (34.) auf lineare Weise bestimmen, wozu die Anzahl derselben gerade hinreicht.

So ist nun $\Phi(z')$ eine vollständig bekannte Function; wir wissen aber aus der ursprünglichen Entstehung derselben, dass sie für $\omega' = u_1', u_2', \dots u_{\mu+1}'$ verschwindet. Die $\mu+1$ Wurzeln der aus $\Phi=0$ durch Quadriren entstehenden rationalen Gleichung in z' müssen also sein

$$(35.)\quad z_1' = \sin^2\operatorname{am} u_1', \quad z_2' = \sin^2\operatorname{am} u_2', \quad \dots \quad z_{\mu+1}' = \sin^2\operatorname{am} u_{\mu+1}',$$

wozu die Gleichung $\Phi=0$ selbst dann den Werth von $\sqrt{z'.1-z'.1-k^2z'}$ liefert, und so die u vollständig bestimmt. Um die Gleichung $\Phi=0$ aufzustellen, deren Wurzeln die Grössen (35.) sind, hat man also nur aus (34.) mit Hinzufügung von $\Phi(z')=0$ die unbekannten Coefficienten zu eliminiren, und die resultirende Gleichung rational zu machen. Hat man so die z' und die Werthe von $\sqrt{z'.1-z'.1-k^2z'}$ gefunden, so liefert das Additionstheorem die Werthe der z und der Ausdrücke $\sqrt{z.1-z.1-k^2z}$ ohne Weiteres.

Aus dem Gesagten geht hervor, *dass man immer nur, und zwar mittels Auflösung einer Gleichung $\mu+1^{ten}$ Grades, ein einziges System oberer Grenzen angeben kann, welches die Gleichungen* (V.) *befriedigt.*

§. 11.

Andere Behandlung des Umkehrungsproblems.

Ich werde jetzt einige Formeln entwickeln, welche eine andere Behandlungsweise des Problems gestatten. Zu diesen führt eine genauere Unter-

31 *

suchung der aus den Gleichungen (34.) und aus $\Phi(s')=0$ entspringenden Resultante, welche, gleich Null gesetzt, $s'_1, s'_2, \dots s'_{\mu+1}$ liefert. Dieselbe ist offenbar in Bezug auf die Grössen $\left(\frac{\Theta(\beta'_i)}{\Theta(\alpha'_i)}\right)^{\mu+1} e^{v_i}$ linear; und sie entsteht also aus der symbolischen Gleichung

$$(36.)\quad \begin{cases}(\alpha'_1\Theta(\alpha'_1)^{\mu+1}-\beta'_1\Theta(\beta'_1)^{\mu+1}e^{v_1})(\alpha'_2\Theta(\alpha'_2)^{\mu+1}-\beta'_2\Theta(\beta'_2)^{\mu+1}e^{v_2})\dots \\ \qquad\qquad (\alpha'_\mu\Theta(\alpha'_\mu)^{\mu+1}-\beta'_\mu\Theta(\beta'_\mu)^{\mu+1}e^{v_\mu}) = 0.\end{cases}$$

wenn man an Stelle der Producte der α, β passende Ausdrücke treten lässt. Diese Ausdrücke sind alle gleich gebildet, und es entspringen alle aus dem ersten, indem an Stelle der α successive mehrere der entsprechenden β gesetzt werden. Bezeichnen wir demnach die Coefficienten von 1, $-e^{v_1}$, $-e^{v_2}$, $e^{v_1+v_2}$ ... durch

$(\omega',\alpha'_1,\alpha'_2\dots\alpha'_\mu)$, $(\omega',\beta'_1,\alpha'_2\dots\alpha'_\mu)$, $(\omega',\alpha'_1,\beta'_2\dots\alpha'_\mu)$, $(\omega',\beta'_1,\beta'_2\dots\alpha'_\mu)$, u. s. w.,

so ist der erste derselben, der allein betrachtet zu werden braucht, die Resultante aus

$$\Phi(\omega')=0,\quad \Phi(\alpha'_1)=0,\quad \Phi(\alpha'_2)=0,\quad \Phi(\alpha'_\mu)=0,$$

also eine alternirende Function der $\mu+1$ Argumente.

Nach dem *Hermite*schen Satz aber kann diese Resultante ersetzt werden durch

$$C\cdot\frac{H(\omega'-\alpha'_1)H(\omega'-\alpha'_2)\dots H(\omega'-\alpha'_\mu).H(\omega'+\alpha'_1+\alpha'_2+\dots+\alpha'_\mu)}{\Theta^{\mu+1}(\omega')},$$

wo C von ω' nicht mehr abhängt. Da nun durch Vertauschung von ω' mit einem der α' die Function nur ihr Zeichen wechselt, so kann man setzen

$$(37.)\quad (\omega',\alpha'_1,\alpha'_2\dots\alpha'_\mu) = \frac{H(\omega'+\alpha'_1+\alpha'_2+\dots+\alpha'_\mu).\varDelta(\omega',\alpha'_1,\alpha'_2,\dots\alpha'_\mu)}{\{\Theta(\omega')\Theta(\alpha'_1)\Theta(\alpha'_2)\dots\Theta(\alpha'_\mu)\}^{\mu+1}},$$

wobei $\varDelta$ das Product der H aller Differenzen der Argumente bedeutet, die Differenzen so gebildet, dass immer ein folgendes Argument von einem vorangehenden abgezogen wird.

Ersetzen wir in diesen Ausdrücken die ω', α' ... wieder durch die $\omega-\frac{v}{\mu+1}$, $\alpha-\frac{v}{\mu+1}$, ..., so kann man an Stelle von (36.) die symbolische Gleichung

$$(38.)\quad \Omega(\omega) = \prod_{i=1}^{i=\mu}(\alpha_i-e^{v_i}\beta_i)=0$$

treten lassen, und muss dann die Producte der α, β ersetzen durch Ausdrücke von der Form

$$(39.)\quad [\omega, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\mu] = H(\omega+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\mu-v).\Delta(\omega, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\mu).$$

Dabei ist nur im Nenner der Factor $\Theta\left(\omega-\frac{v}{\mu+1}\right)^{\mu-1}$ entfernt, welcher allen Ausdrücken gemeinschaftlich ist, und die übrigen Factoren des Nenners sind gegen die in dem früheren symbolischen Producte auftretenden Potenzen der Θ aufgehoben.

Da nun, abermals nach dem *Hermite*schen Satz,

$$\frac{\Omega(\omega)}{\Theta(\omega')^{\mu+1}} = K.\frac{H(\omega'-u'_1)H(\omega'-u'_2)\dots H(\omega'-u'_{\mu+1})}{\Theta(\omega')^{\mu+1}},$$

so hat man auch

$$\Omega(\omega) = K.H(\omega-u_1).H(\omega-u_2)\dots H(\omega-u_{\mu+1}),$$

und dabei ist K von ω unabhängig. Um zunächst diese Grösse fortzuschaffen, dividire ich diese Gleichung durch diejenige, welche durch Vertauschung von ω mit einer beliebigen andern Grösse ω_0 entsteht, und erhalte:

$$(40.)\quad \frac{\Omega(\omega)}{\Omega(\omega_0)} = \frac{H(\omega-u_1)H(\omega-u_2)\dots H(\omega-u_{\mu+1})}{H(\omega_0-u_1)H(\omega_0-u_2)\dots H(\omega_0-u_{\mu+1})}.$$

Aus dieser Formel entspringt eine Reihe von bemerkenswerthen Gleichungen. Ersetzt man zunächst ω und ω_0 durch die Werthe 0, K, iK', $K+iK'_1$ so erhält man:

$$(41.)\quad \begin{cases} \sqrt{s_1.s_2\dots s_{\mu+1}} = \prod_{i=1}^{i=\mu+1} \sin\mathrm{am}\, u_i \\ \qquad = \dfrac{1}{(\sqrt{-1}.\sqrt{k}.\sqrt[4]{q})^{\mu+1}}.e^{\frac{i\pi v}{2K}}.\dfrac{\Omega(o)}{\Omega(iK')}, \\ \sqrt{1-s_1.1-s_2\dots 1-s_{\mu+1}} = \prod_{i=1}^{i=\mu+1} \cos\mathrm{am}\, u_i \\ \qquad = \left(\dfrac{\sqrt{-1}.\sqrt{k'}}{\sqrt{k}.\sqrt[4]{q}}\right)^{\mu+1}.e^{\frac{i\pi v}{2K}}.\dfrac{\Omega(K)}{\Omega(iK')}, \\ \sqrt{1-k^2s_1.1-k^2s_2\dots 1-k^2s_{\mu+1}} = \prod_{i=1}^{i=\mu+1} \Delta\mathrm{am}\, u_i \\ \qquad = (\sqrt{-1}.\sqrt{k'})^{\mu+1}.e^{\frac{i\pi v}{2K}}.\dfrac{\Omega(K+iK')}{\Omega(iK')}. \end{cases}$$

Lassen wir ferner in (40.) ω in $-\omega$, ω_0 in $-\omega_0$ übergehen, und be-

merken, dass

$$\frac{H(\omega-u)H(\omega+u)}{H(\omega_0-u)H(\omega_0+u)} = \frac{\Theta^2(\omega)}{\Theta^2(\omega_0)}\cdot\frac{\sin^2\operatorname{am}\omega-\sin^2\operatorname{am}u}{\sin^2\operatorname{am}\omega_0-\sin^2\operatorname{am}u},$$

so finden wir:

$$(42.)\qquad \frac{z-z_1.z-z_2\ldots z-z_{\mu+1}}{z_0-z_1.z_0-z_2\ldots z_0-z_{\mu+1}} = \frac{\Omega(\omega).\Omega(-\omega)}{\Omega(\omega_0).\Omega(-\omega_0)}\cdot\left(\frac{\Theta(\omega_0)}{\Theta(\omega)}\right)^{2\mu+2}.$$

wo

$$z=\sin^2\operatorname{am}\omega,\quad z_0=\sin^2\operatorname{am}\omega_0.$$

Wenn wir in dieser Formel für z, z_0 eine Reihe specieller Werthe setzen, so erhalten wir lineare Gleichungen zur Bestimmung der symmetrischen Functionen von $z_1, z_2, \ldots z_{\mu+1}$, und wir sind auf diese Weise im Stande, direct eine Gleichung aufzustellen, deren Wurzeln die Grössen z sind; eine neue Art, das oben ausgeführte Umkehrungsproblem zu behandeln.

Die Gleichung (42.) liefert eine einfachere Form der rechten Seite, sobald man für z, z_0 ein Parameterpaar a, b eines der μ Doppelpunkte, und also für ω, ω_0 ein Paar der Reihe $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \ldots \alpha_\mu, \beta_\mu$ wählt. Alsdann ist wegen (40.) $\frac{\Omega(\alpha_i)}{\Omega(\beta_i)}=e^{v_i}$, und man hat demnach μ Gleichungen der folgenden Art:

$$(43.)\qquad \frac{a_i-z_1.a_i-z_2\ldots a_i-z_{\mu+1}}{b_i-z_1.b_i-z_2\ldots b_i-z_{\mu+1}} = e^{v_i}.\frac{\Omega(-\alpha_i)}{\Omega(-\beta_i)}\cdot\left(\frac{\Theta(\beta_i)}{\Theta(\alpha_i)}\right)^{2\mu+2}.$$

Die angeführten Formeln des Hrn. *Rosenhain* gehen aus den hier gegebenen hervor, wenn man $\mu=1$ und $\beta=-\alpha$ setzt, durch welchen letztern Umstand einige specielle Vereinfachungen eintreten.

§. 12.

Periodicität.

In dem soeben betrachteten Umkehrungsproblem sind die Grössen $z_1, z_2, \ldots z_{\mu+1}$ oder ihre symmetrischen Functionen periodische Functionen von $v, v_1, v_2, \ldots v_\mu$, und zwar $(\mu+2)$fach periodische. Die eine Classe der Perioden umfasst μ derselben, und rührt von den Exponentialgrössen e^{v_i} her. Die z bleiben unverändert, wenn man irgend eine der v_i um $2h_i\pi\sqrt{-1}$ vermehrt. Dagegen rühren die andern beiden Perioden von den elliptischen Integralen her. Vermehrt man v um $2nK+2niK'$, so können dabei sämmtliche z ungeändert bleiben, vorausgesetzt nur, dass man gleichzeitig die v_i gehörig

ändert. Geht nämlich u_k in $u_k + 2mK + 2niK'$ über, so verwandelt sich $\frac{H(\alpha_i - u_k)}{H(\beta_i - u_k)}$ in

$$e^{\frac{n\pi\sqrt{-1}}{K}(\alpha_i - \beta_i)} \frac{H(\alpha_i - u_k)}{H(\beta_i - u_k)}.$$

Erhalten also alle u ähnliche Zuwächse, und bedeutet jetzt m die Summe aller m, n die Summe aller n, so geht v_i in $v_i + \frac{n\pi\sqrt{-1}}{K}(\alpha_i - \beta_i)$ über. Gehört also ein gewisses System

$$z_1, \quad z_2, \quad \dots \quad z_{\mu+1},$$

zu den Variabeln

$$v, \quad v_1, \quad \dots \quad v_\mu,$$

so ist das allgemeinste System von Variabeln, welchem dieselben Grössen z angehören, folgendes:

$$(44.) \quad \begin{cases} v' = v + 2mK + 2niK', \\ v_1' = v_1 + 2h_1 i\pi + \frac{ni\pi}{K}(\alpha_1 - \beta_1), \\ v_2' = v_2 + 2h_2 i\pi + \frac{ni\pi}{K}(\alpha_2 - \beta_2), \\ \dots\dots\dots\dots \\ v_\mu' = v_\mu + 2h_\mu i\pi + \frac{ni\pi}{K}(\alpha_\mu - \beta_\mu), \end{cases}$$

wobei die m, n, h von einander unabhängige, willkürliche ganze Zahlen bedeuten.

§. 13.

Ein specieller Fall des Umkehrungsproblems.

Es soll jetzt die Frage untersucht werden, welche Bedingung zwischen den Grössen v, v_1, ... v_μ eintreten muss, damit dieselbe gleich ähnlichen Ausdrücken wie (V.) werden, nur mit einer Unbekannten u weniger; damit also Gleichungen folgender Art bestehen:

$$(45.) \quad \begin{cases} u_1 + u_2 + \dots + u_\mu = v, \\ \frac{H(\alpha_1 - u_1)H(\alpha_1 - u_2)\dots H(\alpha_1 - u_\mu)}{H(\beta_1 - u_1)H(\beta_1 - u_2)\dots H(\beta_1 - u_\mu)} = e^{v_1}, \\ \frac{H(\alpha_2 - u_1)H(\alpha_2 - u_2)\dots H(\alpha_2 - u_\mu)}{H(\beta_2 - u_1)H(\beta_2 - u_2)\dots H(\beta_2 - u_\mu)} = e^{v_2}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{H(\alpha_\mu - u_1)H(\alpha_\mu - u_2)\dots H(\alpha_\mu - u_\mu)}{H(\beta_\mu - u_1)H(\beta_\mu - u_2)\dots H(\beta_\mu - u_\mu)} = e^{v_\mu}. \end{cases}$$

Dieser Fall lässt sich ganz nach Art des oben gelösten Umkehrungsproblemes behandeln; ja man kann die oben entwickelten Formeln hier wiederum benutzen. Man hat nur die Function Φ hier durch eine andere zu ersetzen, welche nur für μ Werthe verschwindet, und sodann aus einem System von Gleichungen wie (34.) zu eliminiren.

Setzt man also

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\mu] = H(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\mu-v).\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\mu),$$

und bildet man eine Reihe ähnlicher Ausdrücke, indem man an Stelle der α allmälig die β einführt; ersetzt man endlich diese Ausdrücke symbolisch durch die Producte der α und β, so ist die gesuchte Eliminationsgleichung in der symbolischen Formel enthalten:

$$(46.)\qquad (\alpha_1-e^{v_1}\beta_1)(\alpha_2-e^{v_2}\beta_2)\ \dots\ (\alpha_\mu-e^{v_\mu}\beta_\mu) = 0.$$

Ich werde jetzt einen besonderen Fall untersuchen, in welchem diese Gleichung erfüllt sein kann. In diesem Falle ist

$$(47.)\qquad \begin{cases} v = \frac{1}{2}\sum_1^\mu(\alpha_h+\beta_h)+pK+qiK', \\ e^{v_i} = (-1)^{h_i}\sqrt{\prod_{k=1}^{k=\mu}\frac{H(\alpha_h-\alpha_k)H(\alpha_h-\beta_k)}{H(\beta_h-\alpha_k)H(\beta_h-\beta_k)}}\,e^{\frac{q\pi i(\alpha_i-\beta_i)}{2K}}. \end{cases}$$

Die Quadratwurzeln sollen so genommen werden, dass, wenn

$$(48.)\qquad e^{v_1+v_2+\dots+v_\mu} = (-1)^{h_1+h_2+\dots+h_\mu}.M.e^{\frac{q\pi\sqrt{-1}}{2K}((\alpha_1-\beta_1)+(\alpha_2-\beta_2)\dots)}$$

gesetzt wird,

$$(49.)\qquad M = \frac{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\mu)}{\Delta(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_\mu)},$$

was durch passende Wahl eines einzigen Vorzeichens ermöglicht wird.

Die geometrische Bedeutung dieses Falles wird sofort deutlich, wenn man die Werthe von v und e^{v_i} in die Gleichungen (45.) einführt, und sodann die erste Gleichung mit 2 multiplicirt, die andern quadrirt. Mit Hinweglassung von Vielfachen der Perioden erhält man dann:

$$2(u_1+u_2+\dots+u_\mu) \equiv 0$$

$$\left\{\prod_{i=1}^{i=\mu}\frac{H(\alpha_h-u_i)}{H(\beta_h-u_i)}\right\}^2 \equiv \prod_{k=1}^{k=\mu}\frac{H(\alpha_h-\alpha_k)H(\alpha_h-\beta_k)}{H(\beta_h-\alpha_k)H(\beta_h-\beta_k)},$$

$$h = 1,\ 2,\ \dots\ \mu.$$

Dies sind die Gleichungen (IV.) für $m=n-3$, wenn man die Argumente paar-

weise zusammenfallen lässt, und sie stellen also die Bedingungen dar für die Argumente einer Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch $\frac{n.n-3}{2}-\mu$ Doppelpunkte geht, und die Curve vierter Ordnung noch in μ verschiedenen Punkten berührt. Es zeigt sich, dass solche Curven möglich sind, dass aber zwischen den ganzen Zahlen p, q, $h_1, \dots h_\mu$ eine Bedingung stattfindet.

Betrachten wir das Aggregat zweier Terme von (46.) deren einer etwa in $e^{v_1+v_2+\dots+v_r}$ multiplicirt ist, während der andere durch den Factor $e^{v_{r+1}+v_{r+2}+\dots+v_\mu}$ characterisirt wird. Dieses Aggregat ist, wenn V die Summe $v_1, v_2, \dots v_\mu$ bezeichnet:

$$([\beta_1,\beta_2,\dots\beta_r,\alpha_{r+1},\dots\alpha_\mu]e^{v_1+v_2+\dots+v_r}+(-1)^\mu[\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_r,\beta_{r+1},\dots\beta_\mu]e^{V-v_1-v_2-\dots-v_r}).$$

Ich dividire durch

$$[\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_r,\beta_{r+1},\dots\beta_\mu]e^{-v_1-v_2-\dots-v_r}$$

und betrachte den Ausdruck:

$$(50.)\qquad \pm\left(\frac{[\beta_1,\beta_2,\dots\beta_r,\alpha_{r+1},\dots\alpha_\mu]}{[\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_r,\beta_{r+1},\dots\beta_\mu]}\cdot e^{2(v_1+v_2+\dots+v_r)}+(-1)^\mu e^V\right).$$

Nach der Definition der eingeklammerten Ausdrücke hat man nun für das erste Glied der Klammer:

$$\frac{H(\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_r+\alpha_{r+1}+\dots+\alpha_\mu-v)}{H(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_r+\beta_{r+1}+\dots+\beta_\mu-v)}\cdot\frac{\Delta(\beta_1,\beta_2,\dots\beta_r,\alpha_{r+1},\dots\alpha_\mu)}{\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_r,\beta_{r+1},\dots\beta_\mu)}$$

$$\cdot\prod_{h=1}^{h=r}\prod_{i=1}^{i=\mu}\frac{H(\alpha_h-\alpha_i)H(\alpha_h-\beta_i)}{H(\beta_h-\alpha_i)H(\beta_h-\beta_i)}\cdot\varrho,$$

wo

$$\varrho = e^{\frac{q\pi\sqrt{-1}}{K}((\alpha_1-\beta_1)+(\alpha_2-\beta_2)+\dots+(\alpha_r-\beta_r))}$$

Ist nun

$$\sigma = \beta_1+\beta_2+\dots+\beta_r+\alpha_{r+1}+\dots+\alpha_\mu-\tfrac{1}{2}\sum_1^\mu(\alpha_h+\beta_h)$$

so ist auch

$$-\sigma = \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_r+\beta_{r+1}+\dots+\beta_\mu-\tfrac{1}{2}\sum_1^\mu(\alpha_h+\beta_h).$$

Bezeichnet ferner immer i, i' einen der Indices $1, 2, \dots r$, k, k' einen der Indices $r+1, r+2, \dots \frac{n.n-3}{2}$, und sind die Π fortan Zeichen von Differenzproducten, so kann man statt obigen Ausdrucks folgenden setzen:

$$-\varrho\frac{H(\sigma-pK-qiK')}{H(\sigma+pK+qiK')}\;\frac{\mathring{\Pi}H(\beta_i-\beta_{i'}).\Pi H(\beta_i-\alpha_k).\mathring{\Pi}H(\alpha_k-\alpha_{k'})}{\mathring{\Pi}H(\alpha_i-\alpha_{i'}).\Pi H(\alpha_i-\beta_k).\mathring{\Pi}H(\beta_k-\beta_{k'})}$$

$$\cdot\frac{\{\mathring{\Pi}H(\alpha_i-\alpha_{i'})\}^2\Pi H(\alpha_i-\alpha_k)\mathring{\Pi}H(\alpha_i-\beta_{i'})\Pi H(\alpha_i-\beta_k)}{\{\mathring{\Pi}H(\beta_i-\beta_{i'})\}^2\Pi H(\beta_i-\beta_k)\mathring{\Pi}H(\beta_i-\alpha_{i'})\Pi H(\beta_i-\alpha_k)} = -\varrho\cdot\frac{H(\sigma-pK-qiK')}{H(\sigma+pK+qiK')}\cdot M.$$

Führt man dies und den Werth von e ein, so enthält der Ausdruck (50.) den Factor

$$-\varrho\frac{H(\sigma-pK-qiK')}{H(\sigma+pK+qiK')}+(-1)^{h_1+h_2+\cdots+h_\mu+\mu}.e^{\frac{q\pi\sqrt{-1}}{2K}(\alpha_1-\beta_1+\alpha_2-\beta_2+\cdots+\alpha_\mu-\beta_\mu)}$$

und er verschwindet also, wenn dieser Factor verschwindet; ja die ganze Gleichung (46.) ist erfüllt, wenn alle Factoren dieser Art gleichzeitig zum Verschwinden gebracht werden können. Dies hängt von den Zahlen p, q ab; man hat

$$\frac{H(\sigma-pK-qiK')}{H(\sigma+pK+qiK')}=(-1)^p\frac{H(\sigma+pK-qiK')}{H(\sigma+pK+qiK')}=(-1)^{q+p}e^{\frac{\pi q(\sigma+pK)\sqrt{-1}}{K}}$$

Wenn man nun diesen Werth in den obigen Ausdruck einführt, und die Werthe von ϱ, σ substituirt, so bleibt nur die Gleichung übrig:

$$(-1)^{(q+1)(p+1)+h_1+h_2+\cdots+h_\mu} = (-1)^{\mu+1},$$

und man hat den Satz:

Die Gleichungen:

$$u_1+u_2+\cdots+u_\mu = pK+qiK'+\tfrac{1}{2}\sum_1^\mu(\alpha_h+\beta_h),$$

$$\frac{H(\alpha_k-u_1)H(\alpha_k-u_2)\dots H(\alpha_k-u_\mu)}{H(\beta_k-u_1)H(\beta_k-u_2)\dots H(\beta_k-u_\mu)} = (-1)^{h_k}e^{\frac{q\pi i(\alpha_k-\beta_k)}{2K}}\cdot\sqrt{\prod_{i=1}^{i=\mu}\frac{H(\alpha_k-\alpha_i)H(\alpha_k-\beta_i)}{H(\beta_k-\alpha_i)H(\beta_k-\beta_i)}},$$

$$k = 1,\; 2,\; \dots\; \mu,$$

in denen p, q, h_k ganze Zahlen bedeuten, und wo die Vorzeichen der Quadratwurzeln so zu wählen sind, dass das Product aller gleich

$$\frac{\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_\mu)}{\Delta(\beta_1,\beta_2,\dots\beta_\mu)}$$

ist, können immer zusammen bestehen, sobald

$$(51.)\qquad (q+1)(p+1)+h_1+h_2+\cdots+h_\mu \equiv \mu+1 \pmod{2}.$$

Die zu den u gehörigen z zu finden, wenn die Gleichungen (45.) zusammen

bestehen können, hat keine Schwierigkeit: man lässt eine der Gleichungen aus, und hat das früher behandelte Problem vor sich.

§. 14.
Einfluss von Rückkehrpunkten.

Wenn von den $\frac{n.n-3}{2}$ Doppelpunkten der vorliegenden Curve n^{ter} Ordnung einige in Rückkehrpunkte übergehen, so treten in den Betrachtungen der vorigen Paragraphen nur wenige Modificationen ein. Für einen solchen Punkt wird dann $\beta=\alpha+\varepsilon$, und ε convergirt gegen Null. In dem *Abel*schen Theorem (II. oder III.) tritt daher an Stelle des Quotienten $H(\alpha_i-u):H(\beta_i-u)$ der Ausdruck

$$\frac{H(\alpha_i-u)}{H(\alpha_i+\varepsilon-u)}=1-\varepsilon\frac{H'(\alpha_i-u)}{H(\alpha_i-u)},$$

und die betreffende Gleichung des *Abel*schen Theorems wird

$$\frac{H'(\alpha_i-u_1)}{H(\alpha_i-u_1)}+\frac{H'(\alpha_i-u_2)}{H(\alpha_i-u_2)}+\cdots+\frac{H'(\alpha_i-u_{mn})}{H(\alpha_i-u_{mn})}=\text{Const.},$$

wo der Werth der Constante aus dem der früheren Constante durch einen Grenzübergang leicht zu ermitteln ist. Aber auch in dem Umkehrungsproblem (V.) tritt an Stelle der betreffenden Gleichung eine andre; man muss

$$v_i=-\varepsilon\zeta_i$$

setzen, und erhält:

$$\frac{H'(\alpha_i-u_1)}{H(\alpha_i-u_1)}+\frac{H'(\alpha_i-u_2)}{H(\alpha_i-u_2)}+\cdots+\frac{H'(\alpha_i-u_{\mu+1})}{H(\alpha_i-u_{\mu+1})}=\zeta_i.$$

Das Resultat des Umkehrungsproblems ist aus dem früheren noch immer durch einen Grenzübergang leicht abzuleiten; aber es ist wichtig, *dass durch das Eintreten dieses Rückkehrpunktes die eine Periode ausfällt,* nämlich diejenige, welche von der Exponentialgrösse e^{v_i} herrührte. Bei $\varkappa$ Rückkehrpunkten ist die Anzahl der Perioden also nur noch $\frac{n.n-3}{2}+2-\varkappa$; und wenn eine Anzahl von Doppelpunkten bei dem Umkehrungsproblem ausgeschlossen wird, so dass nur noch μ übrig bleiben, unter denen sich $\varkappa'$ Rückkehrpunkte befinden, so reducirt jene Zahl sich auf $\mu+2-\varkappa'$.

Eine obere Grenze für die Anzahl von Doppelpunkten, welche in Rückkehrpunkte übergehen können, liefert die Zahl der Wendepunkte der Curve, welche $3n-2\varkappa$ ist. Die Anzahl der Rückkehrpunkte kann also $\frac{3n}{2}$ nicht überschreiten.

§ 15.

[illegible]

[illegible] mich jetzt wende, [illegible] auftretenden Grössen

$$\frac{H(\alpha_i - \alpha_k)}{H(\beta_i - \alpha_k)}$$

[illegible] dieser Grössen nur um [illegible]. Ich setze

$$\text{[illegible]} = \text{[illegible]} \log \prod_{i=1}^{i=\frac{n.n-3}{2}} \frac{H(\alpha_i - \alpha_k)\,H(\alpha_i - \beta_k)}{H(\beta_i - \alpha_k)\,H(\beta_i - \beta_k)}.$$

[illegible] II. oder III.) gehen dann in die [illegible] über

$$\text{[illegible]} \equiv 0 = 2pK + 2qiK',$$

$$\text{[illegible]} \equiv 0 = 2h_1 i\pi + q\frac{i\pi}{K}(\alpha_1 - \beta_1),$$

. . . .

$$\text{[illegible]} \equiv 0 = 2h_{\frac{n.n-3}{2}} i\pi + q\frac{i\pi}{K}\left(\alpha_{\frac{n.n-3}{2}} - \beta_{\frac{n.n-3}{2}}\right).$$

[illegible] Curve n^{ter} Ordnung durch $\frac{n.n-3}{2} - \mu$ Doppelpunkte [illegible] $1, 2, \ldots \mu$ sich auf die übrigen Doppelpunkte beziehen:

$$\text{[illegible]} = 2pK + 2qiK' + \sum_1^{\mu}(\alpha_h + \beta_h),$$

$$\text{[illegible]} = 2h_1 i\pi + \frac{qi\pi}{K}(\alpha_1 - \beta_1) \text{ [illegible]} - \frac{2\mu}{n.n-3} \sum_{i=1}^{i=\frac{n.n-3}{2}} \log \frac{H(\alpha_1 - \alpha_i)\,H(\alpha_1 - \beta_i)}{H(\beta_1 - \alpha_i)\,H(\beta_1 - \beta_i)},$$

. . . .

$$\text{[illegible]} = 2h_\mu i\pi + \frac{qi\pi}{K}(\alpha_\mu - \beta_\mu) \text{ [illegible]} - \frac{2\mu}{n.n-3} \sum_{i=1}^{i=\frac{n.n-3}{2}} \log \frac{H(\alpha_\mu - \alpha_i)\,H(\alpha_\mu - \beta_i)}{H(\beta_\mu - \alpha_i)\,H(\beta_\mu - \beta_i)},$$

$$(\lambda = n(m - n + 3) + 2\mu),$$

[illegible] Glied auszuschliessen ist, bei welchem [illegible] H-Functionen verschwinden würde.

Man kann von diesen Gleichungen ausgehend, alle diejenigen Probleme behandeln, welche ich in meinem Aufsatz über die Anwendung der *Abel*schen Functionen in der Geometrie, Band 63, pag. 189 dieses Journals für Curven ohne Doppelpunkte, und welche ich in diesem Bande, pag. 43 für Curven mit $\frac{n-1.n-2}{2}$ Doppelpunkten gelöst habe. Ich werde mich, da die Methode ganz dieselbe bleibt, begnügen, für den vorliegenden Fall die folgenden Sätze anzuführen.

I. *Ist* $m \geqq n-2$, *und sind auf der Curve* n^{ter} *Ordnung ausser* $\frac{n.n-3}{2}-\mu$ *Doppelpunkten, noch*

$$mn-n(n-3)+2\mu-r(\mu+1)$$

Punkte gegeben, durch welche sämmtlich eine Curve m^{ter} *Ordnung gehen soll, während von den übrig bleibenden* μ *Doppelpunkten* $\varkappa'$ *in Rückkehrpunkte übergehen, so kann man diese noch auf* $r^{\mu+2-\varkappa'}$ *verschiedene Arten so legen, dass dieselbe mit der Curve* n^{ter} *Ordnung in* $\mu+1$ *verschiedenen Punkten eine* r *punktige Berührung hat.*

Legt man eine Curve m^{ter} *Ordnung durch die festen Punkte so wie durch jene* $\frac{n.n-3}{2}-\mu$ *Doppelpunkte, und lässt sie zugleich durch die Berührungspunkte von* $r-1$ *Curven gehen, welche aus obigem Problem entspringen, so schneidet sie die Curve* n^{ter} *Ordnung noch immer in den Berührungspunkten einer* r^{ten} *Curve derselben Art.*

II. *Nimmt man* νr *Punkte weniger als gegeben an, verlangt aber, dass die Curve* m^{ter} *Ordnung in* $\mu+\nu+1$ *Punkten* r*-punktig berühre, so giebt es* $r^{\mu+2-\varkappa'}$ *Systeme von Curven* m^{ter} *Ordnung, welche der Forderung entsprechen.*

Der vorige Satz über die Lage der Berührungspunkte besteht fort; insbesondere aber liegen die Berührungspunkte von r *Curven desselben Systems mit den festen Punkten und den* $\frac{n.n-3}{2}-\mu$ *Doppelpunkten stets in einer Curve* m^{ter} *Ordnung.*

III. *Ist insbesondere*

$$mn-n(n-3)+2\mu-r(\mu+\nu+1) = 0,$$

so dass gar keine festen Punkte auf der Curve gegeben sind, so ist die Zahl der Systeme, wenn m, r *relative Primzahlen, gleich* $r^{\mu+2-\varkappa'}$; *wenn aber*

$$m = m's, \quad r = r's,$$

wo $s > 1$ und m', r' relative Primzahlen sind, so ist die Zahl der Systeme nur $r^{\mu+2-\varkappa'} - r'^{\mu+2-\varkappa'}$.

Die Sätze über die Lage der Berührungspunkte bestehen fort.

Diese Sätze sind einfache Folgerungen aus den Gleichungen (53.), und man erhält sie aus den entsprechenden Sätzen der angeführten Abhandlung, wenn man die dort eintretende Periodenzahl $2p$ durch die hier eintretende $\mu+2-\varkappa'$ ersetzt.

Nur ein Umstand ist es, welcher den hier erhaltenen Lösungen einen besondern Charakter giebt. Die Perioden sind nämlich hier nicht gleichartig, indem die Perioden $2K$ und $2iK'$ schon ihrer Entstehung nach sich wesentlich von den verschiedenen Perioden $2i\pi$ unterscheiden. Die Folge hievon ist, *dass die Lösungen resp. Systeme, deren Anzahl im Allgemeinen immer $r^{\mu+2-\varkappa'}$ war, sich von vorn herein in r^2 Gruppen theilen, deren Glieder durch gemeinschaftliche Werthe von p, q verbunden sind.* Auch vertheilt sich die Erniedrigung, welche die Zahl $r^{\mu+2-\varkappa'}$ bei III. erfährt, wenn m, r nicht relative Primzahlen sind, auf diese Gruppen keineswegs gleichmässig, vielmehr gilt dabei, wie man sofort sieht, folgender Satz:

Die Systeme III. *theilen sich in r^2 Gruppen, von denen die $r^2 - r'^2$ Gruppen, für welche p, q nicht gleichzeitig durch s theilbar sind, je $r^{\mu-\varkappa'}$ Systeme enthalten, während in den r'^2 übrigen Gruppen nur je $r^{\mu-\varkappa'} - r'^{\mu-\varkappa'}$ wirkliche Systeme vorkommen.*

Die geometrische Bedeutung dieser Gruppirung kann man dadurch ausdrücken, *dass, wenn man eine Curve m^{ter} Ordnung durch die $\frac{n.n-3}{2} - \mu$ Doppelpunkte, durch die festen Punkte, und durch die Berührungspunkte von $r-1$ Curven derselben Gruppe legt, diese noch in den Berührungspunkten einer r^{ten} Curve derselben Gruppe schneidet.*

§. 16.

Berührungscurven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Das Problem der Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung, und die Erweiterung, welche ich demselben a. a. O. für Curven n^{ter} Ordnung gegeben habe, führt hier auf die im §. 13 behandelte analytische Aufgabe. Man setzt $m = n-3$, und sucht diejenigen Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch $\frac{n.n-3}{2} - \mu$ Doppelpunkte gehen, und ausserdem noch die Curve n^{ter} Ordnung berühren, wo sie derselben begegnen, d. h. in μ Punkten. Man lässt also

die u paarweise zusammenfallen, und findet aus (53*.) nach Division mit 2:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_\mu \equiv pK + qiK' + \tfrac{1}{2}\sum_1^\mu (\alpha_h + \beta_h),$$

$$u_1' + u_2' + \cdots + u_\mu' \equiv h_1 i\pi + \frac{qi\pi}{2K}(\alpha_1 - \beta_1) + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\mu} \log \frac{H(\alpha_1 - \alpha_k)H(\alpha_1 - \beta_k)}{H(\beta_1 - \alpha_k)H(\beta_1 - \beta_k)},$$

. . . .

$$u_1^{(\mu)} + u_2^{(\mu)} + \cdots + u_\mu^{(\mu)} \equiv h_\mu i\pi + \frac{qi\pi}{2K}(\alpha_\mu - \beta_\mu) + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\mu} \log \frac{H(\alpha_\mu - \alpha_k)H(\alpha_\mu - \beta_k)}{H(\beta_\mu - \alpha_k)H(\beta_\mu - \beta_k)}.$$

Dies sind in der That die Gleichungen welche in §. 13 zu Grunde gelegt wurden. Nun zeigte sich dort, dass die Erfüllbarkeit dieser Gleichungen an die Bedingung geknüpft war:

$$(q+1)(p+1) + h_1 + h_2 + \cdots + h_\mu \equiv \mu + 1 \quad (\text{mod. } 2).$$

Von den Grössen q, p, h, welche sämmtlich die Werthe 0 und 1 annehmen können, ist also *eine* durch die übrigen bestimmt, und die Anzahl der Lösungen wird also $2^{\mu+1}$. Sind aber unter den ausgeschlossenen Doppelpunkten noch $\varkappa'$ Rückkehrpunkte vorhanden, so sind in den obigen Gleichungen ebensoviele Grössen h auszulassen, und die Zahl der Lösungen beträgt nur $2^{\mu+1-\varkappa'}$.

Hieraus, und aus Betrachtungen, wie sie am Schlusse von §. 8 der angeführten Abhandlung angestellt sind, ergiebt sich folgender Satz:

IV. *Es giebt für eine Curve n^{ter} Ordnung mit $\frac{n.n-3}{2}$ Doppel- resp. Rückkehrpunkten $2^{\mu+1-\varkappa'}$ Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung, welche durch $\frac{n.n-3}{2}-\mu$ dieser Doppelpunkte, von denen $\varkappa'$ in Rückkehrpunkte übergehen, hindurchgehen, und zugleich die Curve noch in μ Punkten berühren.*

Insbesondere, wenn $\mu = \frac{n.n-3}{2}$, und also die Curve $(n-3)^{ter}$ Ordnung durch keinen der Doppelpunkte geht:

Es giebt $2^{\frac{n.n-3}{2}+1-\varkappa}$ Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung, welche eine Curve n^{ter} Ordnung mit $\frac{n.n-3}{2}-\varkappa$ Doppelpunkten und $\varkappa$ Rückkehrpunkten berühren, wo sie derselben begegnen, also in $\frac{n.n-3}{2}$ Punkten.

Unter den $2^{\frac{n-1.n-2}{2}+1-\varkappa}$ Systemen von Curven $2h-n-3^{ter}$ Ordnung $(h > n-3)$, welche bei geradem n die gegebene Curve in $hn - \frac{n.n-3}{2}$ Punkten berühren, hat die Hälfte die Eigenschaft, dass ihre Berührungspunkte mit den Berührungspunkten einer von den angeführten Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung in einer Curve

h^{ter} Ordnung liegen. Die Zahl $2^{\frac{n-1.n-2}{2}+1-\varkappa}$ ist, wenn n ungerade, um 1 zu vermindern; und dabei vermindert sich um 1 die Zahl derjenigen Systeme, welche die angegebene Eigenschaft n i c h t *hat.*

Ueber die gegenseitige Lage der Berührungspunkte dieser Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung finden noch weitere Sätze statt. Betrachten wir z. B. die Systeme von Curven $2(n-3)^{ter}$ Ordnung, welche die gegebene Curve in $n.n-3$ Punkten berühren. Für die Berührungspunkte finden dann nach (53.) folgende Gleichungen statt:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{n.n-3} \equiv PK + QiK',$$
$$u_1^{(h)} + u_2^{(h)} + \cdots + u_{n.n-3}^{(h)} \equiv H_h i\pi + Q\frac{i\pi(\alpha_h-\beta_h)}{K},$$

wobei der Index h sich auf diejenigen $\frac{n.n-3}{2}-\varkappa$ Doppelpunkte bezieht, welche nicht in Rückkehrpunkte übergehen. Die ganzen Zahlen H, P, Q dürfen sämmtlich die Werthe 0 oder 1 annehmen, nur nicht gleichzeitig alle den Werth 0, weil dann die obigen Gleichungen nicht mehr $n.n-3$ Berührungspunkte einer Curve $2(n-3)^{ter}$ Ordnung, sondern $n.n-3$ Schnittpunkte einer Curve $(n-3)^{ter}$ Ordnung angeben. Es giebt also $2^{\frac{n.n-3}{2}+2-\varkappa}-1$ solcher Systeme. Untersuchen wir nun, wie oft in einem solchen System eine Curve in zwei Berührungscurven $(n-3)^{ter}$ Ordnung zerfallen kann. Bezeichnen wir die den letztern entsprechenden ganzen Zahlen durch p, q, h und p', q', h', so hat man offenbar die Bedingungen:

$$(54.)\quad p+p'=P,\qquad q+q'=Q,\qquad h_i+h_i'=H_i,$$

aber ausserdem auch

$$(55.)\quad \begin{cases}(p+1)(q+1)+\Sigma h \equiv \frac{n-1.n-2}{2} \pmod{2},\\ (p'+1)(q'+1)+\Sigma h' \equiv \frac{n-1.n-2}{2} \pmod{2}.\end{cases}$$

Trägt man nun die Werthe von p', q', h' in die Summe der beiden Gleichungen (55.) ein, so bleibt

$$(56.)\quad qP+pQ \equiv PQ+P+Q+\Sigma H \pmod{2}.$$

Man sieht hieraus, dass die $2^{\frac{n.n-3}{2}+2-\varkappa}$ Systeme sich in drei Classen theilen.

1. $P=0$, $Q=0$ und $\Sigma H\equiv 0$. Diese Classe umfasst, da man $\frac{n.n-3}{2}-\varkappa-1$ Grössen H beliebig gleich 0 oder 1 setzt, aber nicht alle zu-

gleich verschwinden lassen darf, $2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa-1}-1$ Systeme. In jedem dieser Systeme darf man für p, q, h noch die Zahlen einer beliebigen Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung wählen. Folglich ordnen sich für jedes der $2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa-1}-1$ Systeme die $2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa+1}$ Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung paarweise so, dass jedes der $2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa}$ Paare eine Curve $2(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung des Systems wird, und dass also in diesen Systemen überhaupt $2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa}(2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa-1}-1)$ Paare vorkommen.

2. $P=0$, $Q=0$, $\Sigma H\equiv 1$. Diese Classe umfasst $2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa-1}$ Systeme. Für sie wird die Gleichung (56.) unmöglich, und sie enthalten also keine Curvenpaare der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung.

3. Eine der Zahlen P, Q von Null verschieden. Diese Classe umfasst $3.2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa}$ Systeme, da alle H willkürlich sind, und P, Q noch die Werthe 0, 1; 1, 0; 1, 1 annehmen können. In jedem dieser Systeme kann man eine der Zahlen p, q beliebig wählen, ebenso sämmtliche H bis auf eines, wodurch denn alles bestimmt ist. In jedem System kommen also $2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa}$ Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung vor, welche für jedes System $2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa-1}$ Paare ergeben, deren jedes eine Curve $2(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ersetzen kann.

In Bezug auf die Berührungspunkte der Curven $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung ergiebt sich, da die Berührungspunkte zweier demselben System angehörigen Paare immer auf einer Curve $2(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, folgender Satz:

Die $2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa+1}$ *Curven* $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung, welche die gegebene Curve in* $\frac{n.n-3}{2}$ *Punkten berühren, bilden im Ganzen* $2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa}(2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa+1}-1)$ *Paare. Diese Paare theilen sich zunächst in zwei grosse Classen, von denen die erste* $2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa}(2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa-1}-1)$, *die zweite* $3.2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa}.2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa-1}$ *Paare enthält. Die erste Classe zerfällt wieder in* $2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa-1}-1$ *Systeme von je* $2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa}$ *Paaren, dergestalt dass die Paare jedes Systems zusammen alle Curven* $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung, jede nur einmal gerechnet, enthalten; die Berührungspunkte je zweier Paare desselben Systems liegen auf einer Curve* $2(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung. Die zweite Classe zerfällt in* $3.2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa}$ *Systeme von je* $2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa-1}$ *Paaren; die Paare eines Systems bilden zusammen die Hälfte aller Curven* $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ord-*

nung; und wieder liegen die Berührungspunkte zweier Paare desselben Systems auf einer Curve $2(n-3)^{ter}$ Ordnung.

Da hiebei jede Curve $2(n-3)^{ter}$ Ordnung offenbar dreimal auftritt, entsprechend den drei Zerlegungen von vier Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung in zwei Paare, *so giebt es im Ganzen*

$$\tfrac{1}{8}.2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa-1}.(2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa-1}-1).(5.2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa-1}-1)$$

Curven $2(n-3)^{ter}$ Ordnung, welche sich durch die Berührungspunkte von je vier Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung legen lassen.

Die obigen Sätze werden illusorisch, sobald, was bei Curven vierter, fünfter und sechster Ordnung noch geschehen kann, alle Doppelpunkte in Rückkehrpunkte übergehen, oder doch nur ein einziger wirklicher Doppelpunkt übrig bleibt. Im zweiten Fall giebt es nur ein einziges Paar von Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung, welches zugleich das einzige System der zweiten Gruppe ist, während von der ersten Gruppe nichts übrig bleibt. Im ersten Fall dagegen, wo überhaupt kein h mehr vorhanden ist, muss man auf die Gleichung

$$(p+1)(q+1) \equiv \frac{n-1.n-2}{2} \quad (\text{mod. } 2)$$

zurückgehen, und findet sofort folgende specielle Resultate:

Es giebt eine Doppeltangente für eine Curve vierter Ordnung mit zwei Rückkehrpunkten.

Es giebt drei Kegelschnitte, welche eine Curve fünfter Ordnung mit fünf Rückkehrpunkten in fünf Punkten berühren, und die fünfzehn Berührungspunkte liegen auf einer Curve dritter Ordnung.

Es giebt drei Curven dritter Ordnung, welche eine Curve sechster Ordnung mit neun Rückkehrpunkten in neun Punkten berühren.

§. 17.

Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten.

Als Beispiel für diese Untersuchungen werde ich die Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten behandeln. Die Axe x_1 sei die Verbindungslinie der Doppelpunkte, die Axe der x_2 gehe durch den einen Doppelpunkt, die Axe der x_3 durch den andern; die Gleichung eines Paars von Geraden, welche durch die andern Schnittpunkte der Axen x_2, x_3 mit der Curve geht, sei $A.C=0$; dann nimmt die Gleichung der Curve die Form an

$$(57.) \quad f = x_2^2 x_3^2 + 2x_1 x_2 x_3 B + x_1^2 AC = 0,$$

wo A, B, C die linearen Ausdrücke bedeuten:

$$A = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3,$$
$$B = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3,$$
$$C = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3.$$

Der Kegelschnittbüschel, durch den man die Punkte der Curve paarweise bestimmt, sei

$$(58.)\qquad x_2 x_3 + \lambda x_1 A = 0;$$

er geht durch die Doppelpunkte, und durch die festen Punkte $x_2 = 0$, $A = 0$ und $x_3 = 0$, $A = 0$, welche auf der Curve liegen. Verbinden wir die Gleichungen (57.), (58.) mit einander, so erhalten wir an Stelle von $f = 0$ die Gleichung:

$$(59.)\qquad \lambda^2 A - 2\lambda B + C = 0,$$

welche für die x vom ersten Grade ist. Sie stellt die Verbindungslinie des beweglichen Punktenpaars dar, in welchem ein Kegelschnitt des Systems (58.) die Curve $f = 0$ schneidet, und die Curve, welche von dieser Geraden umhüllt wird, ist also der Kegelschnitt

$$AC - B^2 = 0.$$

Derselbe hat die Gerade zur Tangente, welche durch die gewählten Grundpunkte geht ($A = 0$); aber auch $C = 0$, welches die Punkte verbindet, in denen zwei von den Doppelpunkten nach den festen Punkten gezogenen Gerade die Curve treffen.

Legt man jetzt einen Büschel $P + \varrho Q = 0$, dessen Strahlen nach den beweglichen Schnittpunkten gerichtet sind, so hat man ϱ als Function von λ, und die x als Functionen von λ und ϱ darzustellen. Aus (59.) und aus der Gleichung des Büschels ergiebt sich:

$$(60.)\qquad \begin{cases} \sigma x_1 = (p_2 + \varrho q_2)(\lambda^2 a_3 - 2\lambda b_3 + c_3) - (p_3 + \varrho q_3)(\lambda^2 a_2 - 2\lambda b_2 + c_2), \\ \sigma x_2 = (p_3 + \varrho q_3)(\lambda^2 a_1 - 2\lambda b_1 + c_1) - (p_1 + \varrho q_1)(\lambda^2 a_3 - 2\lambda b_3 + c_3), \\ \sigma x_3 = (p_1 + \varrho q_1)(\lambda^2 a_2 - 2\lambda b_2 + c_2) - (p_2 + \varrho q_2)(\lambda^2 a_1 - 2\lambda b_1 + c_1), \end{cases}$$

und wenn man diese Ausdrücke in (58.) einführt, findet sich die quadratische Gleichung durch welche ϱ als Function von λ gegeben ist. — Diese Gleichung hat die Form

$$(61.)\qquad P + 2R\varrho + Q\varrho^2 = 0,$$

wo

$$(62.)\qquad \begin{cases} P = \Sigma\Sigma\,\omega_{ik} p_i p_k, \\ R = \Sigma\Sigma\,\omega_{ik} p_i q_k, \\ Q = \Sigma\Sigma\,\omega_{ik} q_i q_k. \end{cases}$$

Und wenn man der Kürze wegen setzt:

$$(63.)\quad \begin{cases} L_1 = \lambda^2 a_1 - 2\lambda b_1 + c_1, \\ L_2 = \lambda^2 a_2 - 2\lambda b_2 + c_2, \\ L_3 = \lambda^2 a_3 - 2\lambda b_3 + c_3, \end{cases}$$

so ist

$$(64.)\quad \begin{cases} \omega_{11} = -2L_2L_3, & \omega_{23} = -L_1^2 - \lambda L_2(a_1L_3 - a_3L_1) - \lambda L_3(a_1L_2 - a_2L_1), \\ \omega_{22} = 2\lambda L_3(a_1L_3 - a_3L_1), & \omega_{31} = \quad L_1L_2 - \lambda L_2(a_3L_2 - a_2L_3), \\ \omega_{33} = 2\lambda L_2(a_1L_2 - a_2L_1), & \omega_{12} = \quad L_1L_3 + \lambda L_3(a_3L_2 - a_2L_3). \end{cases}$$

Wegen der Gleichungen, welche hieraus folgen:

$$\begin{aligned} \omega_{11}L_1 + \omega_{12}L_2 + \omega_{13}L_3 &= 0, \\ \omega_{21}L_1 + \omega_{22}L_2 + \omega_{23}L_3 &= 0, \\ \omega_{31}L_1 + \omega_{32}L_2 + \omega_{33}L_3 &= 0, \end{aligned}$$

kann man die Unterdeterminanten W_{ik} in die Form bringen

$$W_{ik} = -M.L_iL_k,$$

und man findet

$$(65.)\quad M = L_1^2 + \lambda^2(a_3L_2 - a_2L_3)^2 + 4\lambda a_1L_2L_3 - 2\lambda L_1(a_3L_2 + a_2L_3).$$

Die Determinante der Gleichung (61.) wird also

$$Q^2 - PR = M.(\Sigma \pm L_1p_2q_3)^2,$$

und man hat

$$(66.)\quad \varrho = \frac{1}{Q}\{-R + (\Sigma \pm L_1p_2q_3)\sqrt{M}\},$$

wobei unter der Wurzel nur noch ein Ausdruck vierten Grades in λ steht, wie es sein muss.

Die Einführung dieser Ausdrücke giebt, nach einer Reduction wie in §. 4, die folgenden Werthe der x:

$$(67.)\quad \begin{cases} \sigma x_1 = \omega_{11}q_1 + \omega_{12}q_2 + \omega_{13}q_3 - (q_2L_3 - q_3L_2)\sqrt{M}, \\ \sigma x_2 = \omega_{12}q_1 + \omega_{22}q_2 + \omega_{23}q_3 - (q_3L_1 - q_1L_3)\sqrt{M}, \\ \sigma x_3 = \omega_{13}q_1 + \omega_{23}q_2 + \omega_{33}q_3 - (q_1L_2 - q_2L_1)\sqrt{M}. \end{cases}$$

Da indessen die Coordinate x_1 ohnedies vor den andern bevorzugt ist, so kann man ohne weitere Verletzung der Symmetrie $q_2 = q_3 = 0$ setzen, was damit übereinkommt, dass das Centrum des Büschels in die Verbindungslinie der Doppelpunkte gelegt wird. Man erhält dann:

$$
(68.)\quad \begin{cases} \sigma x_1 = -2L_2L_3, \\ \sigma x_2 = L_3\{L_1+\lambda(a_3L_2-a_2L_3)+\sqrt{M}\}, \\ \sigma x_3 = L_2\{L_1-\lambda(a_3L_2-a_2L_3)-\sqrt{M}\}. \end{cases}
$$

Die rechten Theile dieser Gleichungen verschwinden nun sämmtlich, wie schon oben gezeigt ist, für gewisse Werthe von λ, welche der Frage fremd sind. Bemerkt man nämlich die identischen Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\{L_1+\lambda(a_3L_2-a_2L_3)\}^2-M &= 4\lambda L_2(a_3L_1-a_1L_3), \\
\{L_1-\lambda(a_3L_2-a_2L_3)\}^2-M &= 4\lambda L_3(a_2L_1-a_1L_2),
\end{aligned}
$$

so sieht man, dass alle rechten Theile der Gleichungen (68.) verschwinden, wenn

$$
\begin{aligned}
L_2 = 0 \quad &\text{und} \quad \sqrt{M} = -\{L_1+\lambda(a_3L_2-a_2L_3)\}, \\
L_3 = 0 \quad &\text{und} \quad \sqrt{M} = \{L_1-\lambda(a_3L_2-a_2L_3)\}.
\end{aligned}
$$

Man hat also im Ganzen vier Werthe von L, und für jeden derselben hat die Quadratwurzel ein bestimmtes Vorzeichen.

Die Werthe, für welche die x einzeln verschwinden, erhält man aus den Gleichungen:

$$
\begin{array}{lrl}
\text{für } x_1: & L_2 = 0 & \sqrt{M} = \{L_1+\lambda(a_3L_2-a_2L_3)\} \\
 & L_3 = 0 & \sqrt{M} = -\{L_1-\lambda(a_3L_2-a_2L_3)\}; \\
\text{für } x_2: & L_3 = 0 & \sqrt{M} = -\{L_1-\lambda(a_3L_2-a_2L_3)\} \\
 & \lambda = 0 & \sqrt{M} = -L_1 \\
 & a_3L_1-a_1L_3 = 0 & \sqrt{M} = -\{L_1+\lambda(a_3L_2-a_2L_3)\}; \\
\text{für } x_3: & L_2 = 0 & \sqrt{M} = -\{L_1+\lambda(a_3L_2-a_2L_3)\} \\
 & \lambda = 0 & \sqrt{M} = L_1 \\
 & a_2L_1-a_1L_2 = 0 & \sqrt{M} = \{L_1-\lambda(a_3L_2-a_2L_3)\}.
\end{array}
$$

§. 18.

Einführung der elliptischen Functionen in die Coordinatenausdrücke der Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten.

Bezeichnen wir nun die Wurzeln von $M=0$ durch m_1, m_2 m_3, m_4, und setzen

$$
\begin{aligned}
\sin^2 \operatorname{am} u &= \frac{m_3-m_1}{m_3-m_2}\cdot\frac{\lambda-m_2}{\lambda-m_1}, \\
\cos^2 \operatorname{am} u &= \frac{m_1-m_2}{m_3-m_1}\cdot\frac{\lambda-m_3}{\lambda-m_1}, \qquad k^2 = \frac{m_3-m_2\,.\,m_4-m_1}{m_3-m_1\,.\,m_4-m_2}, \\
\Delta \operatorname{am} u &= \frac{m_1-m_4}{m_4-m_2}\cdot\frac{\lambda-m_4}{\lambda-m_1},
\end{aligned}
$$

so gehört jedem der obigen Verschwindungswerthe ein bestimmter Werth von u an. Diejenigen Werthe von u, für welche nur je eines der x verschwindet, seien:

für x_1: ξ_2, η_2 (aus $L_2 = 0$), ξ_3, η_3 (aus $L_3 = 0$),

für x_2: ξ_3, η_3 (aus $L_3 = 0$), ζ (aus $\lambda = 0$), ζ_2 (aus $a_3 L_1 - a_1 L_3 = 0$),

für x_3: ξ_2, η_2 (aus $L_2 = 0$), $-\zeta$ (aus $\lambda = 0$), ζ_3 (aus $a_2 L_1 - a_1 L_2 = 0$).

Diejenigen Werthe von u, für welche die rechten Theile sämmtlicher Gleichungen (68.) verschwinden, sind dann:

$$-\xi_2, \quad -\eta_2, \quad -\xi_3, \quad -\eta_3.$$

Abstrahirt man also von den gemeinschaftlichen Factoren, so kann man setzen:

$$\begin{aligned}
\sigma x_1 &= c_1 . H(u-\xi_2) H(u-\eta_2) H(u-\xi_3) H(u-\eta_3), \\
\sigma x_2 &= c_2 . H(u-\xi_3) H(u-\eta_3) H(u-\zeta)\ H(u-\zeta_2), \\
\sigma x_3 &= c_3 . H(u-\xi_2) H(u-\eta_3) H(u+\zeta)\ H(u-\zeta_3).
\end{aligned}$$

Da ferner die Summe aller Verschwindungswerthe desselben algebraischen Ausdrucks immer Null ist (oder doch einer Periode congruent), so finden noch die Gleichungen statt:

$$\xi_2+\eta_2+\xi_3+\eta_3 \equiv \xi_3+\eta_3+\zeta+\zeta_2 \equiv \xi_2+\eta_2-\zeta+\zeta_3 \equiv 4\varepsilon,$$

wenn 4ε den gemeinsamen Werth dieser Summen bezeichnet. Aus diesen Gleichungen folgt noch:

$$\zeta_2+\zeta_3 \equiv 4\varepsilon, \quad \xi_2+\eta_2 \equiv \zeta+\zeta_2, \quad \xi_3+\eta_3 \equiv -\zeta+\zeta_3.$$

Man kann also drei neue Argumente σ, δ_2, δ_3 einführen, so dass durch sie und ζ selbst die andern Argumente sich folgendermassen ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\xi_2 &= \varepsilon + \frac{\zeta+\sigma}{2} + \delta_2, & \xi_3 &= \varepsilon - \frac{\zeta+\sigma}{2} + \delta_3, \\
\eta_2 &= \varepsilon + \frac{\zeta+\sigma}{2} - \delta_2, & \eta_3 &= \varepsilon - \frac{\zeta+\sigma}{2} - \delta_3, \\
\zeta_2 &= 2\varepsilon + \sigma, & \zeta_3 &= 2\varepsilon - \sigma.
\end{aligned}$$

Wenn man jetzt $v = u - \varepsilon$ setzt, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\sigma x_1 &= c_1 H\left(v - \frac{\zeta+\sigma}{2} - \delta_2\right) H\left(v - \frac{\zeta+\sigma}{2} + \delta_2\right) H\left(v + \frac{\zeta+\sigma}{2} - \delta_3\right) H\left(v + \frac{\zeta+\sigma}{2} + \delta_3\right), \\
\sigma x_2 &= c_2 H\left(v + \frac{\zeta+\sigma}{2} - \delta_3\right) H\left(v + \frac{\zeta+\sigma}{2} + \delta_3\right) H(v-\zeta+\varepsilon) H(v-\varepsilon-\sigma), \\
\sigma x_3 &= c_3 H\left(v - \frac{\zeta+\sigma}{2} - \delta_2\right) H\left(v - \frac{\zeta+\sigma}{2} + \delta_2\right) H(v+\zeta+\varepsilon) H(v-\varepsilon+\sigma).
\end{aligned}$$

Die linken Theile verwandelt man leicht wieder in algebraische Ausdrücke; zunächst erhält man, indem man nur die Constanten und den Werth von σ ändert:

$$(69.)\begin{cases} \sigma x_1 = C_1.\left[\sin^2\mathrm{am}\left(v-\frac{\zeta+\sigma}{2}\right)-\sin^2\mathrm{am}\delta_2\right]\left[\sin^2\mathrm{am}\left(v+\frac{\zeta+\sigma}{2}\right)-\sin^2\mathrm{am}\delta_3\right], \\ \sigma x_2 = C_2.\left[\sin^2\mathrm{am}\left(v+\frac{\zeta+\sigma}{2}\right)-\sin^2\mathrm{am}\delta_3\right]\left[\sin^2\mathrm{am}\left(v-\frac{\zeta+\sigma}{2}\right)-\sin^2\mathrm{am}\left(\varepsilon-\frac{\zeta-\sigma}{2}\right)\right], \\ \sigma x_3 = C_3.\left[\sin^2\mathrm{am}\left(v-\frac{\zeta+\sigma}{2}\right)-\sin^2\mathrm{am}\delta_2\right]\left[\sin^2\mathrm{am}\left(v+\frac{\zeta+\sigma}{2}\right)-\sin^2\mathrm{am}\left(\varepsilon+\frac{\zeta-\sigma}{2}\right)\right]. \end{cases}$$

Setzt man nun

$$\sin^2\mathrm{am}\,v = z,\quad \sin^2\mathrm{am}\,\frac{\zeta+\sigma}{2} = p,\quad \sin^2\mathrm{am}\,\delta_2 = p_2,\quad \sin^2\mathrm{am}\,\delta_3 = p_3,$$

$$\sin^2\mathrm{am}\left(\varepsilon-\frac{\zeta-\sigma}{2}\right) = q_2,\quad \sin^2\mathrm{am}\left(\varepsilon+\frac{\zeta-\sigma}{2}\right) = q_3,$$

so kommen endlich, bei nochmaliger zweckmässig gewählter Veränderung des Werthes von σ folgende algebraische Formeln:

$$(70.)\begin{cases} \sigma x_1 = C_1\{(z-p)^2-(p_2+p_3)[z(1-p)(1-k^2p)+p(1-z)(1-k^2z)] \\ \qquad +p_2p_3(1-k^2pz)^2-2(p_2-p_3)\sqrt{p.1-p.1-k^2p}\sqrt{z.1-z.1-k^2z}\}, \\ \sigma x_2 = C_2\{(z-p)^2-(q_2+p_3)[z(1-p)(1-k^2p)+p(1-z)(1-k^2z)] \\ \qquad +q_2p_3(1-k^2pz)^2-2(q_2-p_3)\sqrt{p.1-p.1-k^2p}\sqrt{z.1-z.1-k^2z}\}, \\ \sigma x_3 = C_3\{(z-p)^2-(p_2+q_3)[z(1-p)(1-k^2p)+p(1-z)(1-k^2z)] \\ \qquad +p_2q_3(1-k^2pz)^2-2(p_2-q_3)\sqrt{p.1-p.1-k^2p}\sqrt{z.1-z.1-k^2z}\}. \end{cases}$$

Diese Formeln haben nun in der That den verlangten Charakter; ihre rechten Theile zerfallen je in eine rationale ganze Function zweiter Ordnung von z, und in ein Glied, welches aus $\sqrt{z.1-z.1-k^2z}$ besteht, multiplicirt mit einer Constanten.

Der geometrischen Beziehung der Axen zu den gegebenen Curven wegen erkennt man sofort, dass folgende Werthe von v den angegebenen Punkten entsprechen:

$$\left.\begin{matrix} \frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_2 \\ \frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_2 \end{matrix}\right\}$$ dem im Durchschnitte von $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ liegenden Doppelpunkt,

$$\left.\begin{matrix} -\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_3 \\ -\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_3 \end{matrix}\right\}$$ dem im Durchschnitte von $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ liegenden Doppelpunkt,

$$\begin{aligned}
\varepsilon+\sigma &\text{ dem Schnittpunkte von } x_2=0 \text{ mit } A=0,\\
\varepsilon-\sigma &\text{ dem Schnittpunkte von } x_3=0 \text{ mit } A=0,\\
\zeta-\varepsilon &\text{ dem Schnittpunkte von } x_2=0 \text{ mit } C=0,\\
-\zeta-\varepsilon &\text{ dem Schnittpunkte von } x_3=0 \text{ mit } C=0.
\end{aligned}$$

In der That verschwinden, wie man aus (68.) sieht, A und C, ersteres wenn $a_3L_1-a_1L_3=0$ oder $a_2L_1-a_1L_2=0$, woraus die Argumente $\varepsilon+\sigma$, $\varepsilon-\sigma$ entsprangen, letzteres wenn $\lambda=0$, woraus die Argumente $\zeta-\varepsilon$; $-\zeta-\varepsilon$ entstanden sind. Man kann dies benutzen um die Verhältnisse der Constanten C_1, C_2, C_3 zu bestimmen. Setzt man nämlich in (69.) $v=\varepsilon+\sigma$, so wird $x_2=0$ und

$$a_1x_1+a_3x_3 = 0,$$

daher

$$(71.)\qquad -\frac{a_1}{a_3} = \frac{C_3}{C_1}\cdot\frac{\sin^2\operatorname{am}\left(\varepsilon+\frac{\zeta+3\sigma}{2}\right)-\sin^2\operatorname{am}\left(\varepsilon+\frac{\zeta-\sigma}{2}\right)}{\sin^2\operatorname{am}\left(\varepsilon+\frac{\zeta+3\sigma}{2}\right)-\sin^2\operatorname{am}\delta_3};$$

setzt man dagegen $v=\varepsilon-\sigma$, so wird $x_3=0$, $a_1x_1+a_2x_2=0$, also

$$(72.)\qquad -\frac{a_1}{a_2} = \frac{C_2}{C_1}\cdot\frac{\sin^2\operatorname{am}\left(\varepsilon-\frac{\zeta+3\sigma}{2}\right)-\sin^2\operatorname{am}\left(\varepsilon-\frac{\zeta-\sigma}{2}\right)}{\sin^2\operatorname{am}\left(\varepsilon-\frac{\zeta+3\sigma}{2}\right)-\sin^2\operatorname{am}\delta_2}.$$

Durch diese Formeln und (69.) ist die vollständige Darstellung der Coordinaten als Functionen von v geleistet.

§. 19.

Bedingungen für ein Schnittpunktsystem.

Ich komme jetzt zu den Formeln für ein Schnittpunktsystem, d. h. zu den Bedingungen, welche zwischen den Argumenten von $4m$ Punkten stattfinden müssen, damit diese auf einer Curve m^{ter} Ordnung liegen. Wir haben in den Formeln III. (§. 9) nur für α_1, α_2, β_1, β_2 zu setzen:

$$\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_2,\quad \frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_2,\quad -\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_3,\quad -\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_3.$$

Aus jenen Formeln findet man dann für den Fall, dass kein Punkt des Systems mit einem Doppelpunkte zusammenfällt:

$$(73.)\quad \begin{cases} v_1+v_2+\cdots+v_{4m} \equiv 0, \\ \prod\limits_{i=1}^{i=4m} \dfrac{H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_2-v_i\right)}{H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_2-v_i\right)} \equiv \left\{\dfrac{H(\zeta+\sigma+\delta_2+\delta_3)}{H(\zeta+\sigma-\delta_2-\delta_3)}\cdot\dfrac{H(\zeta+\sigma+\delta_2-\delta_3)}{H(\zeta+\sigma-\delta_2+\delta_3)}\right\}^m, \\ \prod\limits_{i=1}^{i=4m} \dfrac{H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_3+v_i\right)}{H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_3+v_i\right)} \equiv \left\{\dfrac{H(\zeta+\sigma-\delta_2-\delta_3)}{H(\zeta+\sigma+\delta_2+\delta_3)}\cdot\dfrac{H(\zeta+\sigma+\delta_2-\delta_3)}{H(\zeta+\sigma-\delta_2+\delta_3)}\right\}^m. \end{cases}$$

Dagegen, wenn ein Punkt des Systems mit dem Doppelpunkte $x_2=0$, $x_1=0$ zusammenfällt, also zwei der Argumente v in $-\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_3$ und $-\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_3$ übergehen:

$$(74.)\quad \begin{cases} v_1+v_2+\cdots+v_{4m-2} \equiv \zeta+\sigma, \\ \prod\limits_{i=1}^{i=4m-2} \dfrac{H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_2-v_i\right)}{H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_2-v_i\right)} \equiv \left\{\dfrac{H(\zeta+\sigma+\delta_2+\delta_3)H(\zeta+\sigma+\delta_2-\delta_3)}{H(\zeta+\sigma-\delta_2-\delta_3)H(\zeta+\sigma-\delta_2+\delta_3)}\right\}^{m-1}. \end{cases}$$

Endlich, wenn die Curve m^{ter} Ordnung durch beide Doppelpunkte gehen soll, bleibt nur die eine Gleichung übrig:

$$(75.)\quad v_1+v_2+\cdots+v_{4m-4} \equiv 0.$$

§. 20.

Vierpunktig berührende Kegelschnitte, welche durch die Doppelpunkte gehen.

Die letzte Gleichung gestattet unmittelbar die Lösung einiger bemerkenswerthen Aufgaben. *Es soll z. B. ein Kegelschnitt gefunden werden, welcher durch die Doppelpunkte geht, und die Curve noch vierpunktig berührt.* Ist v das Argument des Berührungspunktes, so findet man aus (75.)

$$4v \equiv 0, \quad v \equiv \frac{pK+qiK'}{2}.$$

Die Zahlen p, q können hier die Werthe 0, 1, 2, 3 erhalten; *es giebt also 16 Kegelschnitte dieser Art.*

Bezeichnen wir, um die gegenseitige Lage der 16 Berührungspunkte genauer darzustellen, diese Kegelschnitte allgemein durch pq, so dass man die 16 Kegelschnitte hat

(76.)

I.	II.	III.	IV.
00, 02, 20, 22;	01, 03, 21, 23;	10, 12, 30, 32;	11, 13, 31, 33.

Die Kegelschnitte ordnen sich hier sofort in vier Gruppen, und zwar haben diese Gruppen die Eigenschaft, *dass es immer einen Kegelschnitt giebt, der durch die Doppelpunkte geht, und die Curve vierter Ordnung in den Berührungspunkten von irgend zwei Kegelschnitten derselben Gruppe berührt; solcher neuen Kegelschnitte giebt es also* $4.6 = 24$.

Die Berührungspunkte aller vier Berührungskegelschnitte derselben Gruppe liegen mit den Doppelpunkten in einem Kegelschnitt, so dass es vier solcher Kegelschnitte giebt.

Man kann ferner Kegelschnitte so legen, dass jeder derselben durch die Doppelpunkte geht, in dem Berührungspunkt eines der sechszehn Kegelschnitte berührt, und durch die Berührungspunkte zweier andern hindurchgeht. Die letzten beiden gehören dann immer einer andern Gruppe an, als der erste; die letzten beiden ändern sich nicht, wenn für den ersten alle Kegelschnitte einer Gruppe gesetzt werden, und jeder solchen Gruppe gegenüber sondern sich die andern drei Gruppen in Paare, so dass jedes der sechs Paare mit einem beliebigen Kegelschnitt der ersten Gruppe combinirt werden kann. Solcher Kegelschnitte giebt es also $4.4.6 = 96$.

Die zu den in (76.) aufgeführten Gruppen gehörigen Paare sind folgende:

	zu I.	zu II.	zu III.	zu IV.
(77.)	01, 03; 21, 23	00, 02; 20, 22	00, 20; 02, 22	00, 22; 02, 20
	10, 30; 12, 32	10, 32; 12, 30	01, 23; 21, 03	01, 21; 03, 23
	11, 33; 13, 31	11, 31; 13, 33	11, 13; 31, 33	10, 12; 30, 32.

Durch die Berührungspunkte jedes dieser Paare und durch die Doppelpunkte gehen vier Kegelschnitte, welche beziehungsweise in den vier Berührungspunkten der entsprechenden Gruppe berühren.

Die in (77.) derselben Gruppe entsprechenden Paare haben die Eigenschaft, dass je zwei Paare mit den Doppelpunkten in einem Kegelschnitt liegen. *Es giebt also* $6.8 = 48$ *Kegelschnitte, deren jeder die Doppelpunkte und zwei Paare von Berührungspunkten enthält, deren jedes einer anderen Gruppe angehört.*

Endlich liegen $4.16 = 64$ *mal vier Berührungspunkte, welche lauter verschiedenen Gruppen angehören, mit den Doppelpunkten auf einem Kegelschnitt, so dass sechszehn mal alle Berührungspunkte auf vier solchen Kegelschnitten liegen.* Diese sechszehn Gruppirungen der sechszehn Kegelschnitte zu vieren sind folgende:

00, 01, 12, 31.	20, 21, 10, 33.	02, 03, 32, 11.	22, 23, 30, 13.
20, 21, 12, 31.	02, 03, 10, 33.	22, 23, 32, 11.	00, 01, 30, 13.
02, 03, 12, 31.	22, 23, 10, 33.	00, 01, 32, 11.	20, 21, 30, 13.
22, 23, 12, 31.	00, 01, 10, 33.	20, 21, 32, 11.	02, 03, 30, 13.
02, 01, 13, 32.	22, 21, 11, 30.	00, 03, 33, 12.	20, 23, 31, 10.
22, 21, 13, 32.	00, 03, 11, 30.	20, 23, 33, 12.	02, 01, 31, 10.
00, 03, 13, 32.	20, 23, 11, 30.	02, 01, 33, 12.	22, 21, 31, 10.
20, 23, 13, 32.	02, 01, 11, 30.	22, 21, 33, 12.	00, 03, 31, 10.
10, 11, 22, 01.	30, 31, 20, 03.	12, 13, 02, 21.	32, 33, 00, 23.
30, 31, 22, 01.	12, 13, 20, 03.	32, 33, 02, 21.	32, 33, 00, 23.
12, 13, 22, 01.	32, 33, 20, 03.	10, 11, 02, 21.	10, 11, 00, 23.
32, 33, 22, 01.	10, 11, 20, 03.	30, 31, 02, 21.	30, 31, 00, 23.
11, 12, 23, 02.	31, 32, 21, 00.	13, 10, 03, 22.	33, 30, 01, 20.
31, 32, 23, 02.	13, 10, 21, 00.	33, 30, 03, 22.	11, 12, 01, 20.
13, 10, 23, 02.	33, 30, 21, 00.	11, 12, 03, 22.	31, 32, 01, 20.
33, 30, 23, 02.	11, 12, 21, 00.	31, 32, 03, 22.	13, 10, 01, 20.

Im Ganzen also liegen $64+48+4 = 116$ *mal vier Berührungspunkte mit den Doppelpunkten auf einem Kegelschnitt.*

Man kann diese Sätze leicht fortentwickeln, namentlich auch in Bezug auf die Punktreihen, welche die Verbindungslinien der Berührungspunkte auf der Verbindungslinie der Doppelpunkte erzeugen.

Ich bemerke nur noch, dass die Formel (75.) sofort diejenigen Sätze ergiebt, die *Steiner* im 32sten Bande pag. 184 dieses Journals angedeutet hat.

§. 21.

Schnittcurven, welche durch einen Doppelpunkt gehen. Tangenten von einem Doppelpunkt an die Curve.

Die Gleichung (74.), welche zwischen den Argumenten der Schnittpunkte für den Fall besteht, dass die Curve m^{ter} Ordnung durch einen der Doppelpunkte ($x_1=0$, $x_2=0$) hindurchgeht, führt, wenn alle Argumente bis auf zwei gegeben sind, auf das in folgenden Gleichungen enthaltenen Umkehrungsproblem:

$$(77^a.)\quad \begin{cases} v_1+v_2 = \omega, \\ \dfrac{H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_2-v_1\right)}{H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_2-v_1\right)}\cdot\dfrac{H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_2-v_2\right)}{H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_2-v_2\right)} = e^{w_1}. \end{cases}$$

Man kann dies Problem so lösen, dass man

$$(78.)\qquad v_1 = \tfrac{1}{2}\omega + t, \quad v_2 = \tfrac{1}{2}\omega - t$$

setzt, und nun t bestimmt. Die erste Gleichung ist hiedurch identisch erfüllt, die zweite giebt:

$$\frac{H\left(\frac{\zeta+\sigma-\omega}{2}+\delta_2-t\right)H\left(\frac{\zeta+\sigma-\omega}{2}+\delta_2+t\right)}{H\left(\frac{\zeta+\sigma-\omega}{2}-\delta_2-t\right)H\left(\frac{\zeta+\sigma-\omega}{2}-\delta_2+t\right)} = e^{\omega_1},$$

oder, nach bekannten Formeln:

$$\frac{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{\zeta+\sigma-\omega}{2}+\delta_2\right)-\sin^2\mathrm{am}\,t}{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{\zeta+\sigma-\omega}{2}-\delta_2\right)-\sin^2\mathrm{am}\,t} = e^{\omega_1}\cdot\frac{\Theta^2\left(\frac{\zeta+\sigma-\omega}{2}-\delta_2\right)}{\Theta^2\left(\frac{\zeta+\sigma-\omega}{2}+\delta_2\right)},$$

und durch Auflösung findet man also:

$$(79.)\qquad \sin^2\mathrm{am}\,t = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{H^2\left(\frac{\zeta+\sigma-\omega}{2}+\delta_2\right)-e^{\omega_1}H^2\left(\frac{\zeta+\sigma-\omega}{2}-\delta_2\right)}{\Theta^2\left(\frac{\zeta+\sigma-\omega}{2}+\delta_2\right)-e^{\omega_1}\Theta^2\left(\frac{\zeta+\sigma-\omega}{2}-\delta_2\right)}.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit (78.) enthält die vollständige Lösung der Aufgabe. Ist also in (74.) $m > n-3$, so findet man zu $4m-3$ gegebenen Punkten aus (74.), (77^a.), (78.), (79.) den $4m-2^{\text{ten}}$ Punkt, der mit jenen und mit dem einen Doppelpunkte ($x_2 = 0$, $x_1 = 0$) auf einer Curve m^{ter} Ordnung liegt.

Der Fall $m = n-3$ bezieht sich hier auf die durch diesen Doppelpunkt gehenden Geraden. Für sie gehen die Gleichungen (74.), wenn v_1, v_2 sich auf die weiteren Schnittpunkte einer solchen Geraden mit der Curve beziehen, über in:

$$v_1+v_2 = \zeta+\sigma,$$

$$\frac{H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_2-v_1\right)H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_2-v_2\right)}{H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_2-v_2\right)H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_2-v_1\right)} = 1.$$

Erfüllt man die erste Gleichung durch die Annahme

$$(80.)\qquad v_1 = \frac{\zeta+\sigma}{2}+t, \quad v_2 = \frac{\zeta+\sigma}{2}-t,$$

so wird die zweite identisch erfüllt, und die Gleichungen (80.) stellen also die allgemeinsten Argumente zweier Punkte dar, die mit dem betreffenden Doppelpunkte in einer Geraden liegen.

Soll insbesondere die Gerade eine von dem Doppelpunkte gezogene Tangente werden, so dürfen v_1, v_2 sich nur um eine Periode unterscheiden, d. h. t muss einen der Werthe 0, K, iK', $K+iK'$ annehmen. *Von einem Doppelpunkte kann man also vier Tangenten an die Curve legen.* Die vier Argumente derselben sind für den hier behandelten Doppelpunkt

$$\frac{\zeta+\sigma}{2},\quad \frac{\zeta+\sigma}{2}+K,\quad \frac{\zeta+\sigma}{2}+iK',\quad \frac{\zeta+\sigma}{2}+K+iK'.$$

Die Argumente der dem anderen Doppelpunkte angehörigen Tangenten sind

$$-\frac{\zeta+\sigma}{2},\quad -\frac{\zeta+\sigma}{2}+K,\quad -\frac{\zeta+\sigma}{2}+iK',\quad -\frac{\zeta+\sigma}{2}+K+iK'.$$

Diese vier Tangenten entsprechen einzeln den ersten, so dass die Berührungspunkte je zweier entsprechenden Paare mit den beiden Doppelpunkten auf einem Kegelschnitt liegen.

§. 22.

Allgemeine Schnittcurven. Bestimmung dreier Schnittpunkte aus den übrigen.

Die allgemeinen Bedingungen für das Schnittpunktsystem einer Curve m^{ter} Ordnung mit der gegebenen Curve vierter Ordnung, welche in den Gleichungen (73.) enthalten sind, bestimmen drei Punkte des Systems durch die übrigen. Die Auffindung der drei Argumente dieser Punkte führt dann auf die Gleichungen:

$$v_1+v_2+v_3 = \omega,$$

$$\frac{H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_2-v_1\right)H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_2-v_2\right)H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_2-v_3\right)}{H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_2-v_1\right)H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_2-v_2\right)H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_2-v_3\right)} = e^{\omega_2},$$

$$\frac{H\left(-\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_3-v_1\right)H\left(-\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_3-v_2\right)H\left(-\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_3-v_3\right)}{H\left(-\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_3-v_1\right)H\left(-\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_3-v_2\right)H\left(-\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_3-v_3\right)} = e^{\omega_1}.$$

Die Betrachtungen der §§. 10, 11 gestatten eine doppelte Lösung dieser Aufgabe. Erstlich kann man setzen

$$z_i = \sin^2\text{am}\left(v_i-\frac{\omega}{3}\right),$$

und die drei z bestimmen sich dann aus der Gleichung:

$$0=\begin{vmatrix} \sqrt{1-z.1-k^2z}, & \cos\operatorname{am}\sigma_2\,\Delta\operatorname{am}\sigma_2-\frac{\Theta^2\tau_2}{\Theta^2\sigma_2}e^{\omega_2}\cos\operatorname{am}\tau_2\,\Delta\operatorname{am}\tau_2, & \cos\operatorname{am}\sigma_3\,\Delta\operatorname{am}\sigma_3-\frac{\Theta^2\tau_3}{\Theta^2\sigma_3}e^{\omega_3}\cos\operatorname{am}\tau_3\,\Delta\operatorname{am}\tau_3 \\ \sqrt{z}, & \sin\operatorname{am}\sigma_2-\frac{\Theta^2\tau_2}{\Theta^2\sigma_2}e^{\omega_2}\sin\operatorname{am}\tau_2, & \sin\operatorname{am}\sigma_3-\frac{\Theta^2\tau_3}{\Theta^2\sigma_3}e^{\omega_3}\sin\operatorname{am}\tau_3 \\ z\sqrt{z}, & \sin^3\operatorname{am}\sigma_2-\frac{\Theta^2\tau_2}{\Theta^2\sigma_2}e^{\omega_2}\sin^3\operatorname{am}\tau_2, & \sin^3\operatorname{am}\sigma_3-\frac{\Theta^2\tau_3}{\Theta^2\sigma_3}e^{\omega_3}\sin^3\operatorname{am}\tau_3 \end{vmatrix},$$

wo

$$\sigma_2=\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_2-\frac{\omega}{3},\quad \sigma_3=-\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_3-\frac{\omega}{3},$$

$$\tau_2=\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_2-\frac{\omega}{3},\quad \tau_3=-\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_3-\frac{\omega}{3}.$$

Zweitens kann man die Functionen einführen:

$$\begin{aligned}\Omega(u) = \;& H(u+\delta_2+\delta_3-\omega)H(u-\tfrac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_2)H(u+\tfrac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_3)H(\zeta+\sigma+\delta_2-\delta_3)\\ -e^{\omega_2}\;& H(u-\delta_2+\delta_3-\omega)H(u-\tfrac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_2)H(u+\tfrac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_3)H(\zeta+\sigma-\delta_2-\delta_3)\\ -e^{\omega_3}\;& H(u+\delta_2-\delta_3-\omega)H(u-\tfrac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_2)H(u+\tfrac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_3)H(\zeta+\sigma+\delta_2+\delta_3)\\ +e^{\omega_2\omega_3}& H(u-\delta_2-\delta_3-\omega)H(u-\tfrac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_2)H(u+\tfrac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_3)H(\zeta+\sigma-\delta_2+\delta_3),\end{aligned}$$

und findet nach 41:

$$\sqrt{z_1z_2z_3} = \frac{i}{(\sqrt{k}\sqrt[4]{q})^3}\cdot e^{\frac{i\pi\omega}{2K}}\frac{\Omega(o)}{\Omega(iK')},$$

$$\sqrt{1-z_1.1-z_2.1-z_3} = -\frac{i\sqrt{k'^3}}{(\sqrt{k}\sqrt[4]{q})^3}\cdot e^{\frac{i\pi\omega}{2K}}\frac{\Omega(K)}{\Omega(iK')},$$

$$\sqrt{1-k^2z_1.1-k^2z_2.1-k^2z_3} = -\;i\sqrt{k'^3}\;.e^{\frac{i\pi\omega}{2K}}\frac{\Omega(K+iK')}{\Omega(iK')}.$$

Diese Gleichungen gestatten sofort, wenn $m>1$, das Schnittpunktsystem zu vervollständigen.

§. 23.

Schnitt einer Geraden mit der Curve.

Für $m=1$ müssen, da zwei Schnittpunkte einer Geraden mit der Curve beliebig angenommen werden können, die Gleichungen des *Abel*schen Theorems (73.)

$$
(81.)\quad \begin{cases} v_1+v_2+v_3+v_4 = 0, \\[2mm] \prod\limits_{i=1}^{i=4} \dfrac{H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_2-v_i\right)}{H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_2-v_i\right)} = \dfrac{H(\zeta+\sigma+\delta_2+\delta_3)H(\zeta+\sigma+\delta_2-\delta_3)}{H(\zeta+\sigma-\delta_2-\delta_3)H(\zeta+\sigma-\delta_2+\delta_3)}, \\[4mm] \prod\limits_{i=1}^{i=4} \dfrac{H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_3-v_i\right)}{H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_3-v_i\right)} = \dfrac{H(\zeta+\sigma-\delta_2-\delta_3)H(\zeta+\sigma+\delta_2-\delta_3)}{H(\zeta+\sigma+\delta_2+\delta_3)H(\zeta+\sigma-\delta_2+\delta_3)} \end{cases}
$$

sich auf nur zwei reduciren, d. h. es müssen die beiden letzten Gleichungen mit Hülfe der ersten sich in eine einzige überführen lassen. Ich werde zeigen, dass sich die zweite Gleichung wirklich mit Hülfe der ersten in eine Gestalt bringen lässt, welche sich nicht mehr ändert, wenn $\zeta+\sigma$ mit $-(\zeta+\sigma)$ und δ_2 mit δ_3 vertauscht wird, wodurch die zweite Gleichung in die dritte übergeht. Hierzu bediene ich mich der Relationen zwischen verschiedenen H und Θ, welche von *Jacobi* herrühren, und welche *Rosenhain* in der schon öfters angeführten Abhandlung vollständig bekannt gemacht hat. Sind u, u', u'', u''' beliebige Argumente, und setzt man

$$
\begin{aligned}
2\omega &= u+u'+u''+u''', \\
2\omega' &= u+u'-u''-u''', \\
2\omega'' &= u-u'+u''-u''', \\
2\omega''' &= u-u'-u''+u''',
\end{aligned}
$$

so ist die hier zur Benutzung kommende Gleichung:

$$
\begin{aligned}
&2H(u)H(u')H(u'')H(u''') \\
&= H(\omega)H(\omega')H(\omega'')H(\omega''')-H(\omega+K)H(\omega'+K)H(\omega''+K)H(\omega'''+K) \\
&\quad -\Theta(\omega)\Theta(\omega')\Theta(\omega'')\Theta(\omega''')+\Theta(\omega+K)\Theta(\omega'+K)\Theta(\omega''+K)\Theta(\omega'''+K).
\end{aligned}
$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man Zähler und Nenner der zweiten Gleichung (81.) umgestalten. Die v gehen dann immer aus ω heraus, weil ihre Summe verschwindet; dagegen werden umgekehrt ω', ω'', ω''' immer von den constanten Theilen der Argumente unabhängig, und nehmen in Zähler und Nenner die-

selben Werthe an. Dividirt man dann, nachdem die Nenner hinaufmultiplicirt sind, mit $\Theta(\omega').\Theta(\omega'').\Theta(\omega''')$, und setzt

$$(82.)\quad \begin{cases} x' = \sin^2\mathrm{am}(\omega') = \sin^2\mathrm{am}\dfrac{v_1+v_2-v_3-v_4}{2}, \\ x'' = \sin^2\mathrm{am}(\omega'') = \sin^2\mathrm{am}\dfrac{v_1-v_2+v_3-v_4}{2}, \\ x''' = \sin^2\mathrm{am}(\omega''') = \sin^2\mathrm{am}\dfrac{v_1-v_2-v_3+v_4}{2}, \end{cases}$$

so geht die zweite Gleichung (81.) über in:

$$(83.)\quad 0 = A+B\sqrt{x'x''x'''}+C\sqrt{1-x'.1-x''.1-x'''}+D\sqrt{1-k^2x'.1-k^2x''.1-k^2x'''}.$$

Und zwar ist, wenn der Kürze wegen $\zeta+\sigma=\tau$ gesetzt wird:

$$-A = \Theta(\tau+2\delta_2)H(\tau-\delta_2-\delta_3)H(\tau-\delta_2+\delta_3)-\Theta(\tau-2\delta_2)H(\tau+\delta_2+\delta_3)H(\tau+\delta_2-\delta_3),$$

$$\frac{B}{\sqrt{k^3}} = H(\tau+2\delta_2)H(\tau-\delta_2-\delta_3)H(\tau-\delta_2+\delta_3)-H(\tau-2\delta_2)H(\tau+\delta_2+\delta_3)H(\tau+\delta_2-\delta_3),$$

$$-C\sqrt{\frac{k'}{k}}^3 = H(\tau+2\delta_2+K)H(\tau-\delta_2-\delta_3)H(\tau-\delta_2+\delta_3)$$
$$-H(\tau-2\delta_2+K)H(\tau+\delta_2+\delta_3)H(\tau+\delta_2-\delta_3),$$

$$D\sqrt{k'}^3 = \Theta(\tau+2\delta_2+K)H(\tau-\delta_2-\delta_3)H(\tau-\delta_2+\delta_3)$$
$$-\Theta(\tau-2\delta_2+K)H(\tau+\delta_2+\delta_3)H(\tau+\delta_2-\delta_3).$$

Man kann leicht aus einem dieser Coefficienten die übrigen ableiten. Ist nämlich

$$\frac{B}{\sqrt{k^3}} = f(\tau,\delta_2,\delta_3),$$

so ist auch

$$A = iq\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{i\pi}{2K}(3\tau+2\delta_3)}.f(\tau+iK',\delta_2,\delta_3+iK'),.$$

$$C\sqrt{\frac{k'}{k}}^3 = f(\tau+K,\delta_2,\delta_3+K),$$

$$D\sqrt{k'}^3 = -q\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{i\pi}{2K}(3\tau+2\delta_3)}.f(\tau+K+iK',\delta_2,\delta_3+K+iK').$$

Es ist also nur *einer* dieser Coefficienten näher zu untersuchen. Man hat nach der vorhin benutzten Formel, indem man $\frac{B}{\sqrt{k^3}}$ mit $H(\tau)$ multiplicirt, jedes Product rechts transformirt, und die sich aufhebenden Terme auslässt:

$$\frac{B}{\sqrt{k^3}}\cdot H(\tau) = H(2\tau)H(2\delta_2)H(\delta_2+\delta_3)H(\delta_2-\delta_3).$$

Daher hat man auch:

$$A\,.\,\Theta(\tau) = H(2\tau)H(2\delta_2)\Theta(\delta_2+\delta_3)\Theta(\delta_2-\delta_3),$$

$$C\sqrt{\frac{k'}{k}}^3\cdot H(\tau+K) = H(2\tau)H(2\delta_2)H(\delta_2+\delta_3+K)H(\delta_2-\delta_3+K),$$

$$D\sqrt{k'}^3.\Theta(\tau+K) = -H(2\tau)H(2\delta_2)\Theta(\delta_2+\delta_3+K)\Theta(\delta_2-\delta_3+K),$$

und die Gleichung (83.) geht in folgende bemerkenswerthe Form über:

$$0 = 1+k^2\sqrt{\frac{abx'x''x'''}{c}}+\frac{k^2}{k'^2}\sqrt{\frac{1-a.1-b.1-x'.1-x''.1-x'''}{1-c}}$$
$$-\frac{1}{k'^2}\sqrt{\frac{1-k^2a.1-k^2b.1-k^2x'.1-k^2x''.1-k^2x'''}{1-k^2c}},$$

wo

$$a = \sin^2\mathrm{am}(\delta_2+\delta_3),$$
$$b = \sin^2\mathrm{am}(\delta_2-\delta_3),$$
$$c = \sin^2\mathrm{am}(\zeta+\sigma).$$

Diese Gleichung ändert sich durch Vertauschung von δ_2 mit δ_3, $\zeta+\sigma$ mit $-(\zeta+\sigma)$ nicht mehr; dieselbe Gleichung wird also auch aus der dritten Gleichung (81.) erhalten, und diese kann daher nichts Neues mehr liefern.

Man kann diese Resultate in folgendem Satz aussprechen:

Die allgemeinsten Argumente, welche das Schnittpunktsystem einer Geraden mit der Curve vierter Ordnung bilden können, sind

$$v_1 = \frac{\omega'+\omega''+\omega'''}{2},\quad v_2 = \frac{\omega'-\omega''-\omega'''}{2},\quad v_3 = \frac{-\omega'+\omega''-\omega'''}{2},\quad v_4 = \frac{-\omega'-\omega''+\omega'''}{2},$$

wo ω, ω', ω'' durch die eine Gleichung verbunden sind:

$$(84.)\quad \begin{cases} 0 = 1+k^2\dfrac{\sin\mathrm{am}\,\omega'\sin\mathrm{am}\,\omega''\sin\mathrm{am}\,\omega'''\sin\mathrm{am}(\delta_2+\delta_3)\sin\mathrm{am}(\delta_2-\delta_3)}{\sin\mathrm{am}(\zeta+\sigma)} \\ \quad +\dfrac{k^2}{k'^2}\dfrac{\cos\mathrm{am}\,\omega'\cos\mathrm{am}\,\omega''\cos\mathrm{am}\,\omega'''\cos\mathrm{am}(\delta_2+\delta_3)\cos\mathrm{am}(\delta_2-\delta_3)}{\cos\mathrm{am}(\zeta+\sigma)} \\ \quad -\dfrac{1}{k'^2}\dfrac{\Delta\mathrm{am}\,\omega'\Delta\mathrm{am}\,\omega''\Delta\mathrm{am}\,\omega'''\Delta\mathrm{am}(\delta_2+\delta_3)\Delta\mathrm{am}(\delta_2-\delta_3)}{\Delta\mathrm{am}(\zeta+\sigma)}. \end{cases}$$

§. 24.

Wendetangenten und Doppeltangenten.

Wenden wir diese Gleichung insbesondere auf die Wendetangenten und Doppeltangenten an. Für die Wendepunkte muss $\omega'=\omega''=\omega'''$ sein, damit auch $v_2=v_3=v_4$ werde, *und man erhält also zur Bestimmung der Ar-*

gumente $v = -\frac{\omega}{2}$ *der Wendepunkte die Gleichung:*

$$0 = 1 + k^2 \frac{\sin^3 \text{am}\,\omega \sin \text{am}(\delta_2+\delta_3) \sin \text{am}(\delta_2-\delta_3)}{\sin \text{am}(\zeta+\sigma)}$$
$$+ \frac{k^2}{k'^2} \frac{\cos^3 \text{am}\,\omega \cos \text{am}(\delta_2+\delta_3) \cos \text{am}(\delta_2-\delta_3)}{\cos \text{am}(\zeta+\sigma)}$$
$$- \frac{1}{k'^2} \frac{\Delta^3 \text{am}\,\omega\, \Delta \text{am}(\delta_2+\delta_3)\, \Delta \text{am}(\delta_2-\delta_3)}{\Delta(\zeta+\sigma)},$$

welche, wenn man sie in eine rationale Gleichung für $\sin \text{am}\,\omega$ *verwandelt, vom zwölften Grade wird,* den zwölf verschiedenen Wendepunkten entsprechend. Ich bemerke, dass ω sich aus dieser Gleichung bis auf Vielfache von $4K+4iK'$, also $v = -\frac{\omega}{2}$ bis auf Vielfache von $2K+2iK'$ bestimmt, und somit die zugehörigen Coordinaten eindeutig gegeben werden.

Sollen die Argumente v einer Doppeltangente entsprechen, und zwar v_1, v_2 einem Berührungspunkte, v_3, v_4 dem andern, so muss sowohl $\omega''+\omega'''$ als $\omega''-\omega'''$ von der Form $2pK+2qiK'$ sein, d. h. man kann setzen

$$\omega'' = \omega''' = pK+qiK'.$$

Nach den Werthen von p, q sondern sich also die acht Doppeltangenten in vier Paare; und die zugehörigen Werthe von ω' bestimmen sich aus den Gleichungen:

I) $p=0$, $q=0$:

$$0 = 1 + \frac{k^2}{k'^2} \frac{\cos \text{am}\,\omega' \cos \text{am}(\delta_2+\delta_3) \cos \text{am}(\delta_2-\delta_3)}{\cos \text{am}(\zeta+\sigma)}$$
$$- \frac{1}{k'^2} \frac{\Delta \text{am}\,\omega'\, \Delta \text{am}(\delta_2+\delta_3)\, \Delta \text{am}(\delta_2-\delta_3)}{\Delta \text{am}(\zeta+\sigma)},$$

II) $p=1$, $q=0$:

$$0 = 1 + k^2 \frac{\sin \text{am}\,\omega' \sin \text{am}(\delta_2+\delta_3) \sin \text{am}(\delta_2-\delta_3)}{\sin \text{am}(\zeta+\sigma)}$$
$$- \frac{\Delta \text{am}\,\omega'\, \Delta \text{am}(\delta_2+\delta_3)\, \Delta \text{am}(\delta_2-\delta_3)}{\Delta \text{am}(\zeta+\sigma)},$$

III) $p=1$, $q=1$:

$$0 = 1 + \frac{\sin \text{am}\,\omega' \sin \text{am}(\delta_2+\delta_3) \sin \text{am}(\delta_2-\delta_3)}{\sin \text{am}(\zeta+\sigma)}$$
$$+ \frac{\cos \text{am}\,\omega' \cos \text{am}(\delta_2+\delta_3) \cos \text{am}(\delta_2-\delta_3)}{\cos \text{am}(\zeta+\sigma)},$$

IV) $p=0$, $q=1$:

$$0 = \frac{\sin \text{am}\,\omega' \sin \text{am}(\delta_2+\delta_3) \sin \text{am}(\delta_2-\delta_3)}{\sin \text{am}(\zeta+\sigma)}$$
$$+ \frac{k^2}{k'^2} \frac{\cos \text{am}\,\omega' \cos \text{am}(\delta_2+\delta_3) \cos \text{am}(\delta_2-\delta_3)}{\cos \text{am}(\zeta+\sigma)} - \frac{1}{k'^2} \frac{\Delta \text{am}\,\omega'\, \Delta \text{am}(\delta_2+\delta_3)\, \Delta \text{am}(\delta_2-\delta_3)}{\Delta \text{am}(\zeta+\sigma)}$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den folgenden vier Formen des Additionstheorems:

$$\varDelta\,\mathrm{am}\,\alpha\,\varDelta\,\mathrm{am}\,\beta\,\varDelta\,\mathrm{am}\,(\alpha\pm\beta)-k^2\cos\mathrm{am}\,\alpha\cos\mathrm{am}\,\beta\cos\mathrm{am}\,(\alpha\pm\beta) = k'^2,$$

$$\frac{\varDelta\,\mathrm{am}\,\alpha\,\varDelta\,\mathrm{am}\,\beta\,\varDelta\,\mathrm{am}(\alpha\pm\beta\pm K)}{k'}-k^2\sin\mathrm{am}\,\alpha\sin\mathrm{am}\,\beta\sin\mathrm{am}\,(\alpha\pm\beta\pm K) = 1,$$

$$\frac{ik}{k'}\cos\mathrm{am}\alpha\cos\mathrm{am}\beta\cos\mathrm{am}(\alpha\pm\beta\pm K\pm iK')-k\sin\mathrm{am}\alpha\sin\mathrm{am}\beta\sin\mathrm{am}(\alpha\pm\beta\pm K\pm iK')=1,$$

$$\cos\mathrm{am}\,\alpha\cos\mathrm{am}\,\beta\cos\mathrm{am}(\alpha\pm\beta\pm iK')+ik'^2\sin\mathrm{am}\,\alpha\sin\mathrm{am}\,\beta\sin\mathrm{am}\,(\alpha\pm\beta\pm iK')$$
$$-\frac{\varDelta\,\mathrm{am}\,\alpha\,\varDelta\,\mathrm{am}\,\beta\,\varDelta\,\mathrm{am}(\alpha\pm\beta\pm iK')}{k} = 0,$$

so findet man für die obigen vier Gleichungen folgende Auflösungen:

I. Man setze

$$\cos\mathrm{am}\,\alpha\cos\mathrm{am}\,\beta = \frac{\cos\mathrm{am}(\delta_2+\delta_3)\cos\mathrm{am}(\delta_2-\delta_3)}{\cos\mathrm{am}(\zeta+\sigma)}.$$

$$\varDelta\,\mathrm{am}\,\alpha\,\varDelta\,\mathrm{am}\,\beta = \frac{\varDelta\,\mathrm{am}(\delta_2+\delta_3)\varDelta\,\mathrm{am}(\delta_2-\delta_3)}{\varDelta\,\mathrm{am}(\zeta+\sigma)},$$

$$\omega'=\alpha+\beta,\quad \text{oder}\quad \omega'=\alpha-\beta.$$

II. Man setze

$$\sin\mathrm{am}\,\alpha'\sin\mathrm{am}\,\beta' = \frac{\sin\mathrm{am}(\delta_2+\delta_3)\sin\mathrm{am}(\delta_2-\delta_3)}{\sin\mathrm{am}(\zeta+\sigma)},$$

$$\varDelta\,\mathrm{am}\,\alpha'\,\varDelta\,\mathrm{am}\,\beta' = k'\frac{\varDelta\,\mathrm{am}(\delta_2+\delta_3)\varDelta\,\mathrm{am}(\delta_2-\delta_3)}{\varDelta\,\mathrm{am}(\zeta+\sigma)},$$

$$\omega'=\alpha'+\beta'+K,\quad \text{oder}\quad \omega'=\alpha'-\beta'-K.$$

III. Man setze

$$\sin\mathrm{am}\,\alpha''\sin\mathrm{am}\,\beta'' = \frac{1}{k}\cdot\frac{\sin\mathrm{am}(\delta_2+\delta_3)\sin\mathrm{am}(\delta_2-\delta_3)}{\sin\mathrm{am}(\zeta+\sigma)},$$

$$\cos\mathrm{am}\,\alpha''\cos\mathrm{am}\,\beta'' = \frac{ik'}{k}\cdot\frac{\cos\mathrm{am}(\delta_2+\delta_3)\cos\mathrm{am}(\delta_2-\delta_3)}{\cos\mathrm{am}(\zeta+\sigma)},$$

$$\omega'=\alpha''+\beta''+K+iK\quad \text{oder}\quad \omega'=\alpha''-\beta''-K-iK'$$

IV. Man setze

$$\frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha'''\sin\mathrm{am}\,\beta'''}{\varDelta\,\mathrm{am}\,\alpha'''\,\varDelta\,\mathrm{am}\,\beta'''} = \frac{i}{k'}\cdot\frac{\sin\mathrm{am}(\delta_2+\delta_3)\sin\mathrm{am}(\delta_2-\delta_3)\varDelta\,\mathrm{am}(\zeta+\sigma)}{\varDelta\,\mathrm{am}(\delta_2+\delta_3)\varDelta\,\mathrm{am}(\delta_2-\delta_3)\sin\mathrm{am}(\zeta+\sigma)},$$

$$\frac{\cos\mathrm{am}\,\alpha'''\cos\mathrm{am}\,\beta'''}{\varDelta\,\mathrm{am}\,\alpha'''\,\varDelta\,\mathrm{am}\,\beta'''} = \frac{1}{k}\cdot\frac{\cos\mathrm{am}(\delta_2+\delta_3)\cos\mathrm{am}(\delta_2-\delta_3)\varDelta\,\mathrm{am}(\zeta+\sigma)}{\varDelta\,\mathrm{am}(\delta_2+\delta_3)\varDelta\,\mathrm{am}(\delta_2-\delta_3)\cos\mathrm{am}(\zeta+\sigma)},$$

$$\omega'=\alpha'''+\beta'''+iK'\quad \text{oder}\quad \omega'=\alpha'''-\beta'''-iK'$$

Man erhält so also wirklich acht verschiedene Werthe von ω', und in den

Ausdrücken

$$v_1 = \frac{\omega'}{2} + pK + qiK', \quad v_2 = -\frac{\omega'}{2}$$

die Argumente der Berührungspunkte.

§. 25.

Andre Bestimmung der Doppeltangenten.

Für das Studium der gegenseitigen Lage dieser Punkte ist es aber zweckmässiger auf die Gleichungen (81.) zurückzugehen. Setzt man

$$v_i' = \log\left\{\frac{H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_2-v_i\right)}{H\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_2-v_i\right)}\cdot\sqrt[4]{\frac{H(\zeta+\sigma-\delta_2-\delta_3)H(\zeta+\sigma-\delta_2+\delta_3)}{H(\zeta+\sigma+\delta_2+\delta_3)H(\zeta+\sigma+\delta_2-\delta_3)}}\right\},$$

$$v_i'' = \log\left\{\frac{H\left(-\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_3-v_i\right)}{H\left(-\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_3-v_i\right)}\cdot\sqrt[4]{\frac{H(\zeta+\sigma+\delta_2+\delta_3)H(\zeta+\sigma-\delta_2+\delta_3)}{H(\zeta+\sigma-\delta_2-\delta_3)H(\zeta+\sigma+\delta_2-\delta_3)}}\right\},$$

so nehmen jene Gleichungen, mit Hinzufügung der Perioden, die Gestalt an:

$$v_1+v_2+v_3+v_4 = 2pK+2qiK',$$

$$v_1'+v_2'+v_3'+v_4' = 2h'i\pi+\frac{2qi\pi\delta_2}{K},$$

$$v_1''+v_2''+v_3''+v_4'' = 2h''i\pi+\frac{2qi\pi\delta_3}{K},$$

Lässt man nun für eine Doppeltangente die v paarweise gleich werden, und bezeichnet durch v, v_0 die Argumente der Berührungspunkte, so gehen diese Gleichungen über in

$$v+v_0 = pK+qiK',$$

$$v'+v_0' = h'i\pi+\frac{qi\pi\delta_2}{K},$$

$$v''+v_0'' = h''i\pi+\frac{qi\pi\delta_3}{K}.$$

Zwischen den ganzen Zahlen p, q, h', h'' besteht die in §. 13. allgemein entwickelte Relation

$$(q+1)(p+1)+h'+h'' \equiv 1 \pmod{2}.$$

Man kann dieselbe für den vorliegenden Fall folgendermassen ableiten. Nach der bekannten Formel

$$H(u+v)H(u-v)\,\Theta^2(o) = H^2(u)\Theta^2(v)-\Theta^2(u)H^2(v)$$

hat man

$$e^{h'i\pi+\frac{qi\pi\delta_2}{K}} = \mu\cdot\frac{H^2\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_2-\frac{pK+qiK'}{2}\right)\Theta^2\frac{v-v_0}{2}-H^2\frac{v-v_0}{2}\,\Theta^2\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_2-\frac{pK+qiK'}{2}\right)}{H^2\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_2-\frac{pK+qiK'}{2}\right)\Theta^2\frac{v-v_0}{2}-H^2\frac{v-v_0}{2}\,\Theta^2\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_2-\frac{pK+qiK'}{2}\right)},$$

$$e^{h''i\pi+\frac{qi\pi\delta_3}{K}} = \nu\cdot\frac{H^2\left(-\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_3-\frac{pK+qiK'}{2}\right)\Theta^2\frac{v-v_0}{2}-H^2\frac{v-v_0}{2}\,\Theta^2\left(-\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_3-\frac{pK+qiK'}{2}\right)}{H^2\left(-\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_3-\frac{pK+qiK'}{2}\right)\Theta^2\frac{v-v_0}{2}-H^2\frac{v-v_0}{2}\,\Theta^2\left(-\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_3-\frac{pK+qiK'}{2}\right)},$$

wo

$$\mu = \sqrt{\frac{H(\zeta+\sigma-\delta_2-\delta_3)H(\zeta+\sigma-\delta_2+\delta_3)}{H(\zeta+\sigma+\delta_2+\delta_3)H(\zeta+\sigma+\delta_2-\delta_3)}},$$

$$\nu = \sqrt{\frac{H(\zeta+\sigma+\delta_2+\delta_3)H(\zeta+\sigma-\delta_2+\delta_3)}{H(\zeta+\sigma-\delta_2-\delta_3)H(\zeta+\sigma+\delta_2-\delta_3)}}.$$

Bestimmt man nun den Quotienten $\Theta^2\frac{v-v_0}{2} : H^2\frac{v-v_0}{2}$ aus beiden Gleichungen, so findet sich

$$\frac{H^2\frac{v-v_0}{2}}{\Theta^2\frac{v-v_0}{2}} = k\sin^2\mathrm{am}\frac{v-v_0}{2}$$

$$= \frac{\mu H^2\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_2-\frac{pK+qiK'}{2}\right)-H^2\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_2-\frac{pK+qiK'}{2}\right).e^{h'i\pi+\frac{qi\pi\delta_2}{K}}}{\mu\Theta^2\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_2-\frac{pK+qiK'}{2}\right)-\Theta^2\left(\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_2-\frac{pK+qiK'}{2}\right).e^{h'i\pi+\frac{qi\pi\delta_2}{K}}}$$

$$= \frac{\nu H^2\left(-\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_3-\frac{pK+qiK'}{2}\right)-H^2\left(-\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_3-\frac{pK+qiK'}{2}\right).e^{h''i\pi+\frac{qi\pi\delta_3}{K}}}{\nu\Theta^2\left(-\frac{\zeta+\sigma}{2}+\delta_3-\frac{pK+qiK'}{2}\right)-\Theta^2\left(-\frac{\zeta+\sigma}{2}-\delta_3-\frac{pK+qiK'}{2}\right).e^{h''i\pi+\frac{qi\pi\delta_3}{K}}}.$$

Diese Gleichungen geben einerseits eine einfachere Bestimmung der Doppeltangente, indem $\frac{v-v_0}{2}$ direct gegeben wird. Andrerseits folgt aus der Vergleichung beider Ausdrücke, und mit Anwendung der obigen Formel:

$$\begin{aligned}0 = {} & \mu\nu H(\delta_2+\delta_3-pK-qiK')H(\zeta+\sigma+\delta_2-\delta_3)\\ & -\mu e^{h''i\pi+\frac{qi\pi\delta_3}{K}}H(\delta_2-\delta_3-pK-qiK')H(\zeta+\sigma+\delta_2+\delta_3)\\ & -\nu e^{h'i\pi+\frac{qi\pi\delta_2}{K}}H(-\delta_2+\delta_3-pK-qiK')H(\zeta+\sigma-\delta_2-\delta_3)\\ & +e^{(h'+h'')i\pi+\frac{qi\pi}{K}(\delta_2+\delta_3)}H(-\delta_2-\delta_3-pK-qiK')H(\zeta+\sigma-\delta_2+\delta_3).\end{aligned}$$

Nun ist

$$H(-\delta_2-\delta_3-pK-qiK') = (-1)^{(p+1)(q+1)}e^{-\frac{\pi qi}{K}(\delta_2+\delta_3)}.H(\delta_2+\delta_3-pK-qiK'),$$

$$H(-\delta_2+\delta_3-pK-qiK') = (-1)^{(p+1)(q+1)}e^{-\frac{\pi qi}{K}(\delta_2-\delta_3)}.H(\delta_2-\delta_3-pK-qiK').$$

An Stelle der obigen Gleichung kann man daher auch folgende setzen:

$$0 = [H(\delta_2+\delta_2-pK-qiK')H(\zeta+\sigma-\delta_2+\delta_3)$$

$$-\mu e^{h''i\pi+\frac{qi\pi\delta_3}{K}}H(\delta_2-\delta_3-pK-qiK')H(\zeta+\sigma+\delta_2+\delta_3)].(1+e^{i\pi((p+1)(q+1)+h'+h'')}).$$

Der letzte Factor muss also verschwinden, d. h. man muss haben

$$(p+1)(q+1)+h'+h'' \equiv 1 \pmod{2} \qquad \text{q. e. d.}$$

Bezeichnen wir nun eine Doppeltangente durch $(p, q; h', h'')$ so sind die vier Paare von Doppeltangenten folgende:

$$(0,0;0,0),\quad (0,0;1,1);\quad (1,0;1,0),\quad (1,0;0,1);$$

$$(0,1;1,0),\quad (0,1;0,1);\quad (1,1;1,0),\quad (1,1;0,1).$$

Da die entsprechenden Zahlen zweier Paare addirt stets eine gerade Zahl geben, so folgt der Satz:

Die Berührungspunkte je zweier Paare liegen auf einem Kegelschnitt, so dass es sechs Kegelschnitte dieser Art giebt, und sämmtliche Berührungspunkte dreimal auf zwei Kegelschnitten liegen.

Jede durch die Berührungspunkte zweier Paare gelegte Curve dritter Ordnung schneidet die Curve in vier Punkten, welche mit den Doppelpunkten in einem Kegelschnitt liegen, und sämmtliche Berührungspunkte sind die Grundpunkte eines Büschels von Curven vierter Ordnung.

Giessen, den 28. October 1864.

Hauptlehrsätze der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit drei Variabeln *).

(Von Herrn *Paul du Bois-Reymond.*)

Definitionen und Bezeichnungen.

Bezeichnung der Differentialgleichung.

1) In der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F \equiv F(x, y, z, p, q) = 0$$

sei z die abhängige Variabele, x und y seien die Argumente und es sei $p \equiv \frac{\partial z}{\partial x}$, $q \equiv \frac{\partial z}{\partial y}$.

Integraloberfläche.

2) x, y, z als reell vorausgesetzt, kann jedes Integral der Gleichung $F=0$ durch eine Fläche dargestellt werden, deren laufende orthogonale Coordinaten x, y, z sind. Eine solche Oberfläche soll *Integraloberfläche* heissen. (Siehe noch 3).

Normalenkegel und Haupteigenschaft der Integraloberfläche.

3) Bezeichnet man mit ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten einer die Integraloberfläche im Punkt x, y, z senkrecht passirenden Geraden, so ist

$$p = -\frac{\xi - x}{\zeta - z}, \quad q = -\frac{\eta - y}{\zeta - z}.$$

Die Kegelfläche:

$$F\left(x, y, z, -\frac{\xi - x}{\zeta - z}, -\frac{\eta - y}{\zeta - z}\right) = 0,$$

deren laufende Coordinaten ξ, η, ζ sind, soll der *Normalenkegel* genannt werden.

Eine Integraloberfläche ist demnach eine solche Oberfläche, deren Normalen durchweg Strahlen der für ihre Fusspunkte als Spitzen construirten Normalenkegel sind.

---

*) Ausgezogen aus des Verfassers Schrift: „Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln. (Leipzig, Joh. Ambr. Barth.)

Die Differentialgleichungen der Charakteristiken.

4) Die Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&F = 0\\
&dF \equiv \frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz+\frac{\partial F}{\partial p}dp+\frac{\partial F}{\partial q}dq = 0\\
&\frac{\partial F}{\partial p}dy-\frac{\partial F}{\partial q}dx = 0 \quad \dots\dots\dots \quad 1\\
&\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)dq-\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)dp = 0 \quad \dots \quad 2\\
&dz = p\,dx+q\,dy \quad \dots\dots\dots \quad 3
\end{aligned}\right| C_{,}$$

welche sich auf die Form:

$$F = 0$$

$$\left.\begin{aligned}
dx &= \frac{\frac{\partial F}{\partial p}}{p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}}dz \quad \dots \quad 1\\
dy &= \frac{\frac{\partial F}{\partial q}}{p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}}dz \quad \dots \quad 2\\
dp &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}}{p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}}dz \quad \dots \quad 3\\
dq &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}}{p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}}dz \quad \dots \quad 4
\end{aligned}\right| C$$

bringen lassen, sind diejenigen eines Curvensystems im Raum. Die zu diesem System gehörigen Curven sollen *Charakteristiken* heissen. Mit Hülfe der Gleichung $F=0$ kann man aus den Gleichungen C 1), 2), 3) q eliminiren, und man erhält dann Differentialgleichungen für die Variabeln x, y, z, p, deren Integrale drei Constanten enthalten.

Die Gleichung des Polarkegels.

5) Bringen wir die Gleichungen $C_{,}$ 1) und 3) auf die Form:

$$\zeta - z = p(\xi - x)+q(\eta - y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial p}(\eta - y)-\frac{\partial F}{\partial q}(\xi - x) = 0,$$

eliminiren aus diesen beiden Gleichungen und der Gleichung $F=0$ die Grössen p und q, so folgt die Gleichung:

$$\Phi \equiv \Phi\left(x, y, z, \frac{\xi-x}{\zeta-z}, \frac{\eta-y}{\zeta-z}\right) = 0,$$

die dem Polarkegel des Normalenkegels angehört. Den Kegel $\Phi=0$ werden wir schlechtweg den *Polarkegel* nennen.

Die Strahlen des Polarkegels sind die Tangenten an die seine Spitze passirenden Charakteristiken.

Grenzcharakteristiken.

6. Sie sind überhaupt Tangenten an alle diejenigen seine Spitze passirenden Curven, welche die totale Differentialgleichung:

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0$$

definirt. Wir werden diese allgemeine Klasse von Curven *Grenzcharakteristiken* nennen.

Der Theorie erster Theil.

Die analytisch gefundenen Differentialgleichungen C der Charakteristiken werden als bekannt vorausgesetzt, und auf Grund dieser Kenntniss werden einige allgemeine Eigenschaften der Integraloberflächen festgestellt.

Satz I.

Geometrische Definition eines Charakteristikensystems.

Vergleichen wir das System:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{\frac{\partial F}{\partial p}}{p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}}\,dz \\ dy &= \frac{\frac{\partial F}{\partial q}}{p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}}\,dz \\ dp &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}}{p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}}\,dz \end{aligned}\right| C$$

(q mit Hülfe von $F=0$ eliminirt gedacht) mit irgend einem System:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \psi(x, y, z, p) dz \\ dy &= \psi_1(x, y, z, p) dz \\ dp &= \psi_2(x, y, z, p) dz \end{aligned}\right| D$$

in dem die Functionen ψ beliebig sind, um die geometrischen Eigenthümlichkeiten des ersteren zu erkennen.

Aus den zwei ersten Gleichungen D die Grösse p eliminirt, folgt, dass sich die zum zweiten System gehörigen Curven ebenfalls in jedem Punkte des Raumes in einer Kegelfläche schneiden. Ausserdem wird beim System D ebenso gut wie bei C eine Curve bestimmt durch die Bedingung, einen gegebenen Punkt unter gegebener Neigung (diese Neigung muss unter den Strahlen des zu jenem Punkte gehörigen Kegels vertreten sein) zu passiren. Dies haben beide Systeme C und D gemein. Folgendes ist das dem System C eigenthümliche Merkmal.

Wir denken uns drei parallele Ebenen einander unendlich nahe durch den Raum gelegt: eine *untere*, eine *mittlere*, und eine *obere*. Zu einem Punkt k_u der unteren Ebene als Spitze construiren wir den Polarkegel $\Phi_u = 0$, dessen Fläche die mittlere Ebene in der Curve K_m schneiden mag. Nun construiren wir die Umhüllungsfläche der für alle Punkte der Curve K_m als Spitze construirten Kegel $\Phi_m = 0$. Diese Umhüllungsfläche soll die obere Ebene in der Curve U_o schneiden. Ausserdem construiren wir noch für irgend einen Punkt k_m der Curve K_m als Spitze den Kegel Φ_m, dessen Fläche die obere Ebene in der Curve K_o schneiden wird, und es heisse k_o der Berührungspunkt der Curven K_o und U_o. Auf der Curve K_o nehmen wir noch in der Nähe von k_o einen anderen Punkt k_o' an.

Dies vorausgeschickt, wird das System C dadurch definirt, dass, wenn zur Construction einer seiner Curven (wie dies genügt) ein Punkt k_u und ein daranstossendes Element $\overline{k_u k_m}$ gegeben ist, das folgende Element allemal durch den Berührungspunkt der Curven K_o und U_o geht; d. h. $\overline{k_m k_o}$ ist das folgende Element. Ein drittes Element, etc. wird auf dieselbe Weise construirt. Während bei dem System D das zweite Element z. B. durch $\overline{k_m k_o'}$ dargestellt ist, d. h. eine Lage hat, die keiner allgemeinen geometrischen Definition fähig ist, und von den jedesmaligen Eigenschaften der Functionen ψ, ψ_1, ψ_2 abhängt.

Ein jedes räumliche Curvensystem, welches die obige Bedingung erfüllt, nennen wir ein Charakteristikensystem, und umgekehrt wird diese Bedingung von jedem Charakteristikensystem einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung erfüllt.

Satz II.

Die Oerter von sich schneidenden Charakteristiken sind stets Integraloberflächen; und umgekehrt: die Integraloberflächen, wofern sie nicht singuläre Auflösungen darstellen, sind stets Oerter von sich schneidenden Charakteristiken.

Denkt man sich mehrere in sehr kleinen Abständen auf einander folgende Charakteristiken C_0, C_1, C_2 u. s. f., so

ist der Ort dieser Charakteristiken allemal dann eine Integraloberfläche, wenn sie sich successiv schneiden, d. h. wenn C_0 von C_1, C_1 von C_2 u. s. f. geschnitten wird: *Diese Schnittpunkte mögen im Endlichen oder Unendlichen liegen, reell oder imaginär sein.*

Der Ort von sich nicht schneidenden Charakteristiken ist *nie* eine Integraloberfläche. (Nur des Falles der singulären Auflösungen ist hier zu gedenken, welche Oertern von Punkten entsprechen, in denen sich der Normalenkegel auf eine oder mehrere Geraden reducirt. Diese Flächen sind überhaupt nicht Oerter von den im Satz I. definirten Charakteristiken.)

Aus dem obigen Satz folgt eine wichtige Analogie zwischen den Integralen der Gleichung $F(p,q)=0$ und denen der Gleichung $F(x,y,z,p,q)=0$. Die erste Gleichung hat zu Integralen den Kegel, die Ebene und die gewöhnliche Abwickelbare. Die Integrale der Gleichung $F(x, y, z, p, q)=0$ zerfallen in folgende Klassen:

1) Der Schnittpunkt der Charakteristiken ist im Endlichen, reell oder imaginär, und alle Charakteristiken C_0, C_1, C_2, ... schneiden sich in einem Punkt. — *Conoide.* Sie entsprechen dem Kegel als Integral der Gleichung $F(p, q)=0$.
2) Der Schnittpunkt ist im Unendlichen reell oder imaginär. — *Planoide.* Sie entsprechen der Ebene als Integral der Gleichung $F(p, q)=0$.
3) Die successiven Schnittpunkte der Charakteristiken C_0 mit C_1, C_1 mit C_2, u. s. f. sind im Endlichen, reell und verschieden, und haben zum Ort eine Curve. — *Integraloberflächen mit Rückkehrkanten* Sie entsprechen der gewöhnlichen Abwickelbaren als Integral der Gleichung $F(p, q)=0$.
4) Die Schnittpunkte sind verschieden, endlich und imaginär, wie bei den gewöhnlichen Canalflächen. Diese Klasse ist unter den Integralen *der Gleichung* $F(p, q)=0$ nicht vertreten.

Die *Conoide* sind Integrale mit *drei* Parametern.

Die *Planoide* sind Integrale mit *zwei* Parametern.

Die Integraloberflächen ad 3) und 4) hängen von willkürlichen Functionen ab.

Einige bemerkenswerthe Eigenschaften der erwähnten Klassen von Integralen.

1) Construction der Conoide. Man zieht auf der Fläche eines Polarkegels $\Phi = 0$, seiner Spitze unendlich nahe, die Curve K_0, und construirt die Umhüllungsfläche der Polarkegel, die ihre Spitze auf K_0 haben. Auf dieser Umhüllungsfläche zieht man der Curve K_0 unendlich nahe die Curve U_0, sucht dann die Umhüllungsfläche der Polarkegel, die ihre Spitze auf U_0 haben. Auf dieser Umhüllungsfläche wird dann die U_0 unendlich nahe Curve U_1 angenommen, u. s. f. Der Ort der Curven K_0, U_0, U_1, u. s. f. ist das zur Spitze von $\Phi = 0$ gehörige Conoid.
2) Das Conoid ist die Umhüllungsfläche aller *einen* Punkt enthaltenden Integraloberflächen.
3) Alle Integraloberflächen die *eine* Charakteristik gemein haben, berühren sich längs dieser Charakteristik.
4) Construirt man zu irgend einem Punkt k der Rückkehrkante einer Integraloberfläche der dritten Klasse als Spitze das Conoid, so hat dies Conoid mit der Integraloberfläche die den Punkt k passirende Charakteristik gemein, und beide Oberflächen *osculiren* sich längs dieser Charakteristik.
5) Methode um zu erkennen, welcher Classe ein gegebenes Integral mit zwei Constanten angehört. Es sei:

$$f \equiv f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$$

die Gleichung irgend einer nach zwei Parametern variabelen Integraloberfläche der Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$. Hat nun die durch Variation von γ entstehende Oberflächenschaar

$$f' \equiv \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$$

eine Umhüllungsfläche, und wird $f = 0$ von dieser Umhüllungsfläche geschnitten, so ist $f = 0$ eine Integraloberfläche mit einer Rückkehrkante (von der dritten Klasse). Hat $f' = 0$ keine Umhüllungsfläche, so ist $f = 0$ die Gleichung der Planoide. Schneiden sich die Oberflächen $f' = 0$ in einer Curve, so ist $f = 0$ die Gleichung der Conoide.

Satz III.

Von den Grenzbedingungen.

Man kann durch jede Raumcurve eine reelle Integraloberfläche legen zwischen Grenzen, welche bestimmt werden, wie folgt:

Die Gleichungen der Curve seien:

$$\lambda\,(x, y, z) = 0,$$

$$\lambda_1(x, y, z) = 0.$$

Diese Curve wird zwischen solchen Grenzwerthen der Variablen z auf einer reellen Integraloberfläche liegen können, zwischen denen die Gleichungen:

$$\lambda(x, y, z) = 0, \quad \lambda_1(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

$$p\Big(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\lambda_1}{\partial z} - \frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\lambda_1}{\partial y}\Big) - q\Big(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\lambda_1}{\partial z} - \frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\Big) + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\lambda_1}{\partial y} - \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\lambda_1}{\partial x} = 0,$$

nachdem man daraus x und y eliminirt hat, ein reelles Werthepaar für p und q ergeben.

Oder geometrisch. *Denkt man sich auf der Curve $\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$ einen Punkt $\mathfrak{P}$ beweglich, so kann man durch diese Curve zwischen solchen Grenzlagen von $\mathfrak{P}$ eine reelle Integraloberfläche legen, innerhalb deren die durch den Punkt $\mathfrak{P}$ gelegte Normalebene an die Curve $\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$ allerwärts den für $\mathfrak{P}$ als Spitze construirten Normalenkegel schneidet.*

Dies der allgemeine Satz. Folgendes sind die wichtigsten Ergänzungen, deren er bedarf.

1) Man kann (Grenzfälle ausgenommen) stets mindestens zwei Integraloberflächen durch eine gegebene Grenzkurve legen. Nämlich stets soviel als die durch $\mathfrak{P}$ gelegte Normalebene Strahlen des für $\mathfrak{P}$ als Spitze construirten Normalenkegels schneidet, oder (analytisch) soviel, als die Gleichungen (I.) reelle Werthepaare für p und q ergeben.

2) Je näher die Elemente der Grenzcurve dem Polarkegel sind, unter desto kleineren Winkeln schneiden sich die durch die Grenzcurve gelegten Integraloberflächen. Fallen die Elemente der Grenzcurve mit Polarkegelstrahlen zusammen, so kann die Grenzcurve entweder a) nur die beiden Gleichungen C 1) und 2):

$$dx = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial p}}{p\dfrac{\partial F}{\partial p} + q\dfrac{\partial F}{\partial q}}\, dz,$$

$$dy = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial q}}{p\dfrac{\partial F}{\partial p} + q\dfrac{\partial F}{\partial q}}\, dz,$$

(q durch $F = 0$ eliminirt, und für p eine beliebige Function von z eingesetzt) erfüllen, mit anderen Worten, sie kann irgend eine Lösung der totalen Differentialgleichung $\Phi\left(x, y, z, \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0$ sein, oder b) sie kann eine Charakteristik sein, welche die drei Gleichungen C 1), 2), 3) erfüllt.

Im Falle *a*) bestimmt sie die Integraloberfläche eindeutig, indem sie deren Rückkehrkante wird. Ich nannte sie daher (Definitionen etc. 6) *Grenzcharakteristik*.

Im Falle *b*), wenn sie eine gewöhnliche Charakteristik ist, lässt sie die Integraloberfläche vollkommen unbestimmt. Und es gilt dann das aus III. folgende

Corollar.

Eine Integraloberfläche wird nicht bestimmt durch die Bedingung, sie müsse durch eine, oder eine endliche Anzahl gegebener Charakteristiken gehen, ebenso wenig wie eine Curve bestimmt ist durch die Bedingung, eine endliche Zahl gegebener Punkte enthalten zu sollen. Eine Integraloberfläche wird ebenfalls nicht bestimmt durch die Bedingung, dass sie eine gegebene Charakteristik passiren soll, und dass sie längs dieser Charakteristik eine beliebige endliche Anzahl von Bedingungsgleichungen zwischen z, seinen Differentialquotienten und den Werthen, welche x und y längs der Charakteristik erhalten, zu erfüllen hat.

Der Theorie zweiter Theil.

Die Kenntniss der Differentialgleichungen (C) der Charakteristiken wird nicht vorausgesetzt. Sondern die Integraloberfläche wird *ohne Hülfe der Analysis* auf Grund der Kegeltheorie *convergent* construirt.

Zur Construction der Charakteristiken und Integraloberflächen, wenn die Bekanntschaft mit den Differentialgleichungen C 3) und 4) nicht vorausgesetzt wird, bedarf es eines neuen geometrischen Hülfsmittels: des *Facettekegels.*

nämlich einer dritten, ausser dem Polarkegel und dem Normalenkegel, für jeden Punkt des Raumes als Spitze zu construirenden Kegelfläche. Man kann die Gleichung des Facettekegels auf doppelte Weise finden:

1) Aus der Gleichung des Normalenkegels $F(x, y, z, p, q) = 0$, wo $p = -\frac{\xi - x}{\zeta - z}$, $q = -\frac{\eta - y}{\zeta - z}$ ist und ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten der Normalenkegelfläche vorstellen. Die Gleichung des Facettekegels folgt durch Elimination von p und q aus den Gleichungen:

$$F = 0, \quad p(\xi_1 - x) + q(\eta_1 - y) = \zeta_1 - z,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi_1 - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta_1 - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta_1 - z) = 0,$$

ξ_1, η_1, ζ_1 sind die laufenden Coordinaten der Facettekegelfläche.

2) aus der Gleichung des Polarkegels: $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$, wo $a = \frac{\xi - x}{\zeta - z}$, $b = \frac{\eta - y}{\zeta - z}$ ist, und ξ, η, ζ nun die laufenden Coordinaten der Polarkegelfläche vorstellen. Die Gleichung des Facettekegels folgt wieder durch Elimination von a und b aus den Gleichungen:

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a}\left(a - \frac{\xi_1 - x}{\zeta_1 - z}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial b}\left(b - \frac{\eta_1 - y}{\zeta_1 - z}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\xi_1 - x) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(\eta_1 - y) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(\zeta_1 - z) = 0,$$

ξ_1, η_1, ζ_1 wieder die laufenden Coordinaten der Facettekegelfläche

Durch beide Operationen gelangt man zu derselben Gleichung:

$$\Psi \equiv \Psi\left(x, y, z, \frac{\xi_1 - x}{\zeta_1 - z}, \frac{\eta_1 - y}{\zeta_1 - z}\right) = 0$$

des *Facettekegels.*

Satz I.

Die Haupteigenschaft des Facettekegels giebt folgender Satz an:

Man denke sich um die Spitze $\mathfrak{P}$ eines Polarkegels $\Phi = 0$ eine Kugel von unendlich kleinem Halbmesser ϱ construirt. Auf der Oberfläche dieser Kugel sei die Spitze $\mathfrak{P}_1$ eines zweiten Polarkegels $\Phi_1 = 0$ beweglich gedacht. f sei die Curve in welcher der Facettekegel, dessen Spitze $\mathfrak{P}$ ist, die Kugeloberfläche schneidet. Mit ε soll endlich bezeichnet werden der Winkel, um welchen eine durch die Linie $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1}$ gehende Ebene gedreht werden muss, um nach einander die Kegel $\Phi = 0$ und $\Phi_1 = 0$ zu berühren. Dann *ist der Winkel ε für alle Lagen von $\mathfrak{P}_1$ (in denen er überhaupt einen Sinn hat) von*

der Ordnung ϱ, mit Ausnahme des Falles, wo $\mathfrak{P}_1$ in die Curve f gelangt. Hier ist ε von der Ordnung ϱ^2. Wird ε als positiv oder negativ angesehen, jenachdem die durch $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1}$ gelegte Tangentialebene an den Kegel $\Phi = 0$ den Kegel $\Phi_1 = 0$ schneidet oder daran vorbeigeht, so trennt die Curve f auf der Kugeloberfläche die Gebiete, für welche ε positiv ist, von denen für welche ε negativ ist.

Hieraus folgt, *dass die Umhüllungsfläche der Polarkegel allemal dann eine abwickelbare Oberfläche ist, wenn die Curve, in der die Spitzen der Polarkegel liegen, der totalen Differentialgleichung $\Psi\left(x, y, z, \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0$ genügt.*

Aus den oben angegebenen Eigenschaften des Facettekegels ergiebt sich folgende neue

Construction der Charakteristiken.

Satz II.

Für einen Punkt $\mathfrak{P}$ construirt man den Kegel $\Phi = 0$, geht auf einem Strahl s des Kegels $\Phi = 0$ bis zu einem, $\mathfrak{P}$ sehr nahen, Punkt $\mathfrak{P}_1$, und construirt für den Punkt $\mathfrak{P}_1$ als Spitze die Kegel $\Phi_1 = 0$, $\Psi_1 = 0$. Dann legt man an den Kegel $\Phi = 0$ eine Tangentialebene durch den Strahl s. Diese mag den Kegel $\Psi_1 = 0$ in einem Strahl σ_1 schneiden. Trifft nun die an den Kegel $\Phi_1 = 0$ durch den Strahl σ_1 gelegte Tangentialebene den Strahl s_1 des Kegels $\Phi_1 = 0$, so ist dieser das zweite Element der Charakteristik, deren erstes s war. Die ferneren Elemente werden ebenso construirt.

Und folgende:

Construction der Integraloberflächen.

Satz III.

Ich beginne damit eine aus unendlich kleinen Linienelementen zusammengesetzte (polygonale) Curve zu construiren, deren Elemente durchweg Strahlen von Facettekegeln sind: Für den Punkt $\mathfrak{P}$ als Spitze wird der Facettekegel $\Psi = 0$ construirt. Auf einem Strahl σ dieses Kegels gelangen wir zum Punkt $\mathfrak{P}'$, für den, als Spitze, der Kegel $\Psi' = 0$ construirt wird. Auf dem Strahl σ' des Kegels $\Psi' = 0$ kommen wir zum Punkt $\mathfrak{P}''$, u. s. f. So entsteht die *polygonale Facettelinie:* $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, u. s. f., deren Elemente $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'}$, $\overline{\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''}$, $\overline{\mathfrak{P}''\mathfrak{P}'''}$, u. s. f. wir mit σ, σ', σ'', u. s. f. bezeichnen werden. Von dieser Curve (deren eine Projection willkürlich ist) geht die Construction aus.

Für die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, u. s. f. als Spitzen werden die Kegel $\Phi = 0$, $\Phi' = 0$, $\Phi'' = 0$, u. s. f. construirt. Die durch σ an $\Phi = 0$ gelegte Tangentialebene berührt den Kegel $\Phi = 0$ im Strahl s, die durch σ' an $\Phi' = 0$ gelegte Tangentialebene berührt $\Phi' = 0$ im Strahl s', u. s. f.

Zu einem $\mathfrak{P}$ unendlich nahen Punkt $\mathfrak{P}_1$ auf dem Strahl s wird der Facettekegel $\Psi_1 = 0$ construirt, dessen Strahl σ_1 den Strahl s' im Punkt $\mathfrak{P}'_1$ treffen mag. Zum Punct $\mathfrak{P}'_1$ wird der Kegel $\Psi'_1 = 0$ construirt, dessen Strahl σ'_1 den Strahl s'' im Punkt $\mathfrak{P}''_1$ treffen mag, u. s. f. So entsteht die Reihe von Punkten: $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{P}''_1$, u. s. f., welche durch die Strahlen σ_1, σ'_1, σ''_1, u. s. f. verbunden *die zweite polygonale Facettelinie* liefern. Genau so wie diese construirt man die dritte $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}'_2$, $\mathfrak{P}''_2$, u. s. f., eine vierte, u. s. f. Die Facettelinien beginnen alle in den aufeinander folgenden Punkten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, u. s. f. der Ausgangscharakteristik.

Der Ort der aufeinanderfolgenden Facettelinien, denkt man sich die Länge der Strahlen σ, σ', σ'', u. s. f. s, s_1, s_2, u. s. f. verschwindend, geht man also zur Grenze über, ist eine stetige Integraloberfläche der Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$.

Bemerkung. Diese Construction einmal festgestellt, ist es leicht die Construction an irgend eine andere Curve (deren Elemente nicht Facettekegelstrahlen sind) anzulehnen.

Corollar.

Wenn sich zwei Curven $x = \varphi(z)$, $y = \varphi_1(z)$; $x_1 = \psi(z)$, $y_1 = \psi_1(z)$ in einem Punkte schneiden, und sie erfüllen in diesem Punkt die Gleichungen:

$$F = 0, \quad p\frac{dx}{dz} + q\frac{dy}{dz} = 1, \quad p\frac{dx_1}{dz} + q\frac{dy_1}{dz} = 1,$$

$$0 = \left\{\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right\}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{dy}{dz} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{dx}{dz}\right)\left(p\frac{d^2x_1}{dz^2} + q\frac{d^2y_1}{dz^2}\right)\right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{dy_1}{dz} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{dx_1}{dz}\right)\left(p\frac{d^2x}{dz^2} + q\frac{d^2y}{dz^2}\right)\right] + \left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{dy}{dz} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{dx}{dz}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx_1}{dz} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy_1}{dz} + \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$
$$- \left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{dy_1}{dz} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{dx_1}{dz}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dz} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dz} + \frac{\partial F}{\partial z}\right),$$

so haben die durch beide Curven gelegten Integraloberflächen die den Durchschnittspunkt passirende Charakteristik gemein, die Integraloberflächen *oskuliren* sich längs dieser Charakteristik und ihre Rückkehrkanten berühren sich in der Charakteristik.

Anhang.

Ueber die allgemeinste Form der Substitution, durch welche eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in eine andere solche übergeführt werden kann: als Beitrag zur Theorie der *Legendre*schen Substitution.

Aufgabe: Wie lassen sich auf die allgemeinste Weise in eine beliebige partielle Differentialgleichung $F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$ statt der Variabeln x, y, z drei neue Variabeln ξ, η, ζ einführen, und zwar so, dass die neue Gleichung ebenfalls eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung: $F_1\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right) = 0$ werde.

Wir setzen wieder $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ und analog $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \pi$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \varkappa$, indem wir uns z als Function von x und y; ζ als Function von ξ und η denken. Die Variabeln x, y, z werden mit den Variabeln ξ, η, ζ verbunden gedacht durch die Gleichungen:

$$x = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta, \pi, \varkappa),$$
$$y = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta, \pi, \varkappa),$$
$$z = \varphi_3(\xi, \eta, \zeta, \pi, \varkappa).$$

Die obige Aufgabe wird dann gelöst sein, wenn es gelungen ist, die Functionen φ_1, φ_2, φ_3 so zu bestimmen, dass p und q, durch die neuen Variabeln ausgedrückt, die zweiten Differentialquotienten von ζ nach ξ und η nicht enthalten, und zwar durchaus unabhängig von einer zwischen x, y, z, mithin zwischen ξ, η, ζ etwa angenommenen Beziehung. Folgender Satz enthält die Auflösung des Problems.

Lehrsatz. Die Grössen p und q sind dann von den zweiten Differentialquotienten von ζ nach ξ und η frei, wenn die Functionen φ_1, φ_2, φ_3 folgende zwei Differentialgleichungen erfüllen:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + \pi \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \pi}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varkappa} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} + \pi \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \pi}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varkappa} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} + \pi \frac{\partial \varphi_3}{\partial \zeta}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \pi}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varkappa} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + \varkappa \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \pi}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varkappa} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} + \varkappa \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \pi}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varkappa} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} + \varkappa \frac{\partial \varphi_3}{\partial \zeta}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \pi}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varkappa} \end{vmatrix} = 0.$$

Daher bleibt eine von den Functionen φ_1, φ_2, φ_3 willkürlich, und hat man nach Belieben über diese verfügt, so ergeben sich die beiden andern aus den obigen Differentialgleichungen.

Diese Differentialgleichungen lassen eine Transformation zu, welche in gewissem Sinne einer Integration gleichkommt, insofern man nämlich aus den transformirten Gleichungen durch eine blosse Eliminationsrechnung alle den obigen Gleichungen genügenden Systeme der Functionen φ_1, φ_2, φ_3 ableiten kann. Nimmt man nämlich eine dieser Functionen z. B. φ_3 willkürlich an, aber nicht als Function von ξ, η, ζ, π, $\varkappa$ sondern als Function von ξ, η, ζ, x, y; so kann man die obigen Gleichungen überführen in folgende:

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi}+\pi\frac{\partial\varphi_3}{\partial\zeta} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial\eta}+\varkappa\frac{\partial\varphi_3}{\partial\zeta} = 0.$$

Mithin liefern diese Gleichungen, die dritte Gleichung $z = \varphi_3(\xi,\eta,\zeta,x,y)$ als gegeben vorausgesetzt, sofort die drei Functionen x, y, z von ξ, η, ζ, π, $\varkappa$. Zu bemerken ist noch, dass alsdann für p und q die sehr einfachen Ausdrücke:

$$p = \frac{\partial\varphi_3}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial\varphi_3}{\partial y}$$

folgen.

Berlin, 1865.

Ueber eine Vorsichtsmassregel beim Gebrauch des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten.

(Von Herrn *Bertram*.)

Wenn die Bedingungen, welche zwischen den Coordinaten eines Systems von Punkten stattfinden, durch Gleichungen ausgedrückt sind, so kann man diese Coordinaten als Functionen einer bestimmten Anzahl unabhängiger Variabelen darstellen, und das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten liefert dann — wenn man die Kräfte als gegeben annimmt — eine gleiche Anzahl Gleichungen, denen jene Variabelen genügen müssen, wenn das System im Gleichgewicht sein soll. Dies ist eine bekannte Wahrheit; dass aber, umgekehrt, wenn diese Gleichungen erfüllt sind, auch Gleichgewicht sei, ist nicht ebenso richtig; es kann der Fall eintreten, dass nicht *allen* Werthen der Variabelen, welche jene Gleichungen befriedigen, Gleichgewichtslagen entsprechen.

Um dies näher zu erörtern, bezeichnen wir die (rechtwinkligen) Coordinaten der Angriffspunkte der das System sollicitirenden Kräfte (ohne sie nach den Axen durch verschiedene Buchstaben zu unterscheiden) mit x_1, $x_2, \dots x_n$; die ihren Richtungen parallelen Kräfte mit $X_1, \dots X_n$; und die Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten mit

$$(1.)\qquad L_1 = 0,\quad L_2 = 0,\quad \dots\quad L_p = 0.$$

Die Gleichgewichtsgleichungen sind dann, wie bekannt:

$$(2.)\qquad \begin{cases} X_1 + \lambda_1 \dfrac{\partial L_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial L_2}{\partial x_1} + \dots + \lambda_p \dfrac{\partial L_p}{\partial x_1} = 0, \\ X_2 + \lambda_1 \dfrac{\partial L_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \dfrac{\partial L_2}{\partial x_2} + \dots + \lambda_p \dfrac{\partial L_p}{\partial x_2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ X_n + \lambda_1 \dfrac{\partial L_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \dfrac{\partial L_2}{\partial x_n} + \dots + \lambda_p \dfrac{\partial L_p}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

Es seien nun die x als Functionen der $n-p$ Grössen $q_1, \dots q_{n-p}$ so ausgedrückt, dass die Gleichungen (1.) identisch erfüllt werden, so ist

$$(3.)\qquad \frac{\partial L_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_r} + \frac{\partial L_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_r} + \dots + \frac{\partial L_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial q_r} = 0,$$

für alle i zwischen 1 und p und alle r zwischen 1 und $n-p$.

Aus (2.) und (3.) folgen die Gleichungen:

$$(4.)\quad \begin{cases} X_1\dfrac{\partial x_1}{\partial q_1}+X_2\dfrac{\partial x_2}{\partial q_1}+\cdots+X_n\dfrac{\partial x_n}{\partial q_1} = 0,\\ X_1\dfrac{\partial x_1}{\partial q_2}+X_2\dfrac{\partial x_2}{\partial q_2}+\cdots+X_n\dfrac{\partial x_n}{\partial q_2} = 0,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ X_1\dfrac{\partial x_1}{\partial q_{n-p}}+X_2\dfrac{\partial x_2}{\partial q_{n-p}}+\cdots+X_n\dfrac{\partial x_n}{\partial q_{n-p}} = 0, \end{cases}$$

und diese würde man aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten direct erhalten haben, wenn man in der Summe

$$\Sigma X\delta x+\Sigma\lambda\,\delta L$$

die x und δx durch die q und δq ausgedrückt hätte.

Es fragt sich nun, ob aus (4.) für die Grössen q nur solche Werthe folgen, aus welchen für die x ein den Gleichungen (1.) und (2.) genügendes Werthensystem resultirt. Bezeichnet man die linken Seiten der letzteren (2.) mit $U_1, U_2, \ldots U_n$, so kann man das System (2.) ersetzen durch das folgende:

$$(5.)\quad \begin{cases} U_1 b_1^1 + U_2 b_1^2 + \cdots + U_n b_1^n = 0,\\ U_1 b_2^1 + U_2 b_2^2 + \cdots + U_n b_2^n = 0,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ U_1 b_{n-p}^1 + U_2 b_{n-p}^2 + \cdots + U_n b_{n-p}^n = 0,\\ U_1 a_1^1 + U_2 a_1^2 + \cdots + U_n a_1^n = 0,\\ U_1 a_2^1 + U_2 a_2^2 + \cdots + U_n a_2^n = 0,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ U_1 a_p^1 + U_2 a_p^2 + \cdots + U_n a_p^n = 0, \end{cases}$$

worin die Grössen b und a ganz willkürlich gewählt werden können, wofern nur die aus ihnen gebildete Determinante D nicht verschwindet. Setzt man nun

$$b_r^i = \frac{\partial x_i}{\partial q_r},$$

so gehen die ersten $n-p$ Gleichungen (5.) in die Gleichungen (4.) über, umgekehrt können die Gleichungen (4.) die ersten $n-p$ Gleichungen (5.) ersetzen, und die letzten p kann man immer hinzufügen, da man die λ noch zur Disposition hat, während die Lage des Systems im Allgemeinen schon aus (4.) vollständig hervorgeht. Aber diese Wahl für die Elemente b ist nur gestattet, wenn für die Grössen q nicht solche Werthe angenommen werden,

für welche die Determinante D verschwinden muss, wie man auch die a annehmen möge. Erfüllen also gewisse Werthe von q die Gleichungen (4.), ziehen aber gleichzeitig $D=0$ nach sich, so kann man nicht ohne Weiteres behaupten, dass sie einer Gleichgewichtslage entsprechen.

Da die Determinante D unabhängig von den a nur dann verschwindet, wenn jede der Determinanten $n-p^{\text{ter}}$ Ordnung, welche aus den nach den q genommenen partiellen Differentialquotienten einer Combination $n-p^{\text{ter}}$ Klasse der Functionen $x_1, \dots x_n$ gebildet sind, für sich verschwindet, so lassen sich aus den n Gleichnngen von der Form:

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial x_i}{\partial q_2}dq_2+\cdots+\frac{\partial x_i}{\partial q_{n-p}}dq_{n-p} = dx_i,$$

auf keinerlei Weise $n-p$ auswählen, aus denen man die sämmtlichen Incremente der Variabelen q durch die der x bestimmen könnte, welche einer Verschiebung des Systems aus einer Lage entsprechen, wie sie durch $D=0$ bedingt ist. In einem solchen Falle hören also die Variabelen q auf durch die Lage des Systems vollständig bestimmt zu sein, und umgekehrt tritt der Fall $D=0$ bei solchen Lagen des Systems ein, welche für eine Anzahl k der Variabelen (q) bestimmte Werthe der Art erheischen, dass, nach ihrer Einführung in die für Coordinaten angenommenen Functionen, diese sich von selbst auf Functionen einer geringeren Anzahl von Variabelen als $n-p-k$ reduciren.

Handelt es sich z. B. um einen festen Körper, der sich um den Anfangspunkt O der im Raume festen Axen X, Y, Z drehen kann, so lassen sich die cosinus der Winkel, welche die durch O gelegten Hauptaxen des Körpers mit den Coordinatenaxen einschliessen, in bekannter Weise durch die drei Variabelen θ, φ, ψ ausdrücken, und also auch die Coordinaten x, y, z eines Punktes, der in Bezug auf die Hauptaxen die Coordinaten x_1, y_1, z_1 hat. Wird nun $\sin\theta=0$, so hängen die x und y nur noch von der einen Variabelen $\varphi+\psi$ ab; es ist also in einem Problem, in welchem die den Gleichungen (4.) entsprechenden Gleichungen befriedigt werden durch die Annahme $\sin\theta=0$, und etwa $\sin\psi=0$, nicht ohne Weiteres auf eine Gleichgewichtslage zu schliessen. Ein solches Problem ist das (z. B. von Herrn *Lottner**) behandelte) Problem: die Gleichgewichtslagen eines festen Körpers zu bestimmen, welcher sich um einen auf der rotirenden Erde festen Punkt drehen

*) Programm der Realschule zu Lippstadt, 1860.

kann, wenn der Schwerpunkt auf einer der Hauptaxen liegt, die durch den festen Punkt gehen.

Die Gleichgewichtsgleichungen werden hier:

1. $Msg_x \sin\theta \cos\psi = 0,$
2. $(A-B)\omega^2 \sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi = 0,$
3. $\omega^2 \sin\theta \cos\theta \{C - A\sin^2\varphi - B\cos^2\varphi\} = Ms\{g_x \cos\theta \sin\psi - g_z \sin\theta\};$

hier ist die Axe der Z parallel der Erdaxe durch den festen Punkt O nach Norden gezogen, die Axe der X senkrecht darauf in der Richtung des Radius des Parallelkreises; g_x, g_y sind die Componenten der Schwere in O nach diesen Axen; A, B, C die Trägheitsmomente des Körpers in Bezug auf diese Axen, M die Masse, und s die auf der negativen Axe Z_1 gezählte Entfernung des Schwerpunkts des Körpers von O; endlich ist ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde.

Die Gleichungen werden offenbar durch die Annahmen

$$\theta = 0, \quad \psi = 0$$

erfüllt; aber diese Annahmen liefern keine Gleichgewichtslage. Herr *Lottner* hat dies natürlich auch bemerkt, aber woher die Möglichkeit rührt, dass solche dem Problem fremde Wurzeln in die Gleichgewichtsbedingungen eintreten, schien mir einer besonderen Erörterung werth.

Berlin, 1865.

Ueber einige von *Steiner* behandelte Curven.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

Im 47ten Bande, pag. 4 dieses Journals behandelt *Steiner* drei Curven im Zusammenhange, von denen eine die *Hesse*sche Curve ist; die zweite hat Herr *Cremona* in seiner „Introd. ad una teoria geom. delle curve piane" die *Steiner*sche genannt. Letztere ist der geometrische Ort der Pole, deren erste Polare, genommen in Bezug auf eine gegebene Curve n^{ter} Ordnung, einen Doppelpunkt hat; die erste ist der Ort dieser Doppelpunkte selbst. Die dritte a. a. O. von *Steiner* behandelte Curve endlich ist die Enveloppe der Geraden welche den Doppelpunkt mit dem ihm zugehörigen Pole verbinden.

Die erste der genannten Curven besitzt im Allgemeinen weder Doppel- noch Rückkehrpunkte; Grad (g), Klasse (k), Anzahl von Doppeltangenten (t), Wendetangenten (w), Doppelpunkte (d) und Rückkehrpunkte (r) erfahren also für sie keine besondern Reductionen. Für die zweite Curve hat *Steiner* die Werthe g', k', t', w', d', r' angegeben, und Herr *Cremona* hat die synthetische Ableitung a. a. O. pag. 96 geliefert. Von der dritten Curve giebt *Steiner* nur die Klasse k'' an. Ich werde analytisch die Werthe von g', k', g'', k'' entwickeln; in der That genügt die Kenntniss dieser Zahlen, um auch t', w', d', r', t'', w'', d'', r'' sofort anzugeben. Denn diese drei Curven entsprechen sich Punkt für Punkt, und gehören daher nach einem früher von mir benutzten Ausdruck demselben *Geschlechte* an, d. h. es finden mit Rücksicht darauf, dass

$$\begin{gathered} g = 3n-6, \quad k = 3(n-2)(3n-7), \\ w = 9(n-2)(3n-8), \quad d = r = 0, \\ t = \tfrac{9}{2}(n-1)(n-2)(n-3)(3n-8) \end{gathered}$$

folgende Gleichungen statt (vgl. dieses Journal Band 64, pag. 98):

$$(1.)\quad \begin{cases} g'(g'-3)-2d'-2r' = g''(g''-3)-2d''-2r'' = g(g-3)-2d-2r \\ = k'(k'-3)-2t'-2w' = k''(k''-3)-2t''-2w'' = k(k-3)-2t-2w \\ = k'-2g'+r' \qquad = k''-2g''+r'' \qquad = k-2g+r \\ = g'-2k'+w' \qquad = g''-2k''+w'' \qquad = g-2k+w \\ = 2(p-1) = 9(n-2)(n-3), \end{cases}$$

aus denen, wenn man g', k', g'', k'' kennt, die übrigen Grössen leicht gefunden werden.

Wenn $u = 0$ die Gleichung der gegebenen Curve ist, und u_i, u_{ik} etc. die Differentialquotienten von u bedeuten, so bestimmt sich die Abhängigkeit des Doppelpunkts x von dem zugehörigen Pole y durch die Gleichungen

$$(2.)\quad \begin{cases} y_1 u_{11} + y_2 u_{12} + y_3 u_{13} = 0, \\ y_1 u_{21} + y_2 u_{22} + y_3 u_{23} = 0, \\ y_1 u_{31} + y_2 u_{32} + y_3 u_{33} = 0 \end{cases}$$

(vgl. dieses Journals Band 59, pag. 128). Man erhält daraus die *Steiner*sche Curve durch Elimination der y, und dieselbe ist also vom Grade $g' = 3(n-2)^2$.

Die Coordinaten α einer Tangente der *Steiner*schen Curve findet man aus den Formeln

$$(3.)\quad \begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0, \\ \alpha_1 dy_1 + \alpha_2 dy_2 + \alpha_3 dy_3 = 0. \end{cases}$$

Nun folgt aus der Differentiation von (2.):

$$(4.)\quad 0 = y_1 du_{i1} + y_2 du_{i2} + y_3 du_{i3} + u_{1i} dy_1 + u_{2i} dy_2 + u_{3i} dy_3.$$

Multiplicirt man nun die Gleichungen (2.) einmal mit x_1, x_2, x_3, das andere Mal mit dx_1, dx_2, dx_3 und addirt jedesmal, so kommt:

$$(5.)\quad \begin{cases} 0 = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3, \\ 0 = y_1 du_1 + y_2 du_2 + y_3 du_3; \end{cases}$$

und also wenn man (4.) mit x_i multiplicirt, und nach i summirt:

$$0 = u_1 dy_1 + u_2 dy_2 + u_3 dy_3.$$

Vergleicht man diese Gleichung, und die erste Gleichung (5.) mit (3.), so ergiebt sich

$$(6.)\quad \mu\alpha_1 = u_1, \quad \mu\alpha_2 = u_2, \quad \mu\alpha_3 = u_3.$$

Die Gleichung der *Steiner*schen Curve in Liniencoordinaten folgt also, wenn man aus diesen Gleichungen und aus der Gleichung

$$(7.)\quad 0 = \Delta = \Sigma \pm u_{11} u_{22} u_{33}$$

die x eliminirt. Soll die Tangente α durch einen bestimmten Punkt c gehen, so müssen die x den beiden Gleichungen genügen

$$\Delta = 0, \quad u_1 c_1 + u_2 c_2 + u_3 c_3 = 0.$$

Die Gesammtzahl ihrer Lösungen ist $k' = 3(n-1)(n-2)$.

Aus diesen beiden Bestimmungen folgen nun zusammen mit (1.) die folgenden Bestimmungen (*Steiner* und *Cremona* a. a. O.):

$$w' = 3(n-2)(4n-9),$$
$$r' = 12(n-2)(n-3),$$
$$d' = \tfrac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5),$$
$$t' = \tfrac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-3n-8).$$

Die Coordinaten einer Tangente β der dritten Curve sind durch die Gleichungen gegeben:

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\alpha_3 y_3 = 0,$$
$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3 = 0.$$

Soll diese Tangente durch einen bestimmten Punkt c gehen, so muss man haben

$$y_i = \mu x_i+\lambda c_i.$$

Dies in die Gleichungen (2.) gesetzt, giebt:

$$(n-1)\mu u_1+\lambda v_1 = 0,$$
$$(n-1)\mu u_2+\lambda v_2 = 0, \qquad (v_i = u_{1i}c_1+u_{2i}c_2+u_{3i}c_3)$$
$$(n-1)\mu u_3+\lambda v_3 = 0.$$

Man findet also die entsprechenden Werthe der x aus den Gleichungen

$$(8.)\qquad u_2v_3-v_2u_3 = 0,\quad u_3v_1-v_3u_1 = 0,\quad u_1v_2-v_1u_2 = 0.$$

Die gemeinsamen Lösungen der ersten beiden unter diesen Gleichungen sind $(2n-3)^2$ an der Zahl. Aber dabei sind die $(n-1)(n-2)$ Lösungen der Gleichungen $u_3 = 0$, $v_3 = 0$ auszuschliessen, für welche nur die ersten beiden Gleichungen (8.) verschwinden, nicht aber die letzte; und ferner ist die offenbar unbrauchbare Lösung $x_i = c_i$ auszuschliessen. Es bleiben also $k'' = 3(n-1)(n-2)$ Tangenten dieser Curve, welche sich durch einen gegebenen Punkt legen lassen (vgl. *Steiner* a. a. O.).

Betrachten wir jetzt den Schnitt einer Geraden mit dieser Curve. Ein Punkt z der Curve ist dadurch definirt, dass in ihm sich zwei nächste Geraden β schneiden, dass also

$$(9.)\qquad z_i = \mu x_i+\lambda y_i,$$

und auch

$$z_i = (\mu+d\mu)(x_i+dx_i)+(\lambda+d\lambda)(y_i+dy_i),$$

dass also

$$(10.)\qquad x_i d\mu+\mu dx_i+y_i d\lambda+\lambda dy_i = 0.$$

Damit aber ferner z auf einer bestimmten Geraden

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 = a_z = 0$$

liege, muss nach (9.)

$$\mu a_x + \lambda a_y = 0$$

sein. Daher kann man $\lambda = \rho a_x$, $\mu = -\rho a_y$ setzen, und (10.) nimmt die Form an:

$$(11.)\qquad x_i du + y_i d\lambda + \rho(a_x dy_i - a_y dx_i) = 0.$$

Setzen wir aus diesen Gleichungen die Werthe der dy_i in die Gleichungen (4.) ein, so findet sich:

$$0 = \rho a_x (y_1 du_{1i} + y_2 du_{2i} + y_3 du_{3i}) + \rho a_y du_i - (n-1) u_i d\mu,$$

oder was dasselbe ist:

$$0 = a_y \sum_k u_{ik}(\rho a_y dx_k - x_k d\mu) + a_x \sum_h \sum_k y_h u_{ihk}^{1}(\rho a_y dx_k - x_k d\mu).$$

Setzt man also der Kürze wegen:

$$(12.)\qquad v_{ik} = y_1 u_{1ik} + y_2 u_{2ik} + y_3 u_{3ik},$$

so folgt durch Elimination der Grössen $\rho a_y dx_k - x_k d\mu$:

$$(13.)\qquad \begin{vmatrix} a_y u_{11} + a_x v_{11} & a_y u_{12} + a_x v_{12} & a_y u_{13} + a_x v_{13} \\ a_y u_{12} + a_x v_{12} & a_y u_{22} + a_x v_{22} & a_y u_{23} + a_x v_{23} \\ a_y u_{13} + a_x v_{13} & a_y u_{23} + a_x v_{23} & a_y u_{33} + a_x v_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Nun verschwindet wegen (2.) die Determinante der u; und da wegen (2.) und (12.)

$$v_{i1} x_1 + v_{i2} x_2 + v_{i3} x_3 = 0,$$

so verschwindet die Determinante der v ebenfalls. Also ist (13.) durch $a_x . a_y$ theilbar, und die Gleichung (13.) geht dann in einen Ausdruck der Form

$$(14.)\qquad \Sigma\Sigma A_{ik} y_i y_k = 0$$

über. Inzwischen werden in Folge von (2.) die Producte $y_i y_k$ selbst den Unterdeterminanten U_{ik} von Δ proportional, und man kann also (14.) ersetzen durch die Gleichung

$$\Sigma\Sigma A_{ik} U_{ik} = 0,$$

welche nur noch die x enthält.

Bezeichnet man, um den links befindlichen Ausdruck genauer auszuführen, durch V_{ik} die Unterderminante der v, so geht (13.) zunächst mit Hinweglassung des Factors $a_x . a_y$ über in

$$a_y \Sigma U_{ik} v_{ik} + a_x \Sigma V_{ik} u_{ik} = 0.$$

Der erste Theil dieses Ausdrucks wird durch Einführung von U_{mk} für $y_m . y_h$ zu:

$$\Sigma\Sigma U_{ik} u_{ikh} U_{hm} a_m = \Sigma \Delta_h a_m U_{hm}.$$

Den zweiten Theil kann man umformen mit Hülfe der Theorie der Curven dritter Ordnung. Betrachten wir nämlich für den Augenblick die u_{ikh} als die Coefficienten einer solchen Curve, so ist $(n-2)\Sigma V_{ik} u_{ik}$ das dritte Glied der Determinante eines aus der Function dritter Ordnung und ihrer Determinante zusammengesetzten Ausdrucks. Bezeichnet man also durch T, S Ausdrücke, die aus den u_{ikh} so zummengesetzt sind, wie die in der Theorie der Curven dritter Ordnung so bezeichneten Ausdrücke aus den Coefficienten dieser Curve, so hat man (vgl. Bd. 55, p. 127 dieses Journals)

$$\Sigma V_{ik} u_{ik} = \frac{n.n-1.n-2}{36} T.u - \frac{S}{12}(n-2)^3.\Delta.$$

Da die Gleichung (14.) nur in Verbindung mit $\Delta = 0$ betrachtet wird, so kann man das letzte Glied fortlassen, und die Gleichung (14.) wird also:

$$(15.)\qquad \Sigma \Delta_h a_m U_{hm} + \frac{n.n-1.n-2}{36} T.u.a_x = 0.$$

Diese Gleichung ist vom Grade $5n-11$, und bestimmt also mit $\Delta = 0$ zusammen $3(n-2)(5n-11)$ Punkte x. Man hat also $g'' = 3(n-2)(5n-11)$.

Die Anwendung der Formeln (1.) giebt alsdann für die Singularitäten dieser Curve folgendes Schema:

$$\begin{aligned}
g'' &= 3(n-2)(5n-11),\\
k'' &= 3(n-1)(n-2),\\
w'' &= 0,\\
r'' &= 18(n-2)(2n-5),\\
d'' &= \tfrac{9}{2}(n-2)(5n-13)(5n^2-19n+16),\\
t'' &= \tfrac{9}{2}(n-2)^2(n^2-2n-1).
\end{aligned}$$

Man kann diese Resultate noch in folgenden Sätzen ausdrücken:

Auf der Hesseschen Curve giebt es immer $3(n-1)(n-2)$ *Punkte, für welche, wenn man sie als Doppelpunkte einer Polaren betrachtet und sie mit dem entsprechenden Pol verbindet, diese Gerade durch einen gegebenen Punkt p geht.*

Auf jeder Geraden giebt es $3(n-2)(5n-11)$ *solche Punkte p, für welche zwei der* $3(n-1)(n-2)$ *Geraden zusammenfallen.*

Es giebt $18(n-2)(2n-5)$ *Punkte p, für welche drei der Geraden zusammenfallen.*

Es giebt $\frac{3}{2}(n-2)(5n-13)(5n^2-19n+16)$ *solcher Punkte p, für welche zweimal zwei jener Geraden zusammenfallen.*

Es giebt $\frac{3}{2}(n-2)^2(n^2-2n-1)$ *Gerade, welche gleichzeitig durch zwei Punkte der Hesseschen Curve und durch die beiden zugehörigen Pole gehen.*

Ich bemerke noch, dass die für die letzte Curve angestellten Betrachtungen für $n=3$ nicht gelten. Denn in diesem Falle entsprechen sich die Punkte x, y gegenseitig; daher entspricht zwar noch jedem Punkte x oder y eine Gerade α und ein Punkt z, aber umgekehrt entsprechen einer Geraden α und einem Punkte z die beiden Punkte x, y gleichzeitig, so dass die im Anfang ausgesprochenen Voraussetzungen nicht mehr erfüllt sind. Die letzte Curve geht daher, statt von der sechsten Classe und von der zwölften Ordnung zu sein, in eine doppelt gerechnete Curve dritter Classe und sechster Ordnung über, dieselbe, welcher Herr *Cremona* den Namen *Cayleys* beigelegt hat (a. a. O. p. 108) *).

Giessen, den 16. Juli 1864.

---

*) Herr *Cayley* hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass in den Formeln p. 99 dieses Bandes, in welchen das oben benutzte Princip auf die Singularitäten der Evolute angewandt ist, sich ein Irrthum findet. Die Anzahl der Wendepunkte der Evolute ist nicht, wie *Steiner* Bd. 49, p. 340 dieses Journals angegeben hat, gleich der Anzahl der Rückkehrpunkte der ursprünglichen Curve, sondern im Allgemeinen immer gleich Null. Die Singularitäten der Evolute sind also in der a. a. O. angewandten Bezeichnung:

$$n' = m^2 - 2\delta - 3\varkappa,$$
$$m' = 3m(m-1) - 6\delta - 8\varkappa,$$
$$\iota' = 0,$$
$$\varkappa' = 3m(2m-3) - 12\delta - 15\varkappa.$$

Extrait d'une lettre*) de M. *Hermite* à M. *Borchardt*.

... Partant de ce résultat si beau de *Jacobi* savoir:

$$X_n = \frac{1}{1.2\ldots n.2^n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

j'ai considéré des polynomes à deux variables

$$\frac{d^n(x^2+y^2-1)^n}{dx^\alpha dy^\beta}$$

sous la condition $\alpha+\beta=n$, ou plus généralement:

$$\frac{d^n(ax^2+2bxy+cy^2-1)^n}{dx^\alpha dy^\beta}$$

en imitant exactement comme vous voyez le mode de généralisation pour passer des séries elliptiques: $\Sigma e^{mx+m^2\omega}$ aux séries Abéliennes:

$$\Sigma e^{mx+ny+am^2+2bnm+cn^2}.$$

Je songeais en même temps à la modification correspondante à apporter au radical $\sqrt{1-2ax+a^2}$, et c'est aux expressions suivantes:

$$\sqrt{1-2ax-2by+a^2+b^2}, \quad \text{ou:} \quad \sqrt{1-2ax-2by+Aa^2+2Bab+Cb^2},$$

que je me suis arrêté tout d'abord. La grande importance du développement de la fraction $\frac{1}{1-2ax+a^2}$ appellait également mon attention sur l'expression: $\frac{1}{1-2ax-2by+a^2+b^2}$, et c'est ici que j'ai un premier résultat à vous indiquer.

Soit en effet:

$$\frac{1}{1-2ax-2by+a^2+b^2} = \Sigma a^\alpha b^\beta U_{\alpha,\beta},$$

$U_{\alpha,\beta}$ sera un polynôme entier en x et y du degré $\alpha+\beta$, et l'on aura:

$$\iint U_{\alpha,\beta}.U_{\gamma,\delta}\,dx\,dy = 0,$$

l'intégrale étant prise entre les limites définies par la condition:

$$x^2+y^2 \leqq 1$$

*) Une exposition plus détaillée du sujet traité dans cette lettre se trouve dans les comptes rendus de l'académie des sciences de Paris, année 1865, séances du 20 et 27 février, du 6 et 13 mars.

sous la condition que la différence: $\alpha+\beta-\gamma-\delta$ ne soit pas nulle. Mais en intégrant le produit de deux polynomes différents, on n'obtient plus zéro, s'ils sont du même degré. Pour rétablir l'analogie avec les fonctions d'une variable ayant pour origine le développement de $\frac{1}{1-2ax+a^2}$ et qui semble ici se perdre, j'ai pensé à déduire des polynomes $U_{\alpha,\beta}$ d'un même degré, d'autres en même nombre, qui en dépendent linéairement, auxquels je donne la dénomination $V_{\alpha,\beta}$ de manière à avoir:

$$\iint U_{\alpha,\beta} V_{\gamma,\delta}\, dx\, dy = 0$$

toutes les fois que les deux indices α et β, γ et δ ne seront par simultanément égaux. Ce sont précisément ces polynomes, qui m'ont donné la généralisation des fonctions de *Legendre* que je recherchais, mais il est nécessaire pour cela de sortir de l'expression $1-2ax-2by+a^2+b^2$ qui a servi de point de départ.

Considérant la forme ternaire en a, b, c:

$$c^2+2acx+2bcy+a^2+b^2,$$

j'observe qu'elle a pour forme adjointe:

$$(c-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1),$$

or en y faisant pour simplifier $c=1$, c'est le radical

$$\sqrt{(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)}$$

dont le développement donne naissance aux polynômes $V_{\alpha,\beta}$, et si l'on fait:

$$\sqrt{(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)} = \Sigma a^\alpha b^\beta V_{\alpha,\beta},$$

on aura ce nouveau résultat:

Soit

$$\alpha+\beta = n, \qquad \frac{n.n-1\ldots n-\alpha+1}{1.2.3\ldots\alpha} = n_\alpha.$$

Les polynomes $V_{\alpha,\beta}$ seront exprimés de cette manière:

$$V_{\alpha,\beta} = \frac{n_\alpha}{1.2.3\ldots n.2^n} \frac{d^n(x^2+y^2-1)^n}{dx^\alpha dy^\beta}$$

et l'on obtient l'analogie aussi complète que possible avec les fonctions de *Legendre*. Opérant donc comme le fait *Jacobi* (t. II de ce Journal), au moyen d'intégrations par partie successives, je trouve quelque soit la fonction $F(x, y)$:

$$\iint F(x,y) \frac{d^n(x^2+y^2-1)^n}{dx^\alpha dy^\beta} = (-1)^n \iint \frac{d^n F(x,y)}{dx^\alpha dy^\beta}(x^2+y^2-1)^n dx\, dy$$

entre les limites:

$$x^2+y^2 \leqq 1.$$

J'en conclus que:

$$\iint V_{\alpha,\beta}\, V_{\gamma,\delta}\, dx\, dy \;=\; 0,$$

si les degrés $\alpha+\beta$ et $\gamma+\delta$ ne sont pas les mêmes, comme cela devait être en effet d'après la dépendance des polynomes $V_{\alpha,\beta}$ et $U_{\alpha,\beta}$.

La propriété caractéristique des fonctions $V_{\alpha,\beta}$ consiste en ce que l'équation:

$$V_{\alpha,\beta} = 0,$$

si l'on fait abstraction du facteur x ou y, suivant que α ou β est impair, représente une courbe fermée, la distance d'un quelconque de ses points à l'origine étant moindre que l'unité, de sorte qu'elle est comprise dans l'intérieur du cercle:

$$x^2+y^2 = 1.$$

D'après l'égalité fondamentale:

$$\iint U_{\alpha,\beta}\, V_{\gamma,\delta}\, dx\, dy \;=\; 0$$

tant qu'on n'a pas à la fois: $\alpha=\gamma$ et $\beta=\delta$, on voit que dans l'intérieur de ce cercle $x^2+y^2=1$, toute fonction $F(x, y)$ pourra être développée de ces deux manières:

$$F(x, y) \;=\; A\, U_{\alpha,\beta},$$
$$F(x, y) \;=\; B\, V_{\alpha,\beta}$$

qu'il semble impossible de ne pas considérer en même temps. J'ai déjà trouvé un fait semblable d'un double mode de développement en m'occupant des polynomes tirés des dérivées de la fonction $e^{ax^2+2bxy+cy^2}$ (Comptes Rendus 1864).

Les intégrales suivantes qu'on obtient facilement:

$$\iint \frac{dx\, dy}{(1-2ax-2by+a^2+b^2)(1-2a'x-2b'y+a'^2+b'^2)} = \frac{\pi}{ab'-ba'} \operatorname{arctang} \frac{ab'-ba'}{1-aa'-bb'},$$

$$\iint \frac{dx\, dy}{(1-2a'x-2b'y+a'^2+b'^2)[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)]^{\frac{1}{2}}}$$
$$= -\frac{\pi}{aa'+bb'} \log(1-aa'-bb'),$$
$$x^2+y^2 \leqq 1$$

suffisent pour établir les points essentiels de la théorie des fonctions U et V; je donnerai plus tard dans les Comptes Rendus quelques autres détails.

Paris, 27 Janvier 1865.

De investigando ordine systematis aequationum differentialium vulgarium cujuscunque.

(Ex. ill. *C. G. J. Jacobi* manuscriptis posthumis in medium protulit*) *C. W. Borchardt.*)

1.

Investigatio ad solvendum problema inaequalitatum reducitur.

Systema aequationum differentialium vulgarium est ***non canonicum*****), si aequationes altissima variabilium dependentium differentialia tali modo continent, ut horum valores ex iis petere non liceat. Id quod fit, quoties aequationes nonnullae altissimis illis differentialibus carentes in systemate proposito vel ipsae inveniuntur vel eliminatione ex eo obtinentur. ***Eo casu numerus Constantium Arbitrariarum, quas integratio completa inducit, sive ordo systematis semper minor est summa altissimorum ordinum, ad quos differentialia singularum variabilium in aequationibus differentialibus propositis ascendunt.*** Qui ordo systematis cognoscitur, si per differentiationes et eliminationes contingit systema propositum redigere in aliud forma canonica gaudens eique aequivalens, ita ut de systemate canonico etiam ad propositum reditus pateat. Nam summa altissimorum ordinum, ad quos in systemate canonico differentialia singularum variabilium dependentium ascendunt, etiam systematis propositi non canonici ordo erit. Ad quem ordinem investigandum non tamen opus est ea ad formam canonicam reductione, sed res per considerationes sequentes absolvi potest.

Ponamus inter variabilem independentem t atque n variabiles dependentes $x_1, x_2, \dots x_n$ haberi n aequationes differentiales:

$$(1.) \qquad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \dots \quad u_n = 0,$$

sitque

$$h_k^{(i)}$$

altissimus ordo, ad quem in aequatione $u_i = 0$ differentialia variabilis x_k ascen-

*) Huic ill. *Jacobi* commentationi jam *S. Cohn* operam dederat, sed praematura morte abreptus manuscriptum non reliquit prelo paratum.

**) Systema quod hic canonicum seu forma canonica gaudens appellatur idem est quod in „theoria novi multiplicatoris" forma normali praeditum vocatur (hujus diarii tom. 29, p. 369 sive *Jacobi* opuscula math. I., p. 219), sed plane differt ab eo, cui *Jacobi* in „nova methodo aequat. diff. partiales primi ordinis integrandi" (hujus diarii tom. 60, p. 121) nomen canonici tribuit.

dunt. Ac primum observo, quaestionem revocari posse ad casum simpliciorem, quo aequationes differentiales propositae sunt lineares. Etenim variando aequationes (1.), inter variationes

$$(2.)\qquad \delta x_1 = \xi_1,\quad \delta x_2 = \xi_2,\quad \dots\quad \delta x_n = \xi_n$$

obtinemus systema aequationum differentialium *linearium*

$$(3.)\qquad v_1 = 0,\quad v_2 = 0,\quad \dots\quad v_n = 0,$$

eritque rursus $h_k^{(i)}$ altissimus ordo, ad quem differentialia ipsius $\xi_k = \delta x_k$ in aequatione $v_i = \delta u_i = 0$ ascendunt. Quarum aequationum differentialium linearium (3.) datur integratio completa, si pro valoribus $k = 1, 2, \dots n$ ponitur

$$(4.)\qquad \xi_k = \delta x_k = \beta_1 \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_1} + \beta_2 \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_2} + \cdots,$$

ubi per $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ illas Constantes Arbitrarias designamus, quas valores completi variabilium $x_1, x_2, \dots x_n$ integratione aequationum (1.) eruti involvunt, per $\beta_1, \beta_2, \dots$ vero eas Constantes Arbitrarias, quas integratio systematis (3.) inducit. Unde idem fit numerus Constantium Arbitrariarum in integratione completa aequationum differentialium propositarum (1.) atque linearium (3.), sive utriusque systematis idem ordo est.

In explorando ordine systematis aequationum differentialium linearium (3.) supponere licet Coefficientes esse Constantes. Eo autem casu integratio completa methodo nota obtinetur, nulla ad formam canonicam reductione facta. Designemus per symbolum

$$(\xi)_m$$

expressionem

$$A_0\xi + A_1 \frac{d\xi}{dt} + A_2 \frac{d^2\xi}{dt^2} + \cdots + A_m \frac{d^m\xi}{dt^m} = (\xi)_m,$$

in qua $A_0, A_1, A_2, \dots A_m$ sunt Constantes, gaudebunt aequationes (3.), si Coefficientes earum constantes ponimus, hac forma

$$(5.)\qquad \begin{cases} v_1 = (\xi_1)_{h_1'} + (\xi_2)_{h_2'} + \cdots + (\xi_n)_{h_n'} = 0, \\ v_2 = (\xi_1)_{h_1''} + (\xi_2)_{h_2''} + \cdots + (\xi_n)_{h_n''} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ v_n = (\xi_1)_{h_1^{(n)}} + (\xi_2)_{h_2^{(n)}} + \cdots + (\xi_n)_{h_n^{(n)}} = 0. \end{cases}$$

Pono in his aequationibus

$$\xi_k = C_k e^{\lambda t}$$

designantibus C_k et λ Constantes, obtinetur e (5.):

$$(6.)\quad \begin{cases} 0 = C_1[\lambda]_{h'_1} + C_2[\lambda]_{h'_2} + \cdots + C_n[\lambda]_{h'_n}, \\ 0 = C_1[\lambda]_{h''_1} + C_2[\lambda]_{h''_2} + \cdots + C_n[\lambda]_{h''_n}, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ 0 = C_1[\lambda]_{h_1^{(n)}} + C_2[\lambda]_{h_2^{(n)}} + \cdots + C_n[\lambda]_{h_n^{(n)}}, \end{cases}$$

siquidem per

$$[\lambda]_m$$

functio quantitatis λ integra ordinis m^{ti} designatur.

Eliminatis C_1, C_2, ... C_n, prodit aequatio algebraica, cujus radices suggerunt valores, quos λ induere potest, et cuique radici sive valori ipsius λ respondet systema valorum ipsarum C_1, C_2, ... C_n, quos omnes per eandem Constantem Arbitrariam multiplicare licet. Jungendo cujusque variabilis ξ_k valores singulis radicibus respondentes, prodit ejus valor completus, et cum singularum variabilium valores sic provenientes iisdem Constantibus Arbitrariis afficiantur, aequationum (5.) integratio completa tot inducit Constantes Arbitrarias, quot sunt ipsius λ valores. Unde ordo systematis aequationum differentialium linearium (3.) vel etiam ipsarum aequationum differentialium propositarum (1.) aequatur gradui aequationis algebraicae, qua λ definitur. Quam aequationem repraesentare licet hoc modo

$$(7.)\quad 0 = \Sigma \pm [\lambda]_{h'_1}[\lambda]_{h''_2} \cdots [\lambda]_{h_n^{(n)}},$$

eritque gradus Determinantis ad dextram aequalis *maximo* ex $1.2.3\ldots n$ aggregatis, quae e sequente

$$h'_1 + h''_2 + \cdots + h_n^{(n)}$$

proveniunt, indices inferiores aut superiores omnimodis permutando. Unde jam nacti sumus hanc Propositionem memorabilem:

Propositio I. *Inter variabilem independentem t atque n variabiles dependentes x_1, x_2, ... x_n habeantur n aequationes differentiales*

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots \quad u_n = 0,$$

sitque

$$h_k^{(i)}$$

altissimus ordo, ad quem in aequatione $u_i = 0$ differentialia variabilis x_k ascen-

dunt. Jam si vocatur

$$H$$

maximum e 1.2.3...*n aggregatis*

$$h_1^{(i_1)} + h_2^{(i_2)} + \cdots + h_n^{(i_n)},$$

quae obtinentur sumendo pro indicibus

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots \quad i_n$$

quoscunque inter se diversos ex indicibus 1, 2, ... *n; erit H ordo systematis aequationum differentialium propositarum sive numerus Constantium Arbitrariarum, quas earum integratio completa inducit.*

Maximum in antecedentibus voco valorem nullo alio aggregati propositi minorem, ita ut plura maxima locum habere possint inter se aequalia, diversis indicum $i_1, i_2, \ldots i_n$ systematis respondentia.

Gradus aequationis algebraicae (7.) non minuitur, nisi in Determinante ad dextram posito Coefficiens altissimae quantitatis λ potestatis evanescit. Obtinetur autem altissimae ipsius λ potestatis Coefficiens, si in formando Determinante cuique functioni integrae rationali $[\lambda]_{h_k^{(i)}}$ substituimus Coefficientem altissimae seu $h_k^{(i)\text{tae}}$ ipsius λ potestatis, quem designabo per

$$[c]_{h_k^{(i)}},$$

atque ex omnibus Determinantis terminis

$$\pm [c]_{h_1^{(i_1)}} [c]_{h_2^{(i_2)}} \cdots [c]_{h_n^{(i_n)}}$$

eos tantum servamus, in quibus summa indicum

$$h_1^{(i_1)} + h_2^{(i_2)} + \cdots + h_n^{(i_n)}$$

valorem maximum H obtinet. Quare nunquam locum habet reductio gradus, nisi pro duobus pluribusve indicum $i_1, i_2, \ldots i_n$ systematis aggregatum antecedens eundem valorem maximum induit atque summa productorum

$$\pm [c]_{h_1^{(i_1)}} [c]_{h_2^{(i_2)}} \cdots [c]_{h_n^{(i_n)}}$$

illis indicum systematis respondentium suisque signis sumtorum evanescit. Aequabatur autem in antecedentibus $[c]_{h_k^{(i)}}$ Coefficienti termini $\delta \dfrac{d^{h_k^{(i)}} x_k}{dt^{h_k^{(i)}}}$ e variatione functionis u_i provenientis, sive positum erat

$$[c]_{h_k^{(i)}} = \frac{\partial u_i}{\partial \frac{d^{h_k^{(i)}} x_k}{dt^{h_k^{(i)}}}}.$$

Quod si tenemus, haec emergit altera Propositio antecedentis supplementaria.

Propositio II. *Vocetur*

$$u_k^{(i)}$$

differentiale partiale ipsius u_i sumtum secundum variabilis x_k altissimum quod functio u_i involvit differentiale (i. e. ordinis $h_k^{(i)}$). Ex omnibus terminis Determinantis

$$\Sigma \pm u_1' u_2'' \dots u_n^{(n)}$$

ii soli retineantur $\pm u_1^{(i_1)} u_2^{(i_2)} u_n^{(i_n)}$, in quibus summa ordinum differentialium singularum variabilium, secundum quae in singulis

$$u_1^{(i_1)}, \quad u_2^{(i_2)}, \quad \dots \quad u_n^{(i_n)}$$

differentiatio partialis facta est, valorem maximum H obtinet. Jam si aggregatum terminorum Determinantis remanentium designatur Determinantis signum uncis includendo hoc modo

$$(\Sigma \pm u_1' u_2'' \dots u_n^{(n)}),$$

ordo systematis aequationum differentialium

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \dots \quad u_n = 0$$

tum demum valore illo maximo H inferior erit, si habetur

$$(\Sigma \pm u_1' u_2'' \dots u_n^{(n)}) = 0,$$

quae ubi locum non habet aequatio, ordo systematis semper valori maximo H aequatur.

Nacti sumus antecedentibus novum genus formularum, Determinantia *manca*

$$(\Sigma \pm u_1' u'' \dots u_n^{(n)}).$$

Cujusmodi quantitas evanescens indicio est, ordinem systematis aequationum differentialium

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \dots \quad u_n = 0$$

per indolem illarum aequationum peculiarem diminutionem pati.

Explorato ordine systematis aequationum differentialium quarumcunque, via sternitur ad inveniendam methodum, qua ipsa reductio earum in formam canonicam praestari possit. Sed in hac commentatione sufficiat, in naturam maximi, de quo agitur, et quomodo commode inveniatur, accurate inquirere.

2.

De solutione problematis inaequalitatum, quo investigatio ordinis systematis aequationum differentialium quarumcunque innititur. Proposito schemate definitur Canon. Dato Canone quocunque invenitur simplicissimus.

Antecedentibus investigatio ordinis systematis aequationum differentialium vulgarium revocata est ad sequens problema inaequalitatum etiam per se tractatu dignum:

Problema.

Disponantur nn quantitates $h_k^{(i)}$ *quaecunque in schema Quadrati, ita ut habeantur n series horizontales et n series verticales quarum quaeque est n terminorum. Ex illis quantitatibus eligantur n transversales i. e. in seriebus horizontalibus simul atque verticalibus diversis positae, quod fieri potest* $1.2\dots n$ *modis; ex omnibus illis modis quaerendus est is qui summam n numerorum electorum suppeditet maximam.*

Dispositis quantitatibus $h_k^{(i)}$ in figuram quadraticam

$$\begin{matrix} h_1' & h_2' & \dots & h_n' \\ h_1'' & h_2'' & \dots & h_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1^{(n)} & h_2^{(n)} & \dots & h_n^{(n)} \end{matrix}$$

earum systema appellabo *schema propositum;* omne schema inde ortum addendo singulis ejusdem seriei horizontalis terminis eandem quantitatem apellabo *schema derivatum.* Sit

$$l^{(i)}$$

quantitas addenda terminis i^{tae} seriei horizontalis, quo facto singula $1.2\dots n$ aggregata transversalia, inter quae maximum eligendum est, eadem augebuntur quantitate

$$l'+l''+\dots+l^{(n)} = L,$$

quippe ad singula aggregata formanda e quaque serie horizontali unus eligendus est terminus. Qua de re si statuitur

$$h_k^{(i)}+l^{(i)} = p_k^{(i)}$$

atque aggregatum transversale maximum e terminis $h_k^{(i)}$ formatum

$$h_1^{(i_1)}+h_2^{(i_2)}+\dots+h_n^{(i_n)} = H,$$

fit valor aggregati transversalis maximi e terminis $p_k^{(i)}$ formati

$$p_1^{(i_1)}+p_2^{(i_2)}+\dots+p_n^{(i_n)} = H+L$$

et vice versa. Itaque ad maximum propositum inveniendum perinde est, sive quaestio de quantitatibus $h_k^{(i)}$, sive de quantitatibus $p_k^{(i)}$ instituatur.

Faciamus quantitates $l', l'', \dots l^{(n)}$ sic determinatas esse, ut, quantitatibus $p_k^{(i)}$ ad instar quantitatum $h_k^{(i)}$ in figuram quadraticam dispositis et e quaque serie verticali termino maximo electo, maxima illa omnia in diversis seriebus horizontalibus jaceant. Unde si $p_k^{(i_k)}$ vocatur maximus terminorum

$$p'_k, \quad p''_k, \quad \dots \quad p_k^{(n)},$$

aggregatum

$$p_1^{(i_1)} + p_2^{(i_2)} + \dots + p_n^{(i_n)}$$

inter omnia aggregata transversalia e quantitatibus $p_k^{(i)}$ formata erit maximum. Hoc igitur casu sine negotio etiam habetur maximum aggregatum transversale e quantitatibus propositis $h_k^{(i)}$ formatum

$$h_1^{(i_1)} + h_2^{(i_2)} + \dots + h_n^{(i_n)}.$$

Unde solutum est inaequalitatum problema propositum, simulatque inventae sunt quantitates $l', l'', \dots l^{(n)}$ dictae conditioni satisfacientes.

Figuram quadraticam, in qua diversarum verticalium maxima simul in diversis seriebus horizontalibus sunt, brevitatis causa vocabo Canonem. Patet in ejusmodi *Canone* terminos omnes eadem quantitate augeri vel diminui posse; unde sequitur e quantitatibus $l', l'', \dots l^{(n)}$ unam pluresve nullitati aequari posse, dum reliquae fiant positivae. Si $l^{(i)} = 0$, series $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots p_n^{(i)}$ eadem est atque series figurae propositae $h_1^{(i)}, h_2^{(i)}, \dots h_n^{(i)}$, unde Canonis seriem, cui respondet quantitas l evanescens, vocabo in sequentibus seriem *immutatam*. Jam ex omnibus solutionibus una erit simplicissima, in qua scilicet singulae quantitates $l^{(i)}$ valores minimos positivos induunt, ita ut nulla alia detur, pro qua aliquae quantitatum $l^{(i)}$ valores inferiores obtinent, dum reliquae immutatae manent. Canonem ei solutioni respondentem appellabo *Canonem simplicissimum*, de cujus habitu in sequentibus agam.

Ad schema quadraticum quodcunque sequentes denominationes refero, quae bene tenendae sunt. Sub voce *seriei* semper intelligam *horizontalem;* si de verticalibus sermo incidit, id diserte adjicietur. Sub voce *maximi* semper intelligam terminum inter omnes ejusdem *verticalis* maximum seu certe nullo reliquorum minorem. Unde appellabo *seriei maximum* eum seriei horizontalis terminum, qui maximus est inter omnes cum eo in eadem verticali positos. Fieri potest ut series nullum maximum habeat vel etiam plura inter se diversa.

At si figura Canonis instar constituta est, quaeque series uno certe maximo gaudet, quod, si in eadem serie plura insunt, semper ita sumere licet, ut omnia diversarum serierum maxima ad diversas verticales pertineant, i. e. *maximorum transversalium systema completum* forment. Consideremus in Canone simplicissimo horum maximorum systema, et si plura ejusmodi dantur, unum aliquod eligamus. Jam distribuamus omnes series quocunque modo in duas partes, series J et series K tales, ut nulla serierum K immutata sit, i. e. nulla quantitatum l, quae ad series K pertinent, evanescat: dico haberi

Theorema I. *In Canone simplicissimo e maximis serierum K saltem unum est, cui aequalis exstat terminus in eadem verticali positus et ad series J pertinens.*

Alioquin enim quantitates l ad series K pertinentes omnes eadem quantitate minuere liceret, usque dum aut una quantitatum l evanesceret, aut unum e maximis serierum K aequale evaderet alicui termino in eadem verticali posito et ad series J pertinenti. Neque enim ea re maxima diversarum serierum cessarent esse maxima, neque Canonis constitutio turbaretur. Quantitates l autem propositae eo casu non forent minimae positivae neque igitur Canon foret simplicissimus.

Si pro seriebus K sumitur series singularis, sequitur e theoremate praecedente hoc alterum

Theorema II. *In Canone simplicissimo seriei uniuscunque non immutatae maximo aequatur alter terminus in eadem verticali.*

Proposito Canone simplicissimo rursus eligamus unum certum systema completum maximorum transversalium. In serie quacunque α_1^{ta}, cui respondet quantitas l non evanescens, sumatur *maximum*, cui secundum II. in eadem verticali sit aequalis terminus seriei α_2^{tae}, in qua rursus sumatur *maximum*, cui aequatur in eadem verticali terminus seriei α_3^{tae}, et ita porro. Si dato *maximo* plures aequantur termini in eadem verticali, processus praescriptus pluribus modis institui potest, sed habetur

Theorema III. *In Canone simplicissimo e variis modis a data serie per processum praescriptum ad alias transeundi unus semper exstat, quo pervenitur ad seriem immutatam i. e. seriem, cui respondet valor $l = 0$.*

Nam simulac theorema III. locum non habet, Canonis series in duo complexus dividantur, quorum primus omnes series amplectatur, ad quas a data serie per processum praescriptum transire licet et secundus omnes, ad quas transire non licet, ita ut series immutatae omnes in secundo complexu

sint. Quo facto primum complexum pro seriebus K, secundum pro seriebus J theorematis I. sumere licet. Ergo secundum theorema I. a serie primi complexus ad seriem secundi transitus datur, quod est contra hypothesin. Unde suppositio theorema III. locum non habere est absurda.

Canonem quemcunque, pro quo quantitates $l', l'', \dots l^{(n)}$ respective induunt valores $m', m'', \dots m^{(n)}$, quos semper positivos aut evanescentes suppono, in sequentibus brevitatis causa vocabo Canonem $(m', m'', \dots m^{(n)})$. Quo statuto de binis Canonibus quibuscunque habetur.

Theorema IV. *Propositis binis Canonibus, primo* $(f', f'', \dots f^{(n)})$ *et secundo* $(g', g'', \dots g^{(n)})$, *semper alius dabitur Canon* $(m', m'', \dots m^{(n)})$ *talis, ut unaquaeque quantitas* $m^{(i)}$ *minimae ipsarum* $f^{(i)}$, $g^{(i)}$ *aut aequalis aut ea minor sit.*

Unde sequitur hoc Corollarium:

Canon simplicissimus est unicus, sive unicum datur systema quantitatum $l', l'', \dots l^{(n)}$, *quae Canonem simplicissimum suppeditant.*

Sint quantitates $g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \dots g^{(n)}$ ipsis $f^{(\alpha+1)}, f^{(\alpha+2)}, \dots f^{(n)}$ respective majores, reliquae autem $g', g'', \dots g^{(\alpha)}$ ipsis $f', f'', \dots f^{(\alpha)}$ respective aut aequales aut minores. Vocemus respective $q_k^{(i)}$ et $r_k^{(i)}$ quantitates, quae primum et secundum Canonem constituunt, ubi generaliter fit

$$r_k^{(i)} = q_k^{(i)} + g^{(i)} - f^{(i)},$$

sitque rursus systema maximorum transversalium in primo Canone

$$q_1^{(i_1)}, \quad q_2^{(i_2)}, \quad \dots \quad q_n^{(i_n)},$$

ubi omnes $i_1, i_2, \dots i_n$ inter se diversi sunt; in secundo Canone systema maximorum transversalium habetur etiam

$$r_1^{(i_1)}, \quad r_2^{(i_2)}, \quad \dots \quad r_n^{(i_n)}.$$

Nam omnia aggregata transversalia secundi Canonis ab aggregatis respondentibus primi eadem quantitate

$$g' + g'' + \dots + g^{(n)} - \{f' + f'' + \dots + f^{(n)}\}$$

differunt, unde, cum aggregatum

$$q_1^{(i_1)} + q_2^{(i_2)} + \dots + q_n^{(i_n)}$$

maximum sit, etiam aggregatum

$$r_1^{(i_1)} + r_2^{(i_2)} + \dots + r_n^{(i_n)}$$

maximum esse debet. At in quoque Canone secundum definitionem ejus stabilitam datur aggregatum transversale maximum, cujus singuli termini sint maximi inter omnes ejusdem verticalis, quibus maximis respective in prima, secunda, ... n^{ta} verticali aequari debent termini

$$r_1^{(i_1)}, \quad r_2^{(i_2)}, \quad \ldots \quad r_n^{(i_n)},$$

ut eorum aggregatum et ipsum constituere possit maximum. Unde cum $i_1, i_2, \ldots i_n$ omnes inter se diversi sint, termini illi et ipsi systema maximorum transversalium constituunt, q. d. e.

Cum quantitates $g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \ldots g^{(n)}$ respective ipsis $f^{(\alpha+1)}, f^{(\alpha+2)}, \ldots f^{(n)}$ majores sint, quantitates autem $f', f'', \ldots f^{(n)}$ omnes supponantur $=0$ aut positivae, quantitates $g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \ldots g^{(n)}$ omnes sunt positivae >0. Jam observo fieri non posse ut in Canonis $(g', g'', \ldots g^{(n)})$ serie $(\alpha+1)^{\text{ta}}, (\alpha+2)^{\text{ta}}, \ldots$ vel n^{ta} inveniatur maximum, cui aequalis existat terminus in eadem verticali positus sed ad unam reliquarum serierum pertinens. Sit enim maximum illud in serie i_k^{ta}, terminus ei aequalis in serie i^{ta}, ut sit

$$r_k^{(i_k)} = r_k^{(i)},$$

ubi i est unus e numeris $1, 2, \ldots \alpha$, atque i_k unus e numeris $\alpha+1, \alpha+2, \ldots n$: erit e formula supra tradita

$$q_k^{(i_k)} + g^{(i_k)} - f^{(i_k)} = q_k^{(i)} + g^{(i)} - f^{(i)},$$

ubi secundum suppositionem factam $g^{(i_k)} - f^{(i_k)} > 0$ atque $g^{(i)} - f^{(i)} \leqq 0$ Unde

$$q_k^{(i_k)} < q_k^{(i)},$$

quod absurdum est, cum $q_k^{(i_k)}$ sit maximum inter omnes terminos ejusdem verticalis $q_k', q_k'', \ldots q_k^{(n)}$. Hinc cum in secundo Canone maximo in $(\alpha+1)^{\text{ta}}$, $(\alpha+2)^{\text{ta}}, \ldots$ vel n^{ta} serie posito nullus aequalis esse possit terminus in eadem verticali in reliquis seriebus positus, quantitates $g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \ldots g^{(n)}$ omnes eadem quantitate decrescere possunt, reliquis immutatis manentibus, usque dum in aliqua serie $(\alpha+1)^{\text{ta}}, (\alpha+2)^{\text{ta}}, \ldots$ vel n^{ta} inveniatur maximum, quod non superet valorem alius termini in eadem verticali ad reliquas series pertinentis, aut dum una quantitatum $g^{(\alpha+1)}, g^{(\alpha+2)}, \ldots g^{(n)}$ evanescat. Qua diminutione nullum maximum neque igitur Canonis natura destruitur. Si hac ratione obtinetur

$$(g', g'', \ldots g^{(\alpha)}, g_1^{(\alpha+1)}, g_1^{(\alpha+2)}, \ldots g_1^{(n)})$$

atque inter quantitates $g_1^{(\alpha+1)}, g_2^{(\alpha+2)}, \ldots$ ipsae $g_1^{(\beta+1)}, g_1^{(\beta+2)}, \ldots$ adhuc quantitatibus $f^{(\beta+1)}, f^{(\beta+2)}, \ldots$ majores sunt, eadem methodo novus Canon obtinetur, in quo quantitates illae denuo diminutionem subierunt, sicque pergere licet, usque dum perveniatur ad Canonem

$$(m', m'', \ldots m^{(\alpha)}, m^{(\alpha+1)}, m^{(\alpha+2)}, \ldots m^{(n)}),$$

ubi quantitates uncis inclusae omnes quantitatibus respondentibus ipsarum f', $f'', \ldots f^{(n)}$ et $g', g'', \ldots g^{(n)}$ aut minores aut iis aequales sunt, q. d. e.

Sequitur e Theoremate IV.

Theorema V. *Nullus datur Canon, pro quo aliqua quantitatum l', l'', ... $l^{(n)}$ valorem minorem induat quam pro Canone simplicissimo.*

Scilicet si talis daretur Canon, per methodum antecedentem obtineri posset alius, pro quo una certe quantitatum l', l'', ... $l^{(n)}$ valorem minorem indueret quam pro Canone simplicissimo, reliquae autem valores non majores, quod est contra Canonis simplicissimi definitionem. Cum valor minimus, quem quantitates l', l'', ... $l^{(n)}$ obtinere possint, sit $= 0$, e propositione V. sequitur tanquam Corollarium

Theorema VI. *Series, quae in Canone quocunque habetur immutata, eadem in Canone simplicissimo inveniatur necesse est.*

Ut cognoscatur, utrum Canon aliquis sit simplicissimus necne, adhiberi potest haec propositio:

Theorema VII. *Proposito Canone atque in eo maximorum transversalium systemate electo, notentur primum series immutatae A, deinde series B, quarum maximis aequantur termini in eadem verticali ad series A pertinentes; deinde series C, quarum maximis aequantur termini in eadem verticali ad series B pertinentes et ita porro. Si hac ratione pergendo exhaurire licet omnes Canonis series, Canon erit simplicissimus.*

Pertineant quantitates l', l'', ... $l^{(n)}$ ad Canonem propositum, quantitates l_1', l_1'', ... $l_1^{(n)}$ autem ad alterum Canonem. Consideremus idem maximorum transversalium systema atque in theoremate proposito electum supponitur, cui etiam in altero Canone respondebit maximorum transversalium systema.

Sit $l_1^{(\gamma)} < l^{(\gamma)}$, seriei γ^{tae} maximum in altero Canone gaudebit minore valore quam in Canone proposito. Pertineat series γ^{ta} ad complexum C, ita ut in Canone proposito maximo seriei γ^{tae} aequetur terminus alicujus seriei β^{tae} ad complexum B pertinentis, fieri etiam debet $l_1^{(\beta)} < l^{(\beta)}$. Vocando enim propositi Canonis terminos $p_k^{(i)}$, alterius $q_k^{(i)}$, erit

$$q_k^{(\beta)} = p_k^{(\beta)} + l_1^{(\beta)} - l^{(\beta)},$$

unde si $p_k^{(\gamma)} = p_k^{(\beta)}$ est maximum seriei γ^{tae}, erit

$$q_k^{(\beta)} = p_k^{(\gamma)} + l_1^{(\beta)} - l^{(\beta)} = q_k^{(\gamma)} + l_1^{(\beta)} - l^{(\beta)} - \{l_1^{(\gamma)} - l^{(\gamma)}\}.$$

Unde cum sit $q_k^{(\gamma)}$ maximum in k^{ta} verticali ideoque $q_k^{(\gamma)} \geqq q_k^{(\beta)}$ atque $l_1^{(\gamma)} < l^{(\gamma)}$, fieri debet $l_1^{(\beta)} < l^{(\beta)}$.

Porro in Canone proposito aequatur maximo seriei β^{tae} terminus seriei α^{tae} ad complexum A pertinentis, atque eodem modo demonstratur, fieri $l_1^{(\alpha)} < l^{(\alpha)}$, quod absurdum est, quia secundum suppositionem factam $l^{(\alpha)} = 0$ est atque

ipsae l_1', l_1'', ... $l_1^{(n)}$ aut evanescentes aut positivae sunt. Eodem modo procedit reductio ab absurdum, ad quemcunque complexum A, B, C, D, ... pertineat series γ^{ta} cui respondet in altero Canone quantitas $l_1^{(\gamma)}$ minor quam in proposito $l^{(\gamma)}$. Unde si Canon ita constitutus est atque in VII. supponitur, pro nullo alio quantitates l valores induere possunt inferiores quam in proposito; sive Canon propositus est simplicissimus.

Antecedentia solutionem quoque continent problematis, *dato Canone quocunque invenire simplicissimum.* Supponere licet, in dato Canone unam ad minimum esse seriem immutatam; quae, nisi jam invenitur, obtineri potest ipsas l omnes eadem quantitate diminuendo. Ut in theoremate VII. serierum immutatarum complexum vocemus A atque complexus ibidem definitos B, C, ... formemus. Hac ratione pergendo si omnes series exhauriuntur, Canon secundum VII. jam ipse est simplicissimus. Ponamus autem relinqui series non praeditas talibus *maximis* quibus aequentur termini ejusdem verticalis ad complexus formatos pertinentes. Tum reliquarum serierum termini (vel quantitates l ad eas series pertinentes) omnes eadem quantitate diminuantur, usque dum earum quantitatum l una evanescat aut earum serierum *maximum* aliquod eo decreverit, ut ei aequalis terminus in eadem verticali ad complexus formatos pertinens inveniatur. Quo facto novus eruitur Canon, in quo auctus est numerus serierum pertinentium ad complexus regula indicata formatos. Si jam omnes series in complexus illos ineunt, Canon erutus erit simplicissimus. Si non, novus novusque Canon eadem methodo eruendus est, semperque pauciores a complexibus, qui formari possunt, relinquuntur series, unde tandem pervenietur ad Canonem, in quo complexus, qui formari possunt, series omnes exhauriunt, qui Canon est simplicissimus quaesitus.

Exemplum.

Schema propositum.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	7	7	4	15	14	6	1
II	3	8	7	6	11	14	10
III	6	11	15	16	15	23	10
IV	4	11	14	25	20	21	27
V	5	2	8	10	23	18	30
VI	1	8	3	9	6	20	17
VII	11	12	8	22	24	21	40

Canon propositus.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	l
I	12*	12	9	20	19	11	6	5
II	11	16*	15	14	19	22	18	8
III	9	14	18*	19	18	26	13	3
IV	5	12	15	26*	21	22	28	1
V	10	7	13	15	28*	23	35	5
VI	7	14	9	15	12	26*	23	6
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

Canon derivatus I.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	l
I	11*	11	8	19	18	10	5	4
II	10	15*	14	13	18	21	17	7
III	8	13	17*	18	17	25	12	2
IV	4	11	14	25*	20	21	27	0
V	9	6	12	14	27*	22	34	4
VI	6	13	8	14	11	25*	22	5
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

Canon derivatus II.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	l
I	11*	11	8	19	18	10	5	4
II	8	13*	12	11	16	19	15	5
III	6	11	15*	16	15	23	10	0
IV	4	11	14	25*	20	21	27	0
V	7	4	10	12	25*	20	32	2
VI	4	11	6	12	9	23*	20	3
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

Canon simplicissimus.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	l
I	11*	11	8	19	18	10	5	4
II	7	12*	11	10	15	18	14	4
III	6	11	15*	16	15	23	10	0
IV	4	11	14	25*	20	21	27	0
V	6	3	9	11	24*	19	31	1
VI	4	11	6	12	9	23*	20	3
VII	11	12	8	22	24	21	40*	0

E schemate proposito, addendo terminis serierum diversarum respective numeros 5, 8, 3, 1, 5, 6, 0 aliud obtinetur schema, in quo termini inter omnes ejusdem verticalis maximi in diversis seriebus horizontalibus sunt, quae est Canonis proprietas characteristica.

Proponitur Canonem simplicissimum investigare. Constituit in dato Canone series VII. complexum A. De reliquarum serierum terminis detraho unitatem, prodit Canon derivatus I.

In Canone derivato I. series IV. et VII. constituunt complexum A, series I. complexum B. De reliquarum terminis detraho 2, prodit Canon derivatus II.

In Canone derivato II. series III., IV., VII. constituunt complexum A, series I. et VI. complexum B; detrahendo de secunda et quinta serie unitatem, prodit Canon ultimus seu simplicissimus, cui respondent ipsarum l valores 4, 4, 0, 0, 1, 3, 0. Quos addendo terminis seriorum diversarum schematis propositi, prodit Canon simplicissimus. Series III., IV., VII. complexum A, series I., II., V., VI. complexum B constituunt; quos complexus series omnes exhaurire videmus, quae est Canonis simplicissimi proprietas characteristica. —

Si non datur Canon aliquis, sed tantum schematis propositi termini, qui aggregatum maximum transversale constituunt, ad Canonem simplicissimum pervenitur cuique seriei minimam addendo quantitatem, qua efficitur, ut datus ejus terminus ad aggregatum transversale maximum pertinens fiat in sua verticali maximo aequalis. Quo negotio ad omnes series adhibito et si opus est repetito, tandem ad Canonem perveniri debet, qui erit simplicissimus, cum incrementa seriebus non majora addita sint, quam necessario postulatur, ut termini dati, in sua quisque verticali, maximi fiant.

Exemplum.

Schema propositum.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	11*	7	6	4	6	4	11
II	11	12*	11	11	3	11	12
III	8	11	15*	14	9	6	8
IV	19	10	16	25*	11	12	22
V	18	15	15	20	24*	9	24
VI	10	18	23	21	19	23*	21
VII	5	14	10	27	31	20	40*

Schema derivatum.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	19*	15	14	12	14	12	19
II	17	18*	17	17	9	17	18
III	16	19	23*	22	17	14	16
IV	21	12	18	27*	13	14	24
V	25	22	22	27	31*	16	31
VI	10	18	23	21	19	23*	21
VII	5	14	10	27	31	20	40*

Canon simplicissimus.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	25*	21	20	18	20	18	25
II	21	22*	21	21	13	21	22
III	16	19	23*	22	17	14	16
IV	21	12	18	27*	13	14	24
V	25	22	22	27	31*	16	31
VI	10	18	23	21	19	23*	21
VII	5	14	10	27	31	20	40*

Termini asteriscis notati aggregatum transversale maximum formant, scilicet sumsi schema propositum e Canone praecedente, seriebus horizontalibus

in verticales, verticalibus in horizontales conversis; quo facto manent termini aggregatum transversale maximum constituentes iidem, schema autem desinit esse Canon.

Seriebus

I., II., III., IV., V.

addo respective secundum datam regulam

8, 6, 8, 2, 7,

prodit schema derivatum.

Seriebus

I., II.

addo respective

6, 4,

prodit Canon simplicissimus quaesitus, in quo series III., VI., V., VI., VII. immutatae manent atque in schemate derivato. In Canone eruto constituunt series VI., VII. complexum A, series III., IV., V. complexum B, series I. complexum C, qui complexus cum omnes series amplectantur, indicium obtinuimus Canonem esse simplicissimum. —

Cum dato Canone etiam innotescat schematis propositi aggregatum transversale maximum, ad problema antecedentibus solutum revocari potest alterum problema, *dato Canone quocunque investigare simplicissimum.* Cujus igitur duplex habetur solutio, altera per subtractiones successivas, uti supra, altera per additiones successivas procedens, uti fit, si e dato Canone petimus schematis propositi aggregatum transversale maximum eoque cognito methodum antecedentem applicamus.

3.

Solutio problematis inaequalitatum in paragrapho praecedente tractati terminatur. Proposito schemate invenitur Canon.

Restat ut demonstretur, quomodo Canon aliquis investigari possit; quippe quocunque invento, vidimus variis modis erui simplicissimum. Proponamus igitur sequens inaequalitatum problema, quod pro principali haberi debet.

Problema.

Datis nn quantitatibus $h_k^{(i)}$, *ubi indicibus* i *et* k *valores* 1, 2, ... n *conveniunt, invenire tales* n *quantitates minimas positivas*

$$l', \quad l'', \quad \dots \quad l^{(n)},$$

ut posito

$$h_k^{(i)} + l^{(i)} = p_k^{(i)},$$

atque pro singulis k electo maximo inter terminos

$$p'_k, \quad p''_k, \quad \dots \quad p_k^{(n)},$$

quod sit

$$p_k^{(i_k)},$$

indices

$$i_1, \quad i_2, \quad \dots \quad i_n$$

omnes inter se diversi sint.

Solutio.

Prima et quasi praeparatoria operatio eo consistit, ut, si in schemate proposito habentur series, in quibus nulla inveniantur *maxima,* earum quaeque minima quantitate augeatur, qua fit, ut unus ejus terminus aequalis evadat *maximo* in eadem verticali posito. Sic obtinetur novum schema, quod *schema praeparatum* voco et in quo quaeque series uno pluribusve maximis gaudet. Diversarum schematis praeparati serierum maxima omnia ad diversas verticales pertineant non necesse est. Sed ad minimum *duarum* serierum maxima habentur, quae ad *duas* verticales pertinent, in quem casum extremum non incidimus, nisi omnia maxima in una eademque serie jacent atque insuper in una eademque verticali termini omnes inter se aequales sunt; quod si secus fit, maximorum transversalium numerus semper est > 2. Si $n = 2$, prima illa operatione problema absolvitur.

In schemate praeparato quaero maximum numerum maximorum transversalium, quorum systema ubi pluribus modis eligi potest, sufficit unum certum eorum systema considerare. Quo electo solutionem problematis propositi ita adorno, ut numerus maximorum transversalium successive augeatur, usque dum eruatur schema systemate completo n maximorum transversalium praeditum, qui erit Canon quaesitus. Sufficit igitur demonstrare, idoneis serierum augmentationibus numerum maximorum transversalium unitate augeri posse.

A	*C*
B	*D*

Divido schema praeparatum in quatuor spatia A, B, C, D sicuti in figura apposita. Ponamus maxima transversalia electa omnia esse in spatio A, ita ut series, in quibus maxima illa sunt, occupent spatia A et C; verticales autem, ad quas pertinent, spatia A et B. Series spatia A et C occupantes voco *superiores,* spatia B et D occupantes *inferiores.* Porro verticales spatia A et B occupantes voco *laevas,* spatia C et D occupantes *dextras.* Jam in spatio D nullum invenitur

maximum. Alioquin enim numerus maximorum transversalium augeretur, contra hypothesin maximum numerum maximorum transversalium electum esse. Unde verticales dextrae sua habent maxima in C; termini autem serierum inferiorum in suis verticalibus maximi erunt in B, et eorum quisque aequatur maximo in eadem verticali in A posito, quum in spatio A sint maxima omnium verticalium laevarum, aeque ac serierum omnium superiorum.

His positis series omnes in tres Classes distribuo, quae sic eruuntur.

Eligo eas serierum superiorum, quae praeter maxima in A alio vel aliis in C positis gaudent, cujusmodi serierum una saltem exstat. Ponamus alicuius illarum serierum maximo in A posito aequari alium terminum in eadem verticali; quaeratur maximum in eadem serie cum hoc termino positum, et si huic rursus aequatur alius terminus in eadem verticali, rursus quaeratur maximum cum hoc termino in eadem serie positum et sic porro. Omnes series, ad quas hac ratione perveniri potest junctae seriebus a quibus proficiscendum erat, constituunt *Classem Primam.*

Dico inter series Primae Classis nullam inveniri seriem inferiorem, neque igitur ullam seriem superiorem, a qua per methodum indicatam ad seriem inferiorem perveniri liceat. Scilicet proficiscendo a serie quae praeter maximum in A alio in C gaudet, consideremus systema maximorum in A positorum, ad quae methodo indicata perveniatur; quorum ultimo, si fieri potest, aequetur terminus ejusdem verticalis in B positus. Maxima illa in A posita omnia secundum suppositionem sunt transversalia, quorum in locum aliud obtinebitur systema maximorum transversalium, si cuique substituitur ejusdem verticalis terminus aequalis. Qua in re ultimo maximo substituitur terminus in B positus, prima autem series, a qua profecti sumus, non amplius adhibetur. Unde novo maximorum systemati jungendo hujus seriei *maximum* in C positum, numerus maximorum transversalium unitate augetur, id quod contradicit suppositioni maximum numerum maximorum transversalium electum fuisse. Scilicet seriebus superioribus accederet inferior, in qua est terminus ultimo maximo aequalis, verticalibus autem laevis accederet dextra, in qua est maximum aliquod seriei a qua profecti sumus.

Ad *Classem Secundam* pertinent series superiores, quae non ad Primam Classem pertinent et a quibus nec ipsis methodo indicata ad seriem inferiorem transitus datur. Fieri potest ut haec Classis omnino non existat.

Ad *Classem Tertiam;* denique pertinent series inferiores omnes eaeque superiores a quibus methodo tradita ad series inferiores transitus datur. *Unde*

si terminus seriei inferioris aequatur maximo seriei superioris in eadem verticali — quod semper fit — ea series superior ad Classem Tertiam pertinebit. Tertia classis, nisi schema jam ipse Canon est, duabus saltem seriebus, una inferiore, una superiore constat.

Id quod supra de Classe Prima demonstravi jam ita enuntio, ut dicam, *inter series superiores Tertiae Classis nullam inveniri seriem, quae maximo in C posito gaudeat.* Qua propositionis forma postea utar.

Observationes hac occasione factae simul praebent methodum exhibendi maximum numerum maximorum transversalium in schemate praeparato. Etenim posito maximorum transversalium systemate quod primum se offert, ipsa classificatio serierum indicat si eorum numerus augeri potest.

Facta classificatione antecedentibus praescripta, *tota Classis Tertia eadem quantitate augeatur, eaque minima, qua efficitur, ut unus serierum ejus Classis terminus aequalis evadat termino maximo alicui ejusdem verticalis ad seriem Secundae aut Primae Classis pertinenti.*

Quod si ad Primam Classem pertinet maximum, numerus maximorum transversalium augeri potest. Dabitur enim series superior, quae praeter maximum in A alio in C gaudet, et a qua via indicata ad seriem aliquam inferiorem transitus datur. Quae series adjicienda est serierum superiorum numero, dum verticalium laevarum numerus ea augendus est verticali dextra, in qua maximum illud in C positum invenitur. Si jacet in D terminus ille seriei Tertiae Classis maximo seriei Primae Classis aequalis, maxima transversalia immutata manent, eo tantum accedente termino. Si vero terminus ille jacet in B, omnia mutanda erunt maxima formantia catenam illam, qua ad seriem inferiorem descendebatur a serie praedita maximo in C posito. Scilicet cuique illorum maximorum transversalium substituendus est terminus ejusdem verticalis ei aequalis, ultimo igitur terminus ille in B, novis maximis transversalibus sic erutis accedente insuper maximo primae seriei in C posito, sicuti ad Primam Classem adnotavi.

Si maximum, cui aequatur terminus Tertiae Classis, in serie Secundae Classis est, nihil mutatur nisi quod haec series ad Tertiam Classem transmigrat simulque reliquae omnes Secundae Classis, a quibus per catenam indicatam ad illam seriem transitus datur. Repetita operatione rursus aut augebitur numerus maximorum transversalium, aut certe numerus serierum Secundae Classis minuitur, unde tandem, nisi antea numerus maximorum transversalium auctus est, ad schema pervenimus seriebus Secundae Classis destitutum, quippe quae

omnes ad Tertiam Classem transmigraverunt. Tum autem operatione praescripta certo obtinemus maximorum transversalium augmentationem. Quam si assecuti sumus, pro variis casibus, qui locum habere possunt et quos enumerare longum esset, nova facienda est maximorum transversalium distributio in tres Classes assignatas, quo facto eadem repetenda erit operatio, usque dum ad Canonem pervenimus, in quo series inferiores omnes ad superiores, verticales dextrae ad laevas transmigraverunt.

At per methodum antecedentibus traditam non solum Canonem sed Canonem simplicissimum eruimus. Quod ut pateat, demonstrabo quantitates, quibus augentur series, esse minimas quae poscuntur, ut omnino Canon prodeat. Ac primum, quod operationem praeparatoriam attinet, observo, Canonis terminos terminis respondentibus dati schematis aut superiores esse aut iis aequales, cum e dato schemate propositum sit Canonem eruere addendo singulis seriebus tantum quantitates positivas aut evanescentes. Unde in quaque Canonis verticali maximum aut superat aut aequat maximum in eadem verticali dati schematis. In Canone autem invenitur in quaque serie maximum, ideoque terminus aliquis, qui maximum in eadem verticali dati schematis aut superat aut aequat, unde quamque dati schematis seriem maximo destitutam tali augere debemus quantitate, ut unus ejus terminus maximum ejusdem verticalis superet aut aequet. Quodsi igitur quantitates notamus, quibus singuli seriei termini differunt a maximis in eadem verticali, quantitas qua series augenda est non minor esse debet quam illarum quantitatum minima. Unde quamque seriem maximo destitutam augendo quantitate minima, qua unus ejus terminus aequalis efficitur maximo ejusdem verticalis, certe series illas non majoribus auximus quantitatibus quam ad Canonem formandum flagitatur.

Post praeparationem factam si jam ipse Canon prodit, certo ille est simplicissimus; vidimus enim schematis propositi seriebus minimas quantitates positivas additas esse, quibus fieri possit, ut omnino Canon prodeat. Si vero nondum Canon prodiit, procedendum erat ad serierum distributionem in tres Classes assignatas. Jam demonstrabo ad Canonem eruendum *fieri non posse ut aliqua serierum Tertiae Classis immutata maneat.*

In demonstratione vocabo S schema praeparatum, K Canonem erutum. Semper suppono, quod jam ad classificationem serierum poscebatur, in S certum maximorum transversalium systema in spatio A ante oculos haberi, ita ut, si plura ejusmodi dantur systemata in spatio A, unum aliquod ex iis eligendum

sit. Similiter in K suppono, si plura maximorum transversalium systemata dantur, unum certum eligi.

Consideremus in S cunctas series superiores Tertiae Classis *immutatas*, si quae dantur, sive eas, quibus nulla quantitas additur Canone K formando seu quae in S et K eaedem sunt. Vocemus harum serierum complexum H earumque consideremus maxima transversalia in S et K electa. *Dico horum maximorum systema in S atque K in iisdem verticalibus fore.* Sit enim M unum horum maximorum in K, in serie immutata positum; cui respondet in S terminus aequalis ejusdem seriei et ipse in sua verticali maximus. Nam cum a S ad K per additiones positivas perveniatur, cujusque verticalis termini in S inferiores aut aequales sunt respondentibus in K; unde si eorum maximo in K aequatur ejusdem verticalis terminus in S, is a fortiori inter ejusdem verticalis terminis in S maximus esse debet. Terminus M exstare debet in spatio A, cum series superior Tertiae Classis secundum proprietates Classium stabilitas non habeat terminos in sua verticali maximos in C positos. Vocemus V complexum verticalium in quibus sunt serierum H maxima in S, atque ponamus verticalem, in qua sit M, non pertinere ad verticales V. Exstabit in S in illa verticali maximum $N = M$ ad maxima transversalia in spatio A electa pertinens, quare maximum N in serie erit positum, quae non pertinet ad series H. Nam ipsarum H maxima transversalia electa in verticalibus V jacent, ipsum N autem in verticali supponitur, quae ad verticales V non pertinet. Haec nova series et ipsa superior esse debet ad Tertiam Classem pertinens; nam maximum N in spatio A jacet, et e definitione Classium tradita sequitur, si in eadem verticali sumuntur omnes termini maximi inter se aequales, series, in quibus positi sint, ad eandem Classem pertinere. Jam si ad Canonem K formandum illi seriei quantitas non evanescens addenda esset, terminus ipsi N in K respondens evaderet major ipso N ideoque etiam major termino M in eadem verticali posito, quod fieri non potest, cum sit M in sua verticali maximum. Unde series illa ipsa immutata esse debet, quod tamen absurdum est, quia suppositum est series H *cunctas* esse series Tertiae Classis immutatas. Unde ipsum M necessario in una verticalium V jacet; quod cum de quoque maximorum M valeat, sequitur, systema maximorum transversalium serierum H in K electorum in iisdem verticalibus esse atque systema maximorum transversalium earundem serierum H in S electorum, q. d. e.

Si sumuntur in S termini respondentes et aequales maximis serierum H in K, formabunt illi in S alterum systema terminorum maximorum trans-

versalium, qui cum maximis serierum H in iisdem seriebus horizontalibus et verticalibus sunt. Id quod fieri non potest, nisi utriusque systematis termini in eadem verticali positi inter se aequales sunt. Unde eruitur hoc Corollarium: *si in S in serie superiore Tertiae Classis immutata sumatur maximum, in eadem verticali haberi in K seriei alicujus superioris ejusdem classis maximum illi aequale.* Maxima autem in S ut in K semper suppono e systemate electo maximorum transversalium sumi.

Ceterum eadem ratione demonstratur propositio antecedens, si H designat complexum serierum Secundae Classis immutatarum; immo pro iis tantum propositio vi aliqua et significatione gaudet. Etenim Tertiae Classis omnino non existunt series immutatae.

Primum patet, *non dari series inferiores immutatas.* Si enim exstat series inferior immutata, sit M ejus maximum in K e systemate maximorum transversalium electorum; idem terminus in S erit maximus inter omnes ejusdem verticalis ideoque aequivalet maximo seriei alicujus superioris Tertiae Classis in eadem verticali posito et ad maxima transversalia pertinenti*). At secundum Corollarium antecedens in eadem verticali esse debet in K seriei alicujus superioris maximum ad maxima transversalia pertinens, unde in K haberentur duo maxima transversalia in eadem verticali, alterum in serie superiore, alterum M in inferiore, id quod maximorum transversalium notioni contrarium est.

Demonstrabo jam, *si series Tertiae Classis superior exstet immutata, etiam haberi inferiorem immutatam,* quod cum fieri non possit, probatum erit, neque superiorem neque inferiorem seriem Tertiae Classis dari immutatam.

Ponamus dari seriem superiorem Tertiae Classis immutatam, quam per s designo. Secundum definitionem Tertiae Classis si s est series superior Tertiae Classis, dabuntur series s, s_1, s_2, ... s_{m-1} tales, ut earum maxima M, M_1, M_2, ... M_{m-1}, quae e systemate maximorum transversalium electo sumenda sunt, habeant quodque in eadem verticali terminum aequalem N_i in serie subsequente, ultimo vero M_{m-1} aequetur in eadem verticali terminus N_{m-1} seriei inferioris, ut igitur bini N_i et M_{i+1} sint in eadem serie, bini inter se aequales M_i et N_i in eadem verticali. Jam si series superior Tertiae Classis s est immutata, secundum Corollarium antecedens dabitur in K maximum ipsi M aequale et in eadem verticali positum; unde ad Canonem formandum non

*) Vide supra Tertiae Classis definitionem p. 313.

augeri poterit series s_1, alioquin enim augeretur terminus N ipsoque maximo M in eadem verticali posito major evaderet. Unde series s_1 et ipsa immutata esse debet, similiterque probatur, omnes quoque s_2, s_3, ... s_{m-1} nec non seriem inferiorem s_m immutatam fore, quod fieri non posse vidimus.

Cum ad Canonem formandum nulla series Tertiae Classis immutata manere possit, sit f minima quantitatum quibus illae series augeri debent, ita ut omnibus quantitate f auctis in novo schemate certe una earum exstet, quae ad Canonem formandum non amplius augenda sit, sed *immutata* maneat. Sit g quantitas minima qua ipsius S series Tertiae Classis augentur, ut unus earum terminus aequetur ejusdem verticalis maximo in serie Secundae aut Primae Classis posito. Si $f' < g$ atque omnes series Tertiae Classis quantitate f' augentur, in novo schemate videmus distributionem seriērum in Classes non alterari, sed quamque ad eandem pertinere Classem atque in S. Unde non poterit fieri $f < g$; alioquin enim haberetur schema, in quo daretur series aliqua Tertiae Classis immutata, quod fieri non potest. Hinc videmus, quantitatem minimam qua series Tertiae Classis augendae sint, ut unus earum terminus aequetur ejusdem verticalis maximo in serie Primae aut Secundae Classis posito, aequalem aut inferiorem esse quantitate minima earum, quibus series Tertiae Classis ad Canonem formandum augeri debent. Unde sequitur regula tradita nunquam majores adhiberi additiones, quam ad Canonem quemcunque formandum necessarium sit, ideoque *Canonem regula nostra erutum fieri simplicissimum.*

Exemplum.

Schema propositum.

11	7	6	4	6	4	11
11	12	11	11	3	11	12
8	11	15	14	9	6	8
19	10	16	25	11	12	22
18	15	15	20	24	9	24
10	18	23	21	19	23	21
5	14	10	27	31	20	40

Schema praeparatum.

$\underline{19}^*$	15	14	12	14	12	19	*t*
17	$\underline{18}^*$	17	17	9	17	18	*t*
15	$\underline{18}$	22	21	16	13	15	*t*
$\underline{19}$	10	16	25	11	12	22	*t*
$\underline{19}$	16	16	21	25	10	25	*t*
10	$\underline{18}$	$\underline{23}$	21	19	$\underline{23}^*$	21	
5	14	10	$\underline{27}$	$\underline{31}$	20	$\underline{40}^*$	

Schema derivatum I.

20*	16	15	13	15	13	20	t
18	19*	18	18	10	18	19	
16	19	23*	22	17	14	16	
20	11	17	26	12	13	23	t
20	17	17	22	26	11	26	t
10	18	23	21	19	23*	21	
5	14	10	27	31	20	40*	

Schema derivatum II.

21*	17	16	14	16	14	21	t
18	19*	18	18	10	18	19	
16	19	23*	22	17	14	16	
21	12	18	27*	13	14	24	
21	18	18	23	27	12	27	t
10	18	23	21	19	23*	21	
5	14	10	27	31	20	40*	

Schema derivatum III.

22*	18	17	15	17	15	22	t
18	19*	18	18	10	18	19	t
16	19	23*	22	17	14	16	
21	12	18	27*	13	14	24	
22	19	19	24	28	13	28	t
10	18	23	21	19	23*	21	
5	14	10	27	31	20	40*	

Canon simplicissimus.

25*	21	20	18	20	18	25
21	22*	21	21	13	21	22
16	19	23*	22	17	14	16
21	12	18	27*	13	14	24
25	22	22	27	31*	16	31
10	18	23	21	19	23*	21
5	14	10	27	31	20	40*

In schemate proposito tres primae series et quinta terminis maximis carent. Quibus seriebus respective additi sunt numeri minimi 8, 6, 7, 1, quibus fieri potuit, ut unus earum terminus evaderet maximus. In schemate sic praeparato in quaque verticali terminos maximos omnes sublineavi, insuper maxima transversalia electa stellavi (asterisco notavi). Deinde juxta scripto t denotavi series Tertiae Classis, quae sic inveniuntur. Primum enim ad eas pertinent omnes series α, quae carent termino stellato, quas supra inferiores appellavi; deinde series β, quae terminum stellatum habent in eadem verticali, in qua et aliquis serierum α terminus sublineatur; series β si praeter terminos stellatos alios habent sublineatos, in iisdem verticalibus quaeruntur novi termini stellati qui ad series γ pertinent, et ita porro: omnes series α, β, γ cet. facillime inventae formabunt Tertiam Classem. Patet autem ad regulam exsequendam tantum postulari ut series Tertiae Classis cognoscantur neque dis-

tributione in Primam et Secundam Classem opus esse. Regula enim nihil poscit nisi ut series Tertiae Classis omnes simul quantitate minima augeantur, qua fit, ut earum terminus unus aequetur reliquarum serierum termino maximo alicui stellato in eadem verticali posito. Totum igitur negotium consistit in hac augmentatione serierum, electione maximorum transversalium atque distributione serierum Tertiae Classis post quamque augmentationem denuo efficienda. Id quod continuandum est, usque dum series Tertiae Classis non amplius inveniuntur, quo casu ad Canonem simplicissimum pervenimus.

Schematis totius post quamque mutationem denuo scribendi negotium variis artificiis expediri potest. Scilicet ut a schemate aliquo ad proximum transeamus non opus est, ut alios terminos ante oculos habeamus quam qui in quaque verticali maximi sunt et maximis proxime inferiores, unde hos scribere sufficit. Porro cum serierum ordo non respiciendus sit, sufficit series tantum augendas delere et auctas infra reliquas scribere quae non mutantur. Sed haec et alia, quae commode in magna numerorum mole adhibentur, melius cujusque genio relinquuntur.

Zur Theorie der einwerthigen Potentiale.

(Von Herrn *E. B. Christoffel* in Zürich.)

Die Eigenschaften der Potentiale von Massen, welche körperliche Räume oder Oberflächen stetig erfüllen, sind seit den Untersuchungen von *Gauss* und *Green* und den Entdeckungen *Dirichlets* so vollständig festgestellt, dass eine auf diese speciellen Functionen beschränkte Untersuchung fast ausschliesslich auf die Reproduction bekannter Resultate angewiesen sein würde.

Die eben bezeichneten Potentiale sind aber weder die einzigen, welche in der Lehre von den nach dem *Newton*schen Gesetze wirkenden Anziehungskräften in Betracht zu ziehen sind, noch von ausschliesslicher Bedeutung für die Anwendungen. Vielmehr müssen zu ihnen, wie aus der Theorie des Magnetismus und der linearen elektrischen Ströme bekannt ist, noch andere gefügt werden, bei denen die Anziehung von einzelnen Punkten oder den kleinsten Theilen einer Linie aus wirkt, und von denen namentlich die auf den letzten Fall bezüglichen, in hinlänglicher Allgemeinheit aufgefasst, jenen an Wichtigkeit kaum nachstehen dürften.

Man erkennt indessen sehr leicht, wenn man nur den Unterschied zwischen dem Potential eines schweren Massenpunktes und demjenigen eines magnetischen Elementes beachtet, dass die Eintheilung der Potentiale nach fingirten Massenvertheilungen keinen Ueberblick über den Umfang dieser Functionengattung gewähren kann, ganz abgesehen von den Schwierigkeiten, welche sich darbieten, wenn man die charakteristischen Eigenschaften solcher Potentiale an ihren, durch die vorausgesetzte Massenvertheilung bedingten Ausdrücken selbst aufsucht.

Um diese Fragen zu erledigen, bin ich daher in der folgenden Arbeit nicht von gegebenen Ausdrücken der einzelnen Potentiale ausgegangen, sondern von einer Definition derselben, durch welche die allen einwerthigen Potentialen ausserhalb ihrer Unstetigkeitsstellen gemeinsamen Eigenschaften (art. I.) und ihre ausnahmslose Darstellbarkeit durch convergente Rechnungsoperationen (art. VI.) zu Merkmalen der ganzen Gattung gemacht werden. Von diesem Standpunkte aus besteht das Ziel der Untersuchung darin, die ganze Functionengattung nach Massgabe der mit den genannten Bedingungen verträglichen Un-

stetigkeiten in ihre charakteristischen Unterabtheilungen zu zerfällen, und die analytischen Formen zu entwickeln, durch welche die Functionen jeder Abtheilung dargestellt werden.

Es kann als ein Vortheil dieser Behandlungsweise bezeichnet werden, dass sie bei jeder Gattung von Potentialen die wesentlichen Eigenschaften derselben ihrem vollen Umfange nach hervortreten lässt. In der That findet sich unter den bekannten Sätzen über die Potentiale von Körpermassen und Flächenschichten (art. V. c., IX. m., XII. q.), auf welche die folgende Untersuchung ihrer Natur nach ebenfalls führen musste, keiner, der nicht von Beschränkungen befreit worden ist, die sich zwar beim directen Nachweise dieser Sätze an den Ausdrücken jener Potentiale durch doppelte und dreifache Integrale nicht vermeiden lassen, aber nur aus den hierbei verfügbaren Hülfsmitteln entspringen.

Die Gleichungen III. (*O.*) und IV. (3.) sind schon mehrfach aufgestellt, aber noch nicht zu den Folgerungen benutzt worden, die hier aus ihnen gezogen werden, wozu allerdings in den schwierigern Fällen die Hülfssätze *d.* und *e.* des art. VII. erforderlich sind. Mit Rücksicht auf die Wichtigkeit dieser und ähnlicher Formeln durfte eine vollständige Begründung der erstern nicht übergangen werden. Um in den art. VII., XI., XII. den Gang der Untersuchung nicht unterbrechen zu müssen, habe ich den Beweis einiger dort benutzter Hülfssätze an den Schluss der Abhandlung in besondere Noten verlegt.

I.

Wir bezeichnen durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes $\mathfrak{o}$ im unbegrenzten Raume $\mathfrak{R}$, und durch ϱ' den in ihm stattfindenden Werth einer gegebenen einwerthigen Function, welche, mit Ausnahme von isolirten Punkten, Linien und Flächen, nirgendwo unbestimmt oder unstetig ist, und nur in isolirten Punkten $\mathfrak{q}$ unendlich wird. In der Nähe der letztern beschränken wir das Anwachsen von ϱ' durch die Bedingung, dass das Product

$$\mathfrak{r}^k \varrho',$$

wenn $\mathfrak{r}$ die Entfernung von $\mathfrak{o}$ bis $\mathfrak{q}$ bedeutet, bei jeder Richtung von $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{r}$ zugleich verschwindet, sobald für k ein passender, von 1 verschiedener positiver echter Bruch gesetzt wird. Endlich setzen wir, wenigstens vorläufig fest, dass ϱ' ausserhalb eines gegebenen Raumes $\mathfrak{R}'$, der keine unendlich weit vom Coordinatenanfange entfernten Punkte enthält, gleich Null sein soll.

Unter diesen Voraussetzungen untersuchen wir diejenigen Functionen $\mathfrak{v}$ von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, welche den folgenden Bedingungen genügen:

$\mathfrak{A}$. Im ganzen Raume $\mathfrak{R}$, mit Ausnahme gegebener Punkte $\mathfrak{p}$, Linien $\mathfrak{l}$ und Flächen $\mathfrak{f}$, sind $\mathfrak{v}$ und seine ersten Derivirten einwerthig, endlich und stetig.

$\mathfrak{B}$. Ausserhalb der in $\mathfrak{A}$. bezeichneten Stellen besteht zwischen den zweiten Derivirten von $\mathfrak{v}$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial\mathfrak{x}^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial\mathfrak{y}^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial\mathfrak{z}^2} = -4\pi\varrho'.$$

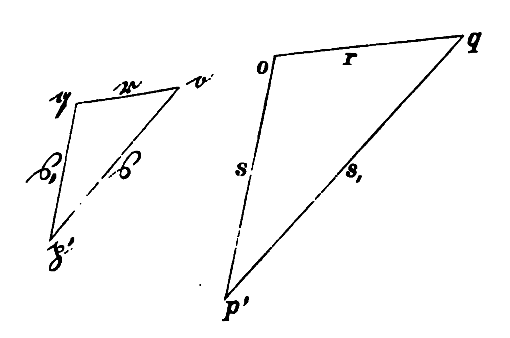
$\mathfrak{C}$. Den Fall, wo eine erste Derivirte von $\mathfrak{v}$ oder $\mathfrak{v}$ selbst an einer Fläche entlang unendlich oder unbestimmt wird, schliessen wir aus.

Nähere Bestimmungen über die Zahl und Beschaffenheit der Ausnahmestellen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{f}$ und das Verhalten von $\mathfrak{v}$ an denselben bleiben der späteren Untersuchung vorbehalten.

II.

Durch conforme Umbildung des Raumes $\mathfrak{R}$ ist man zunächst im Stande, jede Function $\mathfrak{v}$ auf eine andere Function v von derselben Art zurückzuführen, die an so enge gezogene Bedingungen gebunden ist, dass sie einer weitern Behandlung zugänglich wird.

Neben dem unbegrenzten Raume $\mathfrak{R}$ denke man sich einen zweiten, ihm in den kleinsten Theilen ähnlichen Raum R, und in demselben drei rechtwinklige Axen; die Coordinaten eines R angehörigen Punktes o in Bezug auf diese Axen sollen x, y, z heissen. Es seien ferner $\mathfrak{p}'$ und p' zwei in $\mathfrak{R}$ und R nach Belieben angenommene Punkte, deren



Coordinaten, jedesmal mit Bezug auf die dem betreffenden Raume angehörigen Axen, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ und l, m, n sind. Bezeichnet man nun die Entfernungen $\mathfrak{o}\mathfrak{p}'$ und op' durch $\mathfrak{s}$ und s, so wird nach einem Satze des Herrn *Liouville**) die

---

*) Journ. de M. *Liouville*, XV. Wegen des Ueberganges von $\mathfrak{v}$ und ϱ' zu v und ϱ und der sich hieran knüpfenden Relationen vergl. die wichtige Abhandlung des Herrn *Liouville* im nämlichen Journal XII. 286—288.

verlangte Beziehung zwischen den entsprechenden Punkten $\mathfrak{o}$ und o beider Räume auf die allgemeinste Weise durch die Gleichungen

$$(1.)\quad \mathfrak{x}-\mathfrak{l} = \left(\frac{a}{s}\right)^2 (x-l),\quad \mathfrak{y}-\mathfrak{m} = \left(\frac{a}{s}\right)^2 (y-m),\quad \mathfrak{z}-\mathfrak{n} = \left(\frac{a}{s}\right)^2 (z-n)$$

oder die aus ihnen folgenden

$$\mathfrak{s}s = a^2,\quad \frac{\mathfrak{x}-\mathfrak{l}}{\mathfrak{s}} = \frac{x-l}{s},\quad \frac{\mathfrak{y}-\mathfrak{m}}{\mathfrak{s}} = \frac{y-m}{s},\quad \frac{\mathfrak{z}-\mathfrak{n}}{\mathfrak{s}} = \frac{z-n}{s}$$

dargestellt, vorausgesetzt, dass die Aehnlichkeit entsprechender Figuren bei beliebiger Grösse derselben und imaginäre Beziehungen ausgeschlossen werden.

Die letzten Gleichungen lassen die geometrische Beziehung zwischen den entsprechenden Punkten beider Räume unmittelbar erkennen, wenn man einen dieser Räume solange verschiebt und dreht, bis die Punkte $\mathfrak{p}'$ und p' und die Richtungen der wachsenden Coordinaten zusammenfallen, wobei der Fall, dass dies letztere nicht angeht, ausser Acht gelassen werden kann. In der That geht dann die Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte $\mathfrak{o}$, o stets durch den Punkt $(\mathfrak{p}', p')$, und ihre von diesem Punkte ausgehenden Radienvectoren $\mathfrak{s}$, s werden zu einander umgekehrt proportional.

Nennt man $\mathfrak{p}'$ und p' die Mittelpunkte der beiden Räume $\mathfrak{R}$ und R, so folgt aus der Gleichung $\mathfrak{s}s = a^2$, dass im Mittelpunkte des einen Raumes die unendlich entfernten Theile des andern abgebildet sind. Ausserhalb $\mathfrak{p}'$ sind x, y, z einwerthige, endliche und stetige Functionen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, und umgekehrt letztere ausserhalb p' in gleicher Weise mit jenen verbunden. Folglich gehört ausserhalb der Mittelpunkte zu jedem Punkte des einen Raumes ein einziger, ihn abbildender Punkt im andern Raume; wenn die Entfernung eines Punktes vom zugehörigen Mittelpunkte messbar, d. i. weder unendlich gross, noch unendlich klein ist, so gilt dasselbe von seiner Abbildung im andern Raume; endlich werden zusammenhängende Oerter in der Abbildung nicht getrennt, unterbrochene nicht zusammengefügt.

Gleichzeitig mit dieser Umbildung von $\mathfrak{R}$ führe ich zwei auf R bezogene Functionen v und ϱ ein (vergl. die oben erwähnte Abhandlung von *Liouville*), welche die conformen Umbildungen von $\mathfrak{v}$ und ϱ' heissen mögen, und mit Rücksicht auf die in (1.) festgestellte Beziehung zwischen den Variabeln $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und x, y, z durch die Gleichungen

$$(2.)\quad v = \frac{\mathfrak{s}}{a}\mathfrak{v},\quad \varrho = \left(\frac{\mathfrak{s}}{a}\right)^5 \varrho',$$

oder die folgenden

$$v = \frac{a}{s}\,\mathfrak{v}, \quad \varrho = \left(\frac{a}{s}\right)^5 \varrho'$$

bestimmt sind.

Dies festgestellt, gehen wir dazu über, die im vorigen art. für ϱ' und $\mathfrak{v}$ gestellten Bedingungen auf ϱ und v zu übertragen, und wählen zu diesem Zwecke den Mittelpunkt $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{R}$ ausserhalb $\mathfrak{R}'$ und sämmtlicher Ausnahmestellen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{f}$.

Dann kann die Abbildung R' von $\mathfrak{R}'$, in welcher allein ϱ von Null verschieden ist, weder den Mittelpunkt p' von R enthalten, noch bis ins Unendliche reichen, ersteres, weil $\mathfrak{R}'$ nicht bis ins Unendliche reicht, letzteres, weil $\mathfrak{p}'$ nicht im Innern von $\mathfrak{R}'$ liegt. Da hiernach $\varrho = \left(\frac{\mathfrak{s}}{a}\right)^5 \varrho'$ im Punkte p', ungeachtet des dort ins Unendliche wachsenden Factors $\mathfrak{s}^5$ gleich Null bleibt, so kann es nur mit ϱ' zugleich unbestimmt, unstetig oder unendlich werden, ersteres also nur in isolirten Punkten, Linien und Flächen, letzteres nur in solchen Punkten q, welche den Punkten $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{R}$ entsprechen.

Ist r die Entfernung von q bis o, und bedeuten $\mathfrak{s}_1$, s_1 die Abstände der Punkte $\mathfrak{q}$, q von den zugehörigen Mittelpunkten, so folgt aus der, durch die Gleichungen (1.) und die Proportion $\mathfrak{s}:s_1 = \mathfrak{s}_1:s$ leicht zu beweisenden Aehnlichkeit der Dreiecke $\mathfrak{p}'\mathfrak{o}\mathfrak{q}$, $p'qo$, $r = \frac{a^2}{\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1}\mathfrak{r}$, also

$$r^k\varrho = \left(\frac{\mathfrak{s}}{a}\right)^5 \left(\frac{a^2}{\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1}\right)^k . \mathfrak{r}^k\varrho'.$$

Lässt man $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{q}$, also auch o mit q zusammenfallen, so verschwindet auf der rechten Seite der Factor $\mathfrak{r}^k\varrho'$ nach art. I., der andere Factor wird $= \left(\frac{\mathfrak{s}_1}{a}\right)^{5-2k}$, also nicht unendlich gross. Folglich verschwindet $r^k\varrho$ unabhängig von der Richtung von r, sobald o mit q zusammenfällt. Die für ϱ eintretenden Bedingungen sind also von derselben Art, wie die in art. I. für ϱ' gestellten.

Anders verhält es sich mit v; die über die Lage von $\mathfrak{p}'$ getroffene Bestimmung führt eine wesentliche Beschränkung in der Lage der Ausnahmestellen von v und eine Zerlegung von $\mathfrak{A}$. in zwei Bedingungen herbei, von denen die eine sich auf das Innere von R, die andere sich auf die unendlich entfernten Theile dieses Raumes bezieht.

Da die Ausnahmestellen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{v}$ ausserhalb $\mathfrak{p}'$ liegen, so liegen ihre Abbildungen p, l, f sämmtlich in einem endlichen Bereiche von p', der-

art, dass man sie mit p' in eine Fläche S einschliessen kann, die keine unendlich weit von einander und von dem willkürlich zu wählenden Coordinatenanfange entfernten Punkte enthält. In p, l, f verlieren v und seine ersten Derivirten der Definition gemäss die Eigenschaft, zugleich einwerthig, endlich und stetig zu sein; dasselbe gilt im Allgemeinen auch noch vom Punkte p', aber von keinem andern Punkte des Raumes R.

In der That liefert jeder im Unendlichen liegende Punkt $\mathfrak{p}$ des Raumes $\mathfrak{R}$ einen mit p' zusammenfallenden Punkt p; jeder Linie $\mathfrak{l}$ und jeder Fläche $\mathfrak{f}$, die in $\mathfrak{R}$ bis ins Unendliche reicht, entspricht eine Linie l und eine Fläche f, die sich in p' schliesst. Enthält $\mathfrak{R}$ keine Ausnahmestelle von $\mathfrak{v}$ im Unendlichen, so wird p' gleichwohl eine Ausnahmestelle von v werden, sobald $\mathfrak{s}\mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{s}$ zugleich über alle Grenzen wächst.

Bezeichnet man durch α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Richtung von p' nach o mit den Axen der x, y, z bildet, so wird z. B. $\alpha = \frac{x-l}{s}$, und man erhält aus (1.) und (2.)

$$\frac{\partial s v}{\partial x} = a\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} = \frac{a^2}{s^2}\left[\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{x}} - 2\alpha\left(\alpha\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{x}} + \beta\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{y}} + \gamma\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{z}}\right)\right].$$

Nennt man daher die festen Werthe, welche $a^3\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{x}}$, $a^3\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{y}}$, $a^3\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{z}}$ in $\mathfrak{p}'$ erlangen, P, Q und R, und lässt nun o in der durch α, β, γ bestimmten Richtung ins Unendliche rücken, wobei dann schliesslich $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{p}'$ zusammenfällt, so folgt der Satz, dass $s^2\frac{\partial s v}{\partial x}$ gegen die feste Grenze $P-2\alpha(\alpha P+\beta Q+\gamma R)$ convergirt. Aehnliches gilt von $s^2\frac{\partial s v}{\partial y}$ und $s^2\frac{\partial s v}{\partial z}$.

Da aber hiernach $s^2\frac{\partial s v}{\partial x}$ bei unbegrenzter Zunahme von s nicht über alle Grenzen wächst, so muss $s\frac{\partial s v}{\partial x} = s^2\frac{\partial v}{\partial x} + s v\,\alpha$ an der Grenze verschwinden. Bezeichnet man daher durch M den festen Werth, den $a\mathfrak{v} = s v$ in $\mathfrak{p}'$ erlangt, so folgt unter derselben Voraussetzung, wie vorhin, $\lim s v = M$, $\lim s^2\frac{\partial v}{\partial x} = -M\alpha$; und man sieht leicht, dass man hier s durch die Entfernung r zwischen o und einem beliebigen, in endlicher Entfernung von p' liegenden Punkte O ersetzen kann, weil der Quotient $\frac{s}{r}$ im Unendlichen $=1$ wird. Folglich haben wir den Satz:

Sind α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Richtung von einem festen Punkte O nach o mit den Axen bildet, und ist r die Entfernung

beider Punkte, so gelten für die von O unendlich weit entfernten Punkte o des Raumes die asymptotischen Ausdrücke:

$$v = \frac{M}{r}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{M\alpha}{r^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{M\beta}{r^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{M\gamma}{r^2}.$$

Wir ziehen endlich aus dem Vorstehenden noch die für unsere spätern Zwecke ausreichende Folgerung, dass v, $r\frac{\partial v}{\partial x}$, $r\frac{\partial v}{\partial y}$ und $r\frac{\partial v}{\partial z}$ im Unendlichen verschwinden, ohne vorher ihre Stetigkeit zu unterbrechen.

Schliesslich wird (vergl. die Abhandlung von *Liouville*)

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{y}^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{z}^2} = \left(\frac{s}{a}\right)^5 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right],$$

also, wenn man den rechts in Klammern stehenden Ausdruck wie üblich durch Δv bezeichnet, $\Delta v = -4\pi\left(\frac{a}{s}\right)^5 \varrho' = -4\pi\varrho$.

Die Functionen v genügen daher den folgenden Bedingungen:

A. v und seine ersten Derivirten sind, mit Ausnahme gewisser Stellen, im ganzen Raume R einwerthig, endlich und stetig.

B. Ausserhalb derselben Stellen besteht zwischen den zweiten Derivirten von v die Gleichung

$$\Delta v = -4\pi\varrho.$$

C. Eine Ausnahme von diesen Bedingungen wird nur in bestimmten Punkten p, Linien l und Flächen f gestattet. Diese ***Ausnahmestellen*** sind so im Raume vertheilt, dass man sie in eine Fläche S einschliessen kann, welche keine unendlich weit vom Coordinatenanfange entfernten Punkte enthält.

Den Fall, wo v oder eine erste Derivirte von v an einer Fläche entlang unendlich oder unbestimmt wird, schliessen wir aus.

D. Ist r die Entfernung von o bis zu irgend einem festen Punkte O, so convergiren

$$v, \quad r\frac{\partial v}{\partial x}, \quad r\frac{\partial v}{\partial y}, \quad r\frac{\partial v}{\partial z}$$

ohne Stetigkeitsunterbrechung gegen Null, wenn o, ohne S zu überschreiten, in beliebiger Richtung ins Unendliche rückt.

E. Die für ϱ gültigen Bedingungen sind die nämlichen, wie die in art. I. für ϱ' gestellten.

Folglich ist v eine Function derselben Art, wie $\mathfrak{v}$, jedoch von speciellem Charakter, da alle Ausnahmestellen ins Endliche gerückt sind, und

für die unendlich entfernten Theile des Raumes die *Dirichlet*sche Bedingung D. eingetreten ist. Wir haben daher den Satz, dass jede Function $\mathfrak{v}$ sich aus einer solchen speciellen Function v durch conforme Umbildung des Raumes R und der Functionen v und ϱ ergiebt.

Die Functionen v unterscheiden sich von einander 1) durch die Zahl und Beschaffenheit ihrer Ausnahmestellen und 2) durch die Gesetze, nach denen sie und ihre ersten Derivirten dort anwachsen oder unstetig werden. Was den ersten Punkt betrifft, so werden wir im Folgenden stets die Grenzfälle ausschliessen, wo die Anzahl der Punkte p, die Länge einer Linie l oder der Inhalt einer Fläche f unendlich gross ist. Diese Beschränkung der Aufgabe ist keine wesentliche, und hat nur den Zweck, von der Untersuchung der Hauptfälle Convergenzfragen fern zu halten, welche bloss auf den Uebergang zu den Grenzfällen Bezug haben, und in jedem einzelnen Falle besonders zu erledigen sind (art. XIII.).

III.

Wir denken uns einen zusammenhängenden Theil V des unbegrenzten Raumes, in dessen Innerem sich Höhlungen befinden, welche sämmtliche Ausnahmestellen von v enthalten, und nennen S die Gesammtoberfläche dieser Höhlungen, S_x die äussere Oberfläche von V, so dass die vollständige Begrenzung dieses Raumes durch die Flächen S und S_x gebildet wird. Die Elemente der drei Gebiete V, S_x und S werden wir durch ∂V, ∂S_x und ∂S, ihre Coordinaten ohne Unterschied durch x, y, z, dagegen die Coordinaten eines in V festgewählten Punktes O durch X, Y, Z bezeichnen.

Um diesen Punkt O als Centrum legen wir eine Kugel K, deren Halbmesser c wir so klein wählen, dass alle Punkte von K ins Innere von V fallen, und eine zweite Kugel K_1, deren Halbmesser die Längeneinheit ist. Ist alsdann $\partial\sigma$ ein Oberflächenelement von K_1, und sind ξ, η, ζ seine Coordinaten in Bezug auf drei durch O in gleicher Richtung mit den ursprünglichen gelegte Axen, so sind in Bezug auf dieselben Axen $c\xi$, $c\eta$, $c\zeta$ die Coordinaten seiner Centralprojection auf K, und ihr Inhalt $c^2\partial\sigma$ ist das Oberflächenelement der letztern.

Wir errichten endlich über ∂S und ∂S_x Normalen, die erstere nach V hinein, die andere aus diesem Raume hinaus, und nennen die ersten Elemente dieser Normalen ∂p und ∂p_x, so dass z. B. $\frac{\partial\omega}{\partial p}$ den Werth bedeutet,

welchen die Derivirte von ω nach der über ∂S errichteten Normale in ihrem Anfangspunkte auf ∂S hat.

1. Multiplicirt man die Gleichung $\Delta v = -4\pi\varrho$ mit $-\frac{\partial V}{4\pi r}$, wo r die Entfernung von O bis zum Elemente ∂V ist, und integrirt über alle Elemente von V mit Ausschluss der in K enthaltenen, so ergiebt sich mit Hülfe der Gleichung $\frac{1}{r}\Delta v = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right) + \cdots$ und mit Rücksicht darauf, dass der Ausdruck $\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}$ und die beiden ähnlich gebildeten während der Integration einwerthig, endlich und stetig bleiben, nach dem *Green*schen Satze

$$'\!\!\int \frac{\varrho \partial V}{r} = -\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p_\infty} - v\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_\infty}\right) S\partial_\infty + \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p} - v\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p}\right)\partial S$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial c} - v\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial v}\right)c^2\partial\sigma,$$

wo zur Linken der Accent am Integralzeichen bedeutet, dass das Volumen der Kugel K vom Integrationsraume ausgeschlossen ist.

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{1}{4\pi}\int\left(v\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p}\right)\partial S = (S),\quad \frac{1}{4\pi}\int\left(v\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_\infty} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p_\infty}\right)\partial S_\infty = (S_\infty),$$

so folgt hieraus:

$$\frac{1}{4\pi}\int\left(c\frac{\partial v}{\partial c} + v\right)\partial\sigma = {}'\!\!\int\frac{\varrho\partial V}{r} + (S) - (S_\infty).$$

In dieser Gleichung lassen wir c verschwinden, und werden beweisen, dass unter diesen Umständen beide Seiten gegen feste Grenzen convergiren, und auch beim Uebergange zur Grenze $c = 0$ nicht aufhören, einander gleich zu sein.

Das Integral $\frac{1}{4\pi}\int c\frac{\partial v}{\partial c}\partial\sigma$ ist numerisch kleiner als das Product aus $\frac{1}{4\pi}\int c\,\partial\sigma = c$ und dem grössten numerischen Werthe, den

$$\frac{\partial v}{\partial c} = \xi\frac{\partial v}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v}{\partial z}$$

auf K erlangt. Da aber $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ den unveränderlichen Werth 1 hat, so kann

dieses Product wegen A. durch Verkleinerung von c unter jede Grenze gebracht werden; folglich convergirt $\frac{1}{4\pi}\int c \frac{\partial v}{\partial c}\,\partial\sigma$ mit abnehmendem c ohne Stetigkeitsunterbrechung gegen Null.

Nennt man ferner v den Werth, den die einwerthige Function v in O erlangt, und ersetzt das Integral $\frac{1}{4\pi}\int v\,\partial\sigma$ durch $v_0 + \frac{1}{4\pi}\int (v - v_0)\,\partial\sigma$, so convergirt der zweite Summand wegen der Stetigkeit von v mit abnehmendem c stetig gegen Null.

Folglich convergirt bei unbegrenzter Abnahme von c die linke Seite obiger Gleichung ohne Stetigkeitsunterbrechung gegen die feste Grenze v_0.

Auf der rechten Seite ändert sich während dessen nur das erste Glied, und zwar ist der Zuwachs, den sie erlangt, wenn c in den kleineren Werth b übergeht, gleich $\int_b^c r\,\partial r \int \varrho\,\partial\sigma$. Solange O in messbarer Entfernung von allen Punkten q liegt, in denen ϱ unendlich wird, verschwindet dieses Integral offenbar mit c zugleich; ist dagegen O selbst einer dieser Punkte, so setze man dasselbe, bei passender Wahl des von 1 verschiedenen positiven echten Bruches k gleich $\int_b^c r^{1-k}\,\partial r \int r^k \varrho\,\partial\sigma$. Dann kann man c so klein wählen, dass $r^k \varrho$ während der Integration numerisch kleiner als eine beliebig gegebene Zahl A bleibt, also das Integral, abgesehen vom Zeichen, kleiner als

$$\int_b^c r^{1-k}\,\partial r \int A\,\partial\sigma = 4\pi A \cdot \frac{c^{2-k} - b^{2-k}}{2-k}$$

wird. Folglich convergirt dieses Integral auch im gegenwärtigen Falle mit c und dem kleineren b zugleich stetig gegen Null.

Man kann daher c so klein wählen, dass jeder Zuwachs, den die rechte Seite obiger Gleichung durch fernere Verkleinerung von c noch erhalten kann, unter eine beliebige Grenze gedrückt wird. Da aber die rechte Seite, so lange c von Null verschieden ist, einen völlig bestimmten, endlichen Werth hat, so folgt hieraus zunächst, dass sie bei unbegrenzter Abnahme von c ohne Stetigkeitsunterbrechung gegen eine feste Grenze convergirt, welche dadurch erhalten wird, dass man in ihrem ersten Gliede die Integration über das ganze Volumen V ausdehnt.

Da endlich die obige Gleichung für ein beliebig kleines c besteht, solange nur c von Null verschieden ist, und die letzten Aenderungen, welche ihre beiden Seiten erleiden, wenn man c vollends verschwinden lässt, selbst

verschwindend klein, also nicht um messbare Grössen von einander verschieden sind, so kann die Gleichheit auch durch den Uebergang zur Grenze $c=0$ nicht aufgehoben werden, und es ergiebt sich nun folgende, bei jeder Lage von O im Innern von V gültige Gleichung:

$$(O.) \qquad v_0 = \int \frac{\varrho \partial V}{r} + (S) - (S_\infty).$$

2. Hätte man die Gleichung $\Delta v = -4\pi\varrho$ mit $\frac{x-X}{4\pi r^3}\partial V = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X}\partial V$ multiplicirt, und die Integration im früheren Umfange ausgeführt, so würde sich

$$\frac{1}{4\pi}\int\left[\frac{x-X}{r^3}\frac{\partial v}{\partial c} - v\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{x-X}{r^3}\right)\right]c^2\partial\sigma = {}'\!\!\int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X}\partial V + (S)' - (S_\infty)'$$

ergeben haben, wo $(S)'$ und $(S_\infty)'$ die Integrale bedeuten, welche man aus den vorhin durch (S) und (S_∞) bezeichneten erhält, wenn man $\frac{1}{r}$ durch $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X}$ ersetzt, d. h. unter dem Integralzeichen nach X differentiirt.

Im Elemente $c^2\partial\sigma$ wird nach der oben eingeführten Bezeichnung $x-X = c\xi$, $\frac{x-X}{r^3} = \frac{\xi}{c^2}$, also ist die linke Seite gleich

$$\frac{1}{4\pi}\int\left[\frac{\xi}{c^2}\frac{\partial v}{\partial c} - v\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\xi}{c^2}\right)\right]c^2\partial\sigma = \int \frac{\partial(v\xi c^2)}{4\pi c^2 \partial c}\cdot\partial\sigma.$$

Bezeichnet man aber durch ∂K das Volumenelement von K, so ist wegen der Stetigkeit von v $\int \frac{\partial v}{\partial x}\partial K = \int v\xi c^2\partial\sigma$. Lässt man hier c um ∂c wachsen, und hebt in den Aenderungen beider Seiten mit $4\pi c^2\partial c$ weg, so folgt

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial v}{\partial x}\partial\sigma = \frac{\partial \int v\xi c^2\partial\sigma}{4\pi c^2\partial c} = \int \frac{\partial(v\xi c^2)}{4\pi c^2\partial c}\cdot\partial\sigma,$$

da $\frac{\partial(v\xi c^2)}{\partial c}$ während der Integration weder unendlich noch unbestimmt wird. Also haben wir

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial v}{\partial x}\partial\sigma = {}'\!\!\int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\partial V + (S)' - (S_\infty)'.$$

Die linke Seite ist ein Mittel aus den Werthen, welche $\frac{\partial v}{\partial x}$ auf K erlangt, und geht daher wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial v}{\partial x}$ mit abnehmendem c stetig in den festen Werth $\frac{\partial v_0}{\partial X}$ über, welchen diese Derivirte in O hat.

Können wir daher beweisen, dass auch die rechte Seite mit abnehmendem c ohne Stetigkeitsunterbrechung gegen eine feste Grenze convergirt, so folgt, dass die Gleichung auch noch an der Grenze $c=0$ besteht.

Lässt man c in den kleineren Werth b übergehen, so erhält die rechte Seite den Zuwachs

$$\int_b^c \partial r \int \varrho\,\xi\,\partial\sigma = \int_b^c \frac{\partial r}{r^k}\int r^k \varrho\,\xi\,\partial\sigma.$$

Solange O in messbarer Entfernung von jedem Punkte q liegt, verschwindet dies mit c zugleich; fällt O mit einem Punkte q zusammen, so wird für ein hinlänglich kleines c während der Integration $\int r^k \varrho\,\xi\,\partial\sigma$ numerisch kleiner als $\int A\,\partial\sigma = 4\pi A$, weil ξ zwischen -1 und 1 liegt; folglich wird jener Zuwachs kleiner als $4\pi A\int_b^c \frac{\partial r}{r^k} = 4\pi A\,\frac{c^{1-k}-b^{1-k}}{1-k}$, und verschwindet daher auch jetzt noch, wenn c und das kleinere b in Null übergehen. Daraus folgt:

$$(O'.)\qquad \frac{\partial v_0}{\partial X} = \int \varrho\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial X}\,\partial V + (S)' - (S_\infty)'.$$

Zugleich ist der Nachweis geliefert, dass das erste Glied zur Rechten einen völlig bestimmten, endlichen Werth hat, was von den beiden andern Gliedern ohne Weiteres einleuchtet.

IV.

Lässt man die Fläche S_∞ sich immer mehr erweitern, so dass sie fortwährend neue Theile des äusseren Raumes in ihr Inneres aufnimmt, ohne bereits überschrittene Theile auszuscheiden, so kann sich auf der rechten Seite der Gleichung

$$(O.)\qquad v_0 = \int \frac{\varrho\,\partial V}{r} + (S) - (S_\infty)$$

das erste Glied nur solange ändern, als es ausserhalb S_∞ noch Stellen giebt, in denen ϱ von Null verschiedene Werthe hat. Von dem Augenblicke an, wo S_∞ diese Stellen sämmtlich überschritten hat, wird das Integral $\int \frac{\varrho\,\partial V}{r}$ von der fernern Umgestaltung der Fläche S_∞ unabhängig.

Derselbe tritt einmal ein, wenn ϱ zwar im ganzen Raume Werthe hat, jedoch so verläuft, dass das über den ganzen Raum erstreckte Integral $\int \frac{\varrho\,\partial V}{r}$ von der Anordnung der Integration unabhängig convergirt. In der That kann

man unter dieser Voraussetzung dem Integrationsraume, ohne dabei Begrenzungstheile ins Unendliche zu verlegen, einen solchen Umfang ertheilen, dass keine fernere Erweiterung desselben den Werth des Integrals um eine beliebig kleine, gegebene Grösse zu ändern mehr im Stande ist.

Für den Fall, dass ϱ nicht bloss in einem begrenzten Raume R' von Null verschiedene Werthe hat, setzen wir diese Bedingung als erfüllt voraus.

Lässt man daher alle Punkte der Fläche S_∞ ins Unendliche rücken, wobei nach den einmal gestellten Bedingungen in V keine Ausnahmestelle von v aufgenommen werden kann, so wird vorstehende Gleichung eine, für alle ausserhalb S liegenden Punkte O gültige, convergente Darstellung von v_0 stets und auch nur dann liefern, wenn (S_∞) ohne Stetigkeitsunterbrechung gegen eine feste Grenze convergirt, die von dem Gesetze, nach welchem die Umgestaltung von S_∞ erfolgt, unabhängig ist.

Die Fläche S_∞ schliessen wir in eine Fläche S'_∞ ein, deren Element wir $\partial S'_\infty$ nennen; das erste Element der über ∂S_∞ aus dem von beiden Flächen begrenzten Raume hinaus errichteten Normale soll durch $\partial p'_\infty$ bezeichnet werden. Sei w eine zweite, nebst ihren ersten Derivirten in diesem Raume einwerthige, endliche und stetige Function, welche der Gleichung $\Delta w = 0$ genügt. Integrirt man nun die Gleichung $v\Delta w - w\Delta v = \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial w}{\partial x} - w\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \cdots = 4\pi\varrho w$ über den zwischen S_∞ und S'_∞ liegenden Raum W, so folgt, wenn mit 4π weggehoben wird

$$(3.)\quad \frac{1}{4\pi}\int\left(v\frac{\partial w}{\partial p'_\infty} - w\frac{\partial v}{\partial p'_\infty}\right)\partial S'_\infty = \frac{1}{4\pi}\int\left(v\frac{\partial w}{\partial p_\infty} - w\frac{\partial v}{\partial p_\infty}\right)\partial S_\infty + \int \varrho w\,\partial W.$$

Setzt man hier $w = \frac{1}{r}$, und lässt nun die Flächen S_∞ und S'_∞ unabhängig von einander ins Unendliche rücken, so convergirt der oben gestellten Bedingung zufolge $\int \varrho w\,\partial W$ stetig gegen Null. Wenn daher gleichzeitig die linke Seite gegen eine feste Grenze convergirt, so ist dies auch die Grenze des ersten Gliedes zur Rechten, nämlich von (S_∞). Nimmt man aber für S'_∞ eine um O als Centrum mit dem Radius r beschriebene Kugel, so wird die linke Seite

$$= \frac{1}{4\pi}\int\left(v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right)r^2\,\partial\sigma = -\frac{1}{4\pi}\int\left[v + \xi.r\frac{\partial v}{\partial x} + \eta.r\frac{\partial v}{\partial y} + \zeta.r\frac{\partial v}{\partial z}\right]\partial\sigma.$$

Dieselbe ist also numerisch kleiner als die Summe aus den grössten numerischen Werthen, welche v, $r\frac{\partial v}{\partial x}$, $r\frac{\partial v}{\partial y}$, $r\frac{\partial v}{\partial z}$ auf S'_∞ annehmen. Da jeder von

diesen vier Summanden wegen $D.$ durch Vergrösserung von r unter jede Grenze gebracht werden kann, so convergirt mit wachsendem r die linke Seite obiger Gleichung stetig gegen Null; dies ist also auch, nach dem vorhin Bemerkten, der Werth, in welchen (S_∞) stetig übergeht, wenn alle Punkte der Fläche S_∞ ins Unendliche rücken. Wir haben demnach den Satz:

a. Sobald v im ganzen, die Fläche S umgebenden Raume V den Bedingungen $A.$, $B.$, $D.$ genügt, und das Integral $\int \frac{\varrho \partial V}{r}$ unabhängig von der Anordnung der Integration convergirt, ist in jedem Punkte O von V

$$(4.) \qquad v_0 = \int \frac{\varrho \partial V}{r} + (S).$$

V.

Die Untersuchung der Gleichung

$$(O'.) \qquad \frac{\partial v_0}{\partial X} = \int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} \partial V + (S)' - (S_\infty)'$$

erledigt sich auf demselben Wege. Setzt man in (3.) $w = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X}$, und nimmt für S_∞ wieder eine Kugel vom Radius r und dem Centrum O, so wird auf ihr $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} = \frac{\xi}{r^3}$, also folgt aus (3.)

$$\begin{aligned}(S_\infty)' &= \frac{1}{4\pi} \int \Big[v \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\xi}{r^3}\Big) - \frac{\xi}{r^3} \frac{\partial v}{\partial r} \Big] r^2 \partial \sigma - \int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} \partial W \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int \Big[\frac{2v}{r} + \xi \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v}{\partial z} \Big] \xi \partial \sigma - \int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} \partial W.\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite convergirt das erste Glied wegen $D.$ mit wachsendem r nothwendig gegen Null; wenn daher auch das zweite Glied bei unausgesetzter Erweiterung der Flächen S_∞ und S'_∞ verschwindet, so gilt dasselbe von $(S_\infty)'$. Daraus folgt der Satz:

b. Sobald v im Raume V ausserhalb S den Bedingungen $A.$, $B.$, $D.$ genügt, und das Integral $\int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} \partial V$ unabhängig von der Anordnung der Integration convergirt, ist in jedem Punkte O von V

$$\frac{\partial v_0}{\partial X} = \int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} \partial V + (S)'.$$

Durch Verbindung dieses Satzes mit dem vorigen folgt weiter:

c. Wenn v im Raume ausserhalb S den Bedingungen $A.$, $B.$, $D.$ genügt, und die beiden Integrale $\int\frac{\varrho\partial V}{r}$, $\int\varrho\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial X}\partial V$ unabhängig von der Anordnung der Integration convergiren, erhält man $\frac{\partial v_0}{\partial X}$ aus dem Ausdrucke von v_0 durch Differentiiren unter dem Integralzeichen.

Durch diese Sätze ist die Frage nach den ersten Derivirten von v vollständig auf die Ermittelung der Ausdrücke zurückgeführt, durch welche v selbst dargestellt wird, weshalb wir uns im Folgenden nur noch mit den letzteren zu beschäftigen haben.

VI.

Durch die Gleichung (4.) wird jede den Bedingungen $A.$, $B.$, $D.$ genügende Function v im ganzen, ausserhalb S liegenden Raume V durch convergente Rechnungsoperationen dargestellt.

Da aber S aus den Oberflächen S_p, S_l, etc. der einzelnen Höhlungen zusammengesetzt ist, in denen die Ausnahmestellen p, l, etc. von v eingeschlossen sind, so ist in dieser Gleichung unter

$$(S) = \frac{1}{4\pi}\int\left(v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p}\right)\partial S$$

eine Summe von Integralen (S_p), (S_l) etc. derselben Form zu verstehen, von denen jedes sich über eine der Oberflächen S_p, S_l etc. erstreckt.

Lässt man nun die Oberfläche einer dieser Höhlungen, etwa S_p sich immer mehr um die entsprechende Ausnahmestelle p zusammenziehen, so kann dies in (4.) den Werth der rechten Seite nicht ändern, solange v den Bedingungen des art. II. genügt. Da aber gleichzeitig wegen der für ϱ gestellten Bedingungen $\int\frac{\varrho\partial V}{r}$ bei dieser Erweiterung seines Integrationsraumes gegen eine feste Grenze convergirt, und ausser diesem und (S_p) alle übrigen Glieder der rechten Seite von (4.) ungeändert bleiben, so convergirt auch (S_p) gegen eine feste Grenze.

Folglich müssen umgekehrt die an den Ausnahmestellen von v eintretenden Bedingungen für v und $\frac{\partial v}{\partial p}$ so gewählt werden, dass bei fortgesetzter Verengerung der Integrationsflächen S_p, S_l, etc. jedes der Integrale (S_p),

$(S_{,,})$, etc. für sich gegen eine feste Grenze convergirt. Ist dies erreicht, so wird $v_{,,}$ durch die Gleichung (4.) an der Grenze im ganzen Raume ***ausserhalb seiner Ausnahmestellen*** dargestellt.

Damit ist jedoch der Fall nicht ausgeschlossen, dass der hiermit gewonnene ***Ausdruck*** der Function ***v in einer Ausnahmestelle*** Werthe angiebt, welche von dem ***der Function*** an dieser Stelle vorgeschriebenen Verlaufe unabhängig sind.

Man weiss, dass solche lokale Abweichungen einer Function von einem sie sonst darstellenden Ausdrucke in manchen Fällen nur von der Form des letztern abhängen, und durch eine Aenderung derselben gehoben werden können.

Wir schliessen nun alle Verstösse gegen die Bedingungen A. und B. aus, deren die Functionen v wegen C. fähig sind, ohne dass die oben gefundenen, im ganzen übrigen Raume gültigen Ausdrücke dieser Functionen an ihnen Theil nehmen können.

Die Functionen, welche nun noch übrig bleiben, und die aus ihnen durch conforme Umbildung folgenden Functionen $\mathfrak{v}$ (art. II.) begreifen wir unter dem Namen der ***einwerthigen Potentiale.***

Die folgenden Sätze beziehen sich ausschliesslich auf die den Bedingungen C. und D. genügenden Potentiale, welche wir zur Unterscheidung von den übrigen wie bisher durch v bezeichnen.

VII.

Hülfssatz. Sei R eine positive Variable und $f(R)$ eine Function von R, die nebst ihrer ersten Derivirten $f'(R)$ ***oberhalb*** $R=0$ bis zu einem gegebenen Werthe $R=a$ hin weder unbestimmt, noch unendlich, noch unstetig wird, während ihr Verhalten ***im Punkte*** $R=0$ ***selbst*** noch dahin gestellt bleiben mag.

Dann besteht zwischen dem Verlaufe der beiden Functionen $f(R)$ und $f'(R)$ in unendlicher Nähe von $R=0$ ein Zusammenhang, in Betreff dessen wir folgende Sätze hervorheben.

d. Wenn für ein positives k und jede unbegrenzte Abnahme von R $R^{k+1}f'(R)$ ohne Unstetigkeit gegen eine feste Grenze A convergirt, so convergirt $R^k f(R)$ stetig gegen die Grenze $-\frac{A}{k}$; wächst unter derselben Voraussetzung $R^{k+1}f'(R)$ über alle Grenzen, so ist dasselbe mit $R^k f(R)$ der Fall.

e. Wenn bei jeder unbegrenzten Abnahme von R $Rf'(R)$ ohne Unstetigkeit gegen eine feste Grenze A convergirt, so hat auch $\frac{f(R)}{\log R}$ den Werth A zur Grenze; wächst unter derselben Voraussetzung $Rf'(R)$ über alle Grenzen, so findet dasselbe mit $\frac{f(R)}{\log R}$ statt.

Beweis. Ist $0 < R_0 < R_2 < a$, so folgt

$$f(R_2)-f(R_0) = \int_{R_0}^{R_2} R^{k+1}f'(R)\cdot\frac{\partial R}{R^{k+1}},$$

da $f(R)$ zwischen R_0 und R_2 weder unbestimmt, noch unendlich, noch unstetig ist. Da ferner zwischen denselben Grenzen $R^{k+1}f'(R)$ stetig, und $\frac{1}{R^{k+1}}$ von Zeichenwechseln frei ist, so kann man, wie klein auch R_0 sein mag, zum Mindesten auf eine Art R_1 zwischen R_0 und R_2 so wählen, dass die rechte Seite

$$= R_1^{k+1}f'(R_1)\int_{R_0}^{R_2}\frac{\partial R}{R^{k+1}}$$

wird.

(*d.*) Solange nun $k > 0$ ist, folgt hieraus

$$kR_0^k f(R_2) - kR_0^k f(R_0) = R_1^{k+1}f'(R_1)\left[1-\left(\frac{R_0}{R_2}\right)^k\right].$$

In dieser Gleichung lassen wir R_0 und R_2 abnehmen, jedoch so, dass wenn a und b zwei ohne Ende abnehmende Zahlen bedeuten, R_0^k fortwährend unterhalb der kleinsten von den ebenfalls abnehmenden Zahlen $\frac{a}{f(R_2)}$ und bR_2^k bleibt. Dann werden $R_0^k f(R_2)$ und $\left(\frac{R_0}{R_2}\right)^k$ Bruchtheile von a und b, ersteres etwa $=\theta a$, letzteres $=\theta_1 b$, und R_1 in stetiger oder sprungweiser Abnahme der Null immer näher gebracht. Es folgt

$$k\theta a - kR_0^k f(R_0) = R_1^{k+1}f'(R_1)[1-\theta_1 b],$$

wo man sich die Grössen a, b, R_2, R_0 und R_1 in der angegebenen Abnahme zu denken hat.

Wenn daher $-kR_0^k f(R_0)$ bei abnehmendem R_0 über alle Grenzen wächst, oder gegen eine feste Grenze convergirt, so kann man die Abnahme von R_1 nach einem solchen Gesetze erfolgen lassen, dass $R_1^{k+1}f'(R_1)$ in gleicher Weise verläuft.

Wenn aber umgekehrt $R_1^{k+1}f'(R_1)$ unter allen Umständen zuletzt unendlich gross wird, und nicht etwa bloss dann, wenn R_1 längs einer besonders ausgewählten Werthenreihe abnimmt, so muss auch $-kR_0^k f(R_0)$ bei verschwin-

dendem R_0 unendlich gross werden; convergirt $R_1^{k+1} f'(R_1)$ bei jeder unbegrenzten Abnahme von R_1 gegen eine feste Grenze A, so hat auch $-kR_0^k f(R_0)$ diesen Werth A zur Grenze, w. z. b. w.

(*e.*) Für $k=0$ folgt ebenso

$$\frac{f(R_0)}{\log R_0} - \frac{f(R_2)}{\log R_0} = R_1 f'(R_1)\left[1 - \frac{\log R_2}{\log R_0}\right].$$

Lässt man auch hier R_0 und R_2 verschwinden, jedoch so, dass $\log R_0$ numerisch oberhalb der grössten von den wachsenden Zahlen $\frac{\log R_2}{b}$, $\frac{f(R_2)}{a}$ bleibt, so bedarf es zum Beweise von *e.* nur einer Wiederholung der eben angewandten Schlüsse.

Diese beiden Sätze lassen sich verallgemeinern, jedoch ohne Hinzufügung neuer Bedingungen, durch welche ihre Brauchbarkeit beeinträchtigt wird, nicht umkehren.

f. Lehrsatz. Ein einwerthiges Potential v und seine ersten Derivirten können in einem von jeder andern Ausnahmestelle getrennten Punkte m weder unendlich, noch unbestimmt, noch unstetig sein, sobald die Producte

$$R^2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^2 \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^2 \frac{\partial v}{\partial z}$$

bei jeder unbegrenzten Abnahme der Entfernung R vom Punkte x, y, z bis zum festen Punkte m stetig gegen Null convergiren.

Beweis. Fände das Gegentheil statt, so würde m zu den Ausnahmestellen von v gehören. Wir scheiden demnach aus dem Raume V einen abnehmenden Raum V_m aus, welcher m enthält, und nennen S_1 die um die übrigen Ausnahmestellen von v gelegte Fläche.

Nun sei w ein zweites einwerthiges Potential, welches sich von v nur dadurch unterscheidet, dass es im Innern von V_m den Bedingungen *A.* und *B.* genügt, während es ausserhalb V_m genau denselben Bedingungen, wie v unterworfen ist, derart dass, wenn v auch noch in V_m den Bedingungen *A.* und *B.* genügte, in V überall $v=w$ wäre.

Dann reicht es zum Beweise des Satzes hin, zu zeigen, dass der Unterschied der beiden Ausdrücke, durch welche v und w im Raume V dargestellt werden, ausserhalb V_m überall $=0$ ist, und dass dies gilt, wie klein auch V_m sein mag.

Ist dies nämlich bewiesen, so führt die Annahme, es sei im abnehmenden Raume V_m selbst v von w verschieden, zur Folgerung, dass die Function

v im Punkte m einen Verstoss gegen die Bedingungen A. und B. begeht, dessen ihr, für den ganzen übrigen Raum V gültiger Ausdruck w unfähig ist. Es würde also v keine der Definition des einwerthigen Potentials genügende Function sein, und nur dadurch in eine solche verwandelt werden können, dass man in V_m ihren Verlauf den Bedingungen A. und B. gemäss abänderte.

Aus (4.) ergiebt sich zunächst unter der Voraussetzung, dass O ausserhalb S_1 liegt,

$$w_0 = \int \frac{\varrho \partial V}{r} + (S_1),$$

wo (S_1) das früher durch (S) bezeichnete Integral, ausgedehnt über die Fläche S_1, bedeutet.

Der Ausdruck für v_0 ergiebt sich für den Fall, dass O ausserhalb S_1 und V_m liegt, durch folgende Betrachtung. Man lege um m als Centrum eine Kugel K vom Radius R, welche den abnehmenden Raum V_m völlig einschliesst, und wähle R so klein, dass O und S_1 ausserhalb des Volumens V_K dieser Kugel liegen. Dann kann man für die Function v die Fläche S zusammensetzen aus S_1 und der Kugelfläche K. Dies festgestellt, ist der von S_1 herrührende Theil der Voraussetzung gemäss in den Ausdrücken für v_0 und w_0 der nämliche. Dasselbe gilt von dem über V nach Ausschluss von V_K erstreckten Integrale von $\frac{\varrho \partial V}{r}$. Scheidet man daher zur Bildung von v_0 aus V das Volumen V_K aus, und fügt zu S_1 die Oberfläche dieses Volumens, so wird

$$v_0 = w_0 - \int \frac{\varrho \partial V_K}{r} + \frac{1}{4\pi} \int \left(v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial R} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial R} \right) R^2 \partial \sigma.$$

Da der Voraussetzung gemäss $R^2 \frac{\partial v}{\partial R} = \xi . R^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \eta . R^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta . R^2 \frac{\partial v}{\partial z}$, also nach d. auch Rv und $R^2 v$ mit R zugleich verschwindet, und r während der Integration von Null verschieden bleibt, so convergirt das über die Oberfläche von V_K erstreckte Integral mit R zugleich stetig gegen Null; dasselbe beweist man von dem Integrale $\int \frac{\varrho \partial V_K}{r}$ auf dem in art. III. eingeschlagenen Wege.

Solange also die Entfernung von O bis m von Null verschieden ist, wie klein dieselbe übrigens auch sein mag, ist $v_0 = w_0$, w. z. b. w.

Dieser Beweis kommt darauf hinaus, zu zeigen, dass die Bedingung, v oder seine ersten Derivirten sollen in m unendlich, unstetig oder unbestimmt werden, jedoch so, dass $R^2 \frac{\partial v}{\partial x}$, $R^2 \frac{\partial v}{\partial y}$ und $R^2 \frac{\partial v}{\partial z}$ mit R zugleich stetig

verschwinden, auf denselben Ausdruck für v_{0} führt, wie die Bedingung, dass $A.$ und $B.$ in m gar nicht verletzt werden. Solange also ein in m stattfindender Verstoss gegen diese Bedingungen sich innerhalb der im Lehrsatze verlangten Grenzen hält, ist er ein solcher, dessen jeder in (4.) enthaltener Ausdruck unfähig ist, und den wir daher bei der Definition des einwerthigen Potentials ausschliessen.

g. Lehrsatz. Ein einwerthiges Potential v und seine ersten Derivirten können auf einer Linie von endlicher Länge, die von jeder anderen Ausnahmestelle getrennt ist, weder unendlich, noch unbestimmt, noch unstetig sein, sobald die Producte

$$R\frac{\partial v}{\partial x},\quad R\frac{\partial v}{\partial y},\quad R\frac{\partial v}{\partial z}$$

bei jeder unbegrenzten Abnahme der kürzesten Entfernung R vom Punkte x, y, z bis zur festen Linie stetig gegen Null convergiren.

Beweis. Was auch an dieser Linie l stattfinden mag, so erhält man doch stets einen Ausdruck für die Werthe, welche v ausserhalb l und S erlangt, wenn man l mittelst einer Fläche S_{l} aus V ausschliesst und wie eine Ausnahmestelle behandelt. Nennt man das von S_{l} eingeschlossene Volumen V_{l}, so wird durch den Ausschluss von V_{l} die Gleichung (4.) nur so weit geändert, dass auf ihrer rechten Seite noch der Ausdruck

$$\frac{1}{4\pi}\int\left(v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p}\right)\partial S_{l}-\int\frac{\varrho\,\partial V_{l}}{r}$$

hinzutritt; derselbe ist, wie aus (3.) leicht folgt, von der Gestalt der Fläche S_{l} unabhängig.

Bei unbegrenzter Verengerung von S_{l} convergiren beide Theile dieses Ausdruckes stetig gegen Null.

Für den zweiten Theil ergiebt sich dies unmittelbar aus den über ϱ und die Länge von l gemachten Voraussetzungen. Um das Nämliche für den ersten Theil zu beweisen, nennen wir R die kürzeste Entfernung von ∂S_{l} bis zur Linie l, (rp) den Winkel zwischen r und ∂p, woraus $\frac{\partial r}{\partial p}=-\cos(rp)$ folgt, und setzen

$$\frac{R}{4\pi}\left(v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p}\right)=\frac{1}{4\pi}\left(Rv\cdot\frac{\cos(rp)}{r^{2}}-\frac{1}{r}\cdot R\frac{\partial v}{\partial p}\right)=\omega,$$

wodurch derselbe die Form $\int w\frac{\partial S_{l}}{R}$ annimmt. Ist daher unter den absoluten

Werthen, welche ω während der Integration erlangt, Ω der grösste, so ist dieser Theil numerisch kleiner als $\Omega\int\frac{\partial S_l}{R}$.

Lässt man aber alle Elemente ∂S_l immer näher an l hinanrücken, so convergiren $R\frac{\partial v}{\partial x}$, $R\frac{\partial v}{\partial y}$, $R\frac{\partial v}{\partial z}$, also auch $R\frac{\partial v}{\partial p}$ und $R\frac{\partial v}{\partial R}$ stetig gegen Null. Dies ist nach *e.* nicht anders möglich, als dass zugleich $\frac{v}{\log R}$ und umsomehr $Rv = R\log R\cdot\frac{v}{\log R}$ verschwindet. Solange also O nicht unendlich nahe an einem Punkte von l liegt, convergiren mit R zugleich alle Werthe von ω, also auch Ω stetig gegen Null.

Ertheilt man der Fläche S_l die Gestalt einer Röhre*), deren zu l senkrechter Querschnitt ein Kreis vom constanten Radius R ist, während sein Centrum auf l liegt, und schliesst die Röhre durch zwei Halbkugeln, deren Mittelpunkte den Anfang und das Ende von l bilden, so wird $\int\partial S_l = 2\pi Rl + 4\pi R^2$, wenn l die Länge der Linie l bedeutet; also wird bei verschwindenden Werthen von R an der Grenze $\int\frac{\partial S_l}{R} = 2\pi l$.

Folglich wird $\int\omega\frac{\partial S_l}{R}$ numerisch kleiner als das Product zweier Grössen Ω und $2\pi l$, von denen die erstere verschwindet, während die andere nicht über alle Grenzen wächst, woraus das Behauptete folgt.

Unter den Voraussetzungen des Lehrsatzes wird also v in jeder messbaren Entfernung von l durch denselben Ausdruck dargestellt, den man erhält, wenn v auch an l entlang den Bedingungen *A.* und *B.* genügt. Folglich ist dieser Ausdruck, und mit ihm v als einwerthiges Potential an l entlang jeder mit den übrigen Voraussetzungen des Lehrsatzes vereinbaren Verletzung von *A.* und *B.* unfähig.

h. In art. II. *C.* ist der Fall ausgeschlossen worden, wo v oder eine seiner ersten Derivirten in allen Punkten einer Fläche unendlich oder unbestimmt wird.

Der Grund hiervon ist folgender. Legt man um die Fläche f eine von S abgelöste Fläche S_f, so würde man unter der Voraussetzung, an f entlang werde eine erste Derivirte von v oder v selbst unendlich oder unbestimmt, im Ausdrucke von v_0 ein Glied (S_f) erhalten, in welchem die unter dem Integralzeichen stehende Function bei fortgesetzter Verengerung von S_f schliesslich aufhört, die Integration zu gestatten.

*) Note 2.

Daraus darf man indessen nicht schliessen, dass es keine Ausdrücke gebe, welche ausserhalb der Fläche f ein einwerthiges Potential v darstellen, aber an ihr entlang unendlich oder unbestimmt werden. In den bis jetzt untersuchten Fällen muss diese Erscheinung jedoch als eine wirkliche Divergenz des Ausdrucks von v bezeichnet werden, da sie bloss an der Form des Ausdruckes haftet, und durch Aenderung dieser Form beseitigt werden kann. Beispiele dieser Art erhält man, wenn man den aus art. V. *b.* folgenden Ausdrücken für die Derivirten der in art. XII. *r.* bezeichneten Potentiale auch noch an den Ausnahmestellen eine Bedeutung einräumt.

Aus den vorstehenden Lehrsätzen ergeben sich als Corollare die folgenden, in denen die jedesmalige Bedeutung von R aus dem Vorangehenden erhellt.

i. In einem Punkte oder einer Linie von endlicher Länge, die keiner anderen Ausnahmestelle angehören, kann ein einwerthiges Potential oder eine seiner ersten Derivirten niemals unstetig oder unbestimmt werden, ohne dass eine der letzteren unendlich wird.

k. Wird das einwerthige Potential v oder eine seiner ersten Derivirten in dem, von jeder anderen Ausnahmestelle getrennten Punkte m unendlich, so kann mindestens eine der Grössen $R^2\frac{\partial v}{\partial x}$, $R^2\frac{\partial v}{\partial y}$, $R^2\frac{\partial v}{\partial z}$ nicht bei jeder Richtung von R mit R zugleich verschwinden.

l. Wird das einwerthige Potential v oder eine seiner ersten Derivirten in jedem Punkte einer Linie unendlich, die weder von unendlicher Länge ist, noch einer anderen Ausnahmestelle angehört, so kann mindestens eine der Grössen $R\frac{\partial v}{\partial x}$, $R\frac{\partial v}{\partial y}$, $R\frac{\partial v}{\partial z}$ nicht bei jeder unbegrenzten Abnahme von R gegen Null convergiren.

VIII.

Wenn wir daher die einwerthigen Potentiale v nach ihren Verstössen gegen die Bedingungen *A.* und *B.* ordnen, so bleiben folgende Fälle übrig:

1. Diese Bedingungen werden im ganzen Raume erfüllt (art. IX.).

2. Ausnahmepunkte. Das Product aus einer der ersten Derivirten von v und dem Quadrate der Entfernung R von einem festen Punkte p convergirt nicht bei jeder unbegrenzten Abnahme von R gegen Null (art. X.).

3. Ausnahmelinien. Das Product aus einer der ersten Derivirten von v und dem kürzesten Abstande R von einer Linie l convergirt nicht bei jeder unbegrenzten Abnahme von R gegen Null (art. XI.).

4. Ausnahmeflächen. Beim Durchgange durch eine Fläche von endlicher Ausdehnung erleiden v oder seine ersten Derivirten plötzliche Aenderungen (art. XII.).

Wenn die Fläche S sich mit Ausscheidung aller Theile des Raumes, in denen die Bedingungen $A.$ und $B.$ erfüllt sind, immer enger an die Ausnahmestellen anschliesst, so zerfällt sie zuletzt in soviele von einander getrennte Theile, als Ausnahmestellen vorhanden sind. Jedem dieser Theile entspricht im Ausdrucke von v ein Glied, welches einer der drei zuletzt genannten Gattungen von Potentialen angehört. Folglich kann jedes Potential v durch eine Summe von Potentialen der vorhin bezeichneten vier Gattungen dargestellt werden.

IX. Erster Fall.

m. Wenn den Bedingungen $A.$ und $B.$ im ganzen Raume, ohne Ausnahme irgend einer Stelle, Genüge geschieht, so ist in jedem Punkte O des Raumes

$$v_0 = \int \frac{\varrho \partial V}{r},$$

sobald das Integral zur Rechten unabhängig von der Anordnung der Integration convergirt.

In der That fällt jetzt aus der Gleichung (4.) das Integral (S) weg, da es nicht mehr nöthig ist, aus V einzelne Theile wegen einer dort stattfindenden Verletzung von $A.$ oder $B.$ auszuscheiden.

Es folgt hieraus, dass man jedes einwerthige Potential v durch Subtraction eines Integrals $\int \frac{\varrho \partial V}{r}$ in ein anderes, w, verwandeln kann, welches ausserhalb der Ausnahmestellen der Bedingung $\Delta w = 0$ genügt, während die an diesen Stellen selbst stattfindenden Verstösse gegen $A.$ und $B.$ ganz ungeändert bleiben.

X. Zweiter Fall. Ausnahmepunkte.

Findet ein Verstoss gegen die Bedingungen $A.$ und $B.$ nur in einem einzigen Punkte p statt, und ist ϱ überall $= 0$, so wird ausserhalb der den Punkt p einschliessenden Fläche S

$$v_0 = (S),$$

und dieser Ausdruck ist, wie man aus (3.) für $\varrho = 0$ und $w = \frac{1}{r}$ schliesst von der Gestalt der Fläche S unabhängig, solange sie p ein-, O ausschliesst.

Nimmt man daher für S eine Kugel vom Halbmesser R und dem Centrum p, so wird

$$v_0 = \frac{1}{4\pi}\int\left(v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial R} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial R}\right)R^2\partial\sigma,$$

solange R kleiner als die Strecke Op ist, und die rechte Seite von R unabhängig.

Soll in p überhaupt eine Verletzung von *A.* und *B.* möglich sein, so darf sich dieselbe nicht innerhalb der in *f.* angegebenen Grenzen halten. Stellt man also die Bedingung, dass

$$R^\nu\frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^\nu\frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^\nu\frac{\partial v}{\partial z}$$

bei abnehmendem R nicht über alle Grenzen wachsen, dass dies aber bei jeder Verkleinerung von ν eintritt, so darf ν jedenfalls nicht kleiner als 2 sein. Nennt man die zunächst über ν liegende ganze Zahl $n+3$, so kann n nur eine der Zahlen 0, 1, 2, ... bedeuten, und es verschwinden

$$R^{n+3}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^{n+3}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^{n+3}\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \text{und wegen } d. \text{ auch } R^{n+2}v$$

mit R zugleich, während

$$R^{n+1}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^{n+1}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^{n+1}\frac{\partial v}{\partial z}$$

über alle Grenzen wachsen. Es findet sich im Folgenden, dass $\nu = n+2$ sein muss.

1. Nimmt man zunächst für n seinen kleinsten Werth Null, und lässt R abnehmen, so reducirt sich die rechte Seite der aus der obigen folgenden Gleichung

$$v_0 = -\frac{1}{4\pi r_p}\int R^2\frac{\partial v}{\partial R}\partial\sigma + \frac{1}{4\pi}\int\left(R^2 v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial R} + \frac{(r-r_p)R^2}{rr_p}\frac{\partial v}{\partial R}\right)\partial\sigma,$$

in welcher r_p die Entfernung von O bis p bedeutet, an der Grenze auf ihr erstes Glied, da $R^3\frac{\partial v}{\partial R}$ der Voraussetzung gemäss, also nach *d.* auch $R^2 v$ und, weil die Differenz der Dreiecksseiten r, r_p kleiner als die dritte Seite R ist, $(r-r_p)R^2\frac{\partial v}{\partial R}$ verschwindet. Der Factor $\int\frac{\partial v}{\partial R}\cdot R^2\partial\sigma = \int\frac{\partial v}{\partial p}\partial S$ muss nach dem Obigen einen von R oder der Gestalt von S unabhängigen Werth $-4\pi M$ haben.

n. Sobald im ganzen Raume $\varrho = 0$ ist, und ausserhalb des Punktes p nirgendwo ein Verstoss gegen die Bedingungen *A.* und *B.* stattfindet, ferner bei unbegrenzter Annäherung an p

$$R^3\frac{\partial v}{\partial x},\quad R^3\frac{\partial v}{\partial y},\quad R^3\frac{\partial v}{\partial z}$$

verschwinden, und

$$\int\frac{\partial v}{\partial p}\partial S = -4\pi M$$

ist, folgt

$$v_0 = \frac{M}{r_p}.$$

Bei der Anwendung dieses Satzes auf die Umformung von $\frac{1}{r}$ kann man ausser den Bedingungen des Satzes noch beliebige andere Eigenschaften dieser Function benutzen, da diese mit jenen nicht im Widerspruche stehen, sondern aus ihnen folgen.

2. Für den allgemeinen Fall, wo n eine beliebige positive ganze Zahl ist, mag Folgendes genügen.

Entwickelt man $\frac{1}{r}$ mittelst des binomischen Satzes oder auf andere Weise nach steigenden Potenzen der Unterschiede $x-l$, $y-m$, $z-n$ zwischen den Coordinaten x, y, z des Flächenelements $R^2\partial\sigma$ und den Coordinaten l, m, n von p, so erhält man eine Reihe

$$\frac{1}{r} = \frac{T_0}{r_p}+\frac{T_1}{r_p^2}+\frac{T_2}{r_p^3}+\cdots,$$

in welcher T_μ ein homogenes Polynom μ^{ten} Grades jener Coordinatendifferenzen ist. Da die Nenner von x, y, z unabhängig sind, so ist für jedes μ $\Delta T_\mu = 0$, folglich, wie aus (3.) für $\varrho = 0$ und $w = T_\mu$ folgt, das Integral

$$M_\mu = \frac{1}{4\pi}\int\left[v\frac{\partial T_\mu}{\partial p}-T_\mu\frac{\partial v}{\partial p}\right]\partial S$$

von der Gestalt der Fläche S unabhängig, solange sie den Punkt p einschliesst. Sein Werth bleibt also ungeändert, wenn man für S die im vorigen Falle construirte Kugel nimmt, und R nach Belieben abnehmen lässt.

Vereinigt man nun in den Reihen für $\frac{1}{r}$ und $\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial R}$ alle Glieder, welche im Nenner eine höhere Potenz von r_p enthalten, als die $(n+1)^{\text{te}}$, in einen Rest, so fallen bei fortgesetzter Verkleinerung von R aus dem Ausdrucke für v_0 unter den obigen Voraussetzungen die von den Resten beider Reihen her-

rührenden Glieder weg, und es ergiebt sich

$$v_0 = \frac{M_0}{r_p} + \frac{M_1}{r_p^2} + \cdots + \frac{M_n}{r_p^{n+1}}.$$

Die Factoren M_μ sind beliebige Kugelfunctionen μ^{ter} Ordnung der Winkel, welche die Richtung pO bestimmen. Die in ihnen verfügbaren Constanten bestimmen sich bei den Anwendungen meistentheils aus den in der Regel bekannten Zeichenwechseln von $\frac{\partial v_0}{\partial r_p}$ und seinem Verhalten bei wachsenden und abnehmenden Werthen von r_p, wobei nach dem Obigen eine ungefähre Schätzung des Werthes von ν hinreicht.

3. Auch in dem Falle, wo die ersten Derivirten von v bei unbegrenzter Annäherung an p rascher anwachsen, als jede Potenz der reciproken Entfernung von diesem Punkte, stellt das Integral

$$[p] = \frac{1}{4\pi}\int\left(v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial R} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial R}\right)R^2\partial\sigma$$

noch immer v im ganzen Raume ausserhalb der um p gelegten Kugel dar, und zwar ist sein Werth vom Halbmesser R dieser Kugel völlig unabhängig.

Wenn überhaupt ein Integral der vorstehenden Form $[p]$ mit abnehmendem R gegen eine von Null verschiedene feste Grenze convergirt, so geht es dort als einwerthiges Potential in ein solches über, welches in p, aber nicht ausserhalb dieses Punktes eine Ausnahmestelle besitzt. Liegt in einem solchen Falle p auf einer Ausnahmelinie oder Fläche von v, so sagen wir, es finde in p ein Verstoss gegen die Bedingungen A. und B. statt, welcher auch in einem isolirten Ausnahmepunkte möglich ist.

Jedes einwerthige Potential v lässt sich daher durch Subtraction von Integralen der obigen Art in ein anderes, w, verwandeln, welches von allen in isolirten Ausnahmepunkten möglichen Verstössen gegen A. und B. befreit ist. Dann muss das, mittelst dieses Potentials w gebildete Integral $[p]$, wo immer der Punkt p gewählt werden mag, bei unbegrenzter Abnahme von R entweder von R abhängig bleiben, oder wenn es eine feste Grenze hat, mit R zugleich verschwinden. Denn wenn $[p]$ bei abnehmendem R zwar von R unabhängig würde, aber nicht gegen Null convergirte, so wäre p einem isolirten Ausnahmepunkte gleich zu achten.

XI. Dritter Fall. Ausnahmelinien.

Findet ein Verstoss gegen die Bedingungen *A.* und *B.* nur auf einer Linie l von endlicher Länge statt, und ist ρ überall $= 0$, so ist ausserhalb der l einschliessenden Fläche S

$$v_0 = (S),$$

und dieses Integral ist von der Gestalt der Fläche S unabhängig, solange sie l ein-, und O ausschliesst.

Der Einfachheit wegen setzen wir voraus, dass die Linie l nicht aus getrennten Stücken besteht, und überall stetig gebogen ist. Diese Voraussetzung bildet keine wesentliche Einschränkung der Untersuchung. Besteht nämlich l aus mehreren von einander getrennten, aber stetig gebogenen Theilen, so setzt sich (S) aus ebensoviel Integralen von der Art zusammen, auf welche wir uns hier beschränken; hängt l zusammen, jedoch so, dass stetig gebogene Theile bei ihrem Zusammentreffen Ecken bilden, so kann man dies so ansehen, als ob zwei stetig gebogene Linien einen Endpunkt mit einander gemein haben.

Stellt man nun die Bedingung, dass die Grössen

$$R^\nu \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^\nu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^\nu \frac{\partial v}{\partial z}$$

bei unbegrenzter Abnahme der kürzesten Entfernung R vom Punkte x, y, z bis zur Linie l niemals über alle Grenzen wachsen, dass aber jede Verkleinerung von ν dies zur Folge habe, so darf ν nicht < 1 sein, weil sonst nach art. VII. *g.* an l entlang jeder Verstoss gegen *A.* und *B.* unmöglich sein würde. Ist $n+2$ die zunächst über ν liegende ganze Zahl, also n eine der Zahlen 0, 1, 2, ..., so verschwinden hiernach die Grössen

$$R^{n+2} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^{n+2} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^{n+2} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \text{und wegen } d.\ R^{n+1} v$$

mit R zugleich an l entlang, während von den Grössen

$$R^n \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^n \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^n \frac{\partial v}{\partial z}$$

mindestens eine über alle Grenzen wächst.

Wir schliessen den Fall aus, wo in einzelnen Punkten von l solche Verstösse gegen *A.* und *B.* stattfinden, wie sie nach dem vorigen art. auch in isolirten Punkten möglich sind.

Dann ist v bis auf eine begrenzte Anzahl von Grössen bestimmt, über die zu seiner vollständigen Definition noch in jedem einzelnen Elemente von l verfügt werden muss. (Vergl. unten $(\beta.)$).

Für die folgende Untersuchung ist es zweckmässig, der Fläche S die folgende Form zu geben. Wir bezeichnen die Endpunkte von l durch a und e, zwei benachbarte Punkte von l durch a_l und e_l, und setzen nun S zusammen aus einer um $a_l e_l$ als Axe gelegten Röhrenfläche S_l *) vom Halbmesser R, und zwei über a und e hinausreichenden Verschlussstücken S_a, S_e, von denen jedes sich mittelst eines der Normalebene von l angehörigen Streifens an S_l senkrecht ansetzt. Die später zu benutzende Folge dieser Einrichtung besteht darin, dass verschwindende Aenderungen von R die Endpunkte der Axe $a_l e_l$ von S_l ungeändert lassen.

Bezeichnet man die Theile von (S), welche von der Integration über die Stücke S_a, S_l, S_e von S herrühren, durch (a), (l) und (e), so wird

$$v_0 = (a)+(l)+(e).$$

Wir beginnen mit der Untersuchung des Integrals (l) für ein ohne Ende abnehmendes R.

Ist q ein zwischen a und e liegender Punkt von l, s die Länge des Bogens aq, so dass s zu- oder abnimmt, jenachdem q an l entlang nach e oder a rückt, und ist ∂s das von q ausgehende Bogenelement von l, P der Krümmungsradius in q, θ' der Winkel zwischen P und einem von q ausgehenden Halbmesser der Röhrenfläche S_l, so wird das Element ∂S_l der letzteren $= R\left(1-\frac{R\cos\theta'}{P}\right)\partial\theta'\partial s$, und da R zu ihm senkrecht steht,

$$(l) = \frac{1}{4\pi}\int'\left(Rv\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial R}-\frac{1}{r}R\frac{\partial v}{\partial R}\right)\left(1-\frac{R\cos\theta'}{P}\right)\partial\theta'\partial s,$$

wo der Accent am Integralzeichen bedeutet, dass die Integration nach s sich von a_l bis e_l erstreckt.

Seien x, y, z die Coordinaten von q, die wir als Functionen von s betrachten, und x', y', z' ihre ersten, x'', y'', z'' ihre zweiten Derivirten nach s. Durch q legen wir drei rechtwinklige Axen qT, qP, qN, von denen die erste in die Verlängerung von ∂s fällt, die zweite nach dem Krümmungscentrum und die dritte so gerichtet ist, dass sie zusammen durch blosse Drehung beziehungsweise in die Richtung der wachsenden x, y, z gebracht werden können. Setzt man nun

$$y'z''-z'y''=A,\quad z'x''-x'z''=B,\quad x'y''-y'x''=C,$$

so werden die Cosinus zwischen diesen und den positiven Axen der x, y, z folgende:

*) Note 2.

Richtungscosinus von qT : x' y' z'
- - qP : Px'' Py'' Pz''
- - qN : PA PB PC.

Bezeichnet man ferner durch r_q die Entfernung von q bis O, und durch a, b, c ihre Richtungswinkel, so wird

$$\cos a = \frac{\partial r_q}{\partial X}, \qquad \cos b = \frac{\partial r_q}{\partial Y}, \qquad \cos c = \frac{\partial r_q}{\partial Z},$$

wenn X, Y, Z wie früher die Coordinaten von O sind.

Dies vorausgeschickt, lässt sich die Entfernung r von O bis zum Elemente ∂S_l in eine für den gegenwärtigen Zweck passende Form bringen. Bezeichnet man nämlich durch o den Endpunkt von r auf ∂S_l, so sind r, R und r_q die Seiten des Dreiecks qOo, also wenn ω den r gegenüberliegenden Winkel oqO bedeutet, $r^2 = r_q^2 - 2r_q R\cos\omega + R^2$. Zur Bestimmung von ω seien ferner λ und λ' die Neigungswinkel von r_q und R gegen qT, θ und nach dem bereits oben Festgestellten θ' die Neigungswinkel der durch qT und die Geraden r_q, R gelegten Ebenen gegen die Krümmungsebene TqP; dann wird

$$\cos\omega = \cos\lambda\cos\lambda' + \sin\lambda\sin\lambda'\cos(\theta'-\theta),$$

oder $\cos\omega = \sin\lambda\cos(\theta'-\theta)$, da R zu qT senkrecht steht, also $\lambda' = 90^0$ ist. Daraus folgt

$$r^2 = r_q^2 - 2r_q R\sin\lambda\cos(\theta'-\theta) + R^2,$$

während λ und θ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\cos\lambda &= x'\cos a + y'\cos b + z'\cos c,\\
\sin\lambda\cos\theta &= Px''\cos a + Py''\cos b + Pz''\cos c,\\
\sin\lambda\sin\theta &= PA\cos a + PB\cos b + PC\cos c
\end{aligned}$$

bestimmt sind.

In diesem Ausdrucke von r hängen r_q, λ und θ nur von der Lage der Punkte q und O ab, aber nicht vom Halbmesser R und auch nicht von θ'. Da $r_q > R$ ist, so folgt

$$\frac{1}{r} = \sum_0^\infty \frac{R^m}{r_q^{m+1}} P_m,$$

wo unter P_m die Kugelfunction $P_m(\sin\lambda\cos(\theta'-\theta))$ zu verstehen ist. Führt man dies in den Ausdruck von (l) ein, und setzt zur besseren Uebersicht

$$\frac{1}{4\pi}\int'\frac{\partial v}{\partial R}P_m\cdot\frac{\partial s\,\partial\theta'}{r_q^{m+1}} = U_m, \qquad \frac{1}{4\pi}\int' v P_m\cdot\frac{\partial s\,\partial\theta'}{r_q^{m+1}} = U_{m,1},$$

$$\frac{1}{4\pi}\int'\frac{\partial v}{\partial R}P_m\cdot\frac{\cos\theta'\,\partial s\,\partial\theta'}{P r_q^{m+1}} = V_m, \qquad \frac{1}{4\pi}\int' v P_m\cdot\frac{\cos\theta'\,\partial s\,\partial\theta'}{P r_q^{m+1}} = V_{m,1},$$

so wird

$$(l) = \sum_1^\infty mR^m U_{m,1} - \sum_0^\infty R^{m+1} U_m$$
$$- \sum_1^\infty mR^{m+1} V_{m,1} + \sum_0^\infty R^{m+2} V_m.$$

Da in den Ausdrücken U und V die Integration zwischen endlichen Grenzen stattfindet, die nach dem Obigen bei verschwindenden Aenderungen von R ungeändert bleiben, und zwischen denselben $\frac{\partial v}{\partial R}$ nicht unendlich oder unbestimmt wird, so ist

$$U_m = \frac{\partial U_{m,1}}{\partial R}, \qquad V_m = \frac{\partial V_{m,1}}{\partial R}.$$

Solange aber der Endpunkt O von r_2 ausserhalb der um l mit dem Halbmesser R beschriebenen Röhrenfläche liegt, werden $U_{m,1}$ und seine Derivirte U_m oberhalb $R = 0$ weder unbestimmt, noch unendlich, noch unstetig; dasselbe gilt von $V_{m,1}$ und V_m. Folglich kann man auf diese Functionen von R den Lehrsatz *d.* des art. VII. anwenden, und erhält, wenn der Fall, wo $R^{m+1}U_m$ oder $R^{m+2}V_m$ bei verschwindendem R unbestimmt, unendlich oder unstetig wird, ausgeschlossen wird, für $m > 0$

$$\lim mR^m U_{m,1} = -\lim R^{m+1} U_m,$$
$$\lim mR^{m+1} V_{m,1} = -\frac{m}{m+1} \lim R^{m+2} V_m.$$

Da ferner wegen der für $\frac{\partial v}{\partial R}$ gestellten Bedingungen in der ersten von den vorstehenden Gleichungen beide Seiten für $m > n$, in der zweiten für $m+1 > n$ verschwinden, so folgt

$$\lim (l) = \lim \Big[\sum_0^{n-1} \frac{2m+1}{m+1} R^{m+2} V_m - RU_0 - 2\sum_1^n R^{m+1} U_m \Big],$$

oder geordnet

$$(\alpha.) \quad \lim (l) = \lim \Big[-RU_0 + 2\sum_1^n \Big(\frac{2m-1}{2m} R^{m+1} V_{m-1} - R^{m+1} U_m \Big) \Big].$$

Dies vorausgeschickt, unterwerfen wir v an l entlang der Bedingung, dass bei unbegrenzter Abnahme von R in jedem Punkte q, für jeden Werth von β und für $m = 0, 1, \ldots n$

$$(\beta.) \quad \lim R^{m+1} \int \frac{\partial v}{\partial R} \cos(m\theta' - \beta)\, \partial\theta' = -4\pi (A_m \cos\beta + B_m \sin\beta)$$

sei, wo A_m und B_m von β unabhängige Functionen des Bogens s sind, welche die Integration an l entlang in dem zur Bildung von $\lim(l)$ erforderlichen Umfange gestatten.

Aus dem bekannten Ausdrucke für die Kugelfunctionen

$$P_m(\cos\lambda\cos\lambda'+\sin\lambda\sin\lambda'\cos(\theta'-\theta))$$

erhält man für $\lambda'=90^0$

$$P_0(\sin\lambda\cos(\theta'-\theta)) = 1,$$
$$P_1(\sin\lambda\cos(\theta'-\theta)) = \sin\lambda\cos(\theta'-\theta)$$

und allgemein

$$P_m(\sin\lambda\cos(\theta'-\theta)) = \mathcal{A}_m\cos m(\theta'-\theta)+\mathcal{A}_{m,1}\cos(m-2)(\theta'-\theta)+\cdots,$$

wo

$$\mathcal{A}_m = 2\frac{(2m)!}{(2^m m!)^2}\sin\lambda^m$$

ist. Die übrigen Factoren $\mathcal{A}$ sind ebenfalls von θ' und θ unabhängig, kommen aber bei der folgenden Untersuchung nicht in Betracht.

Wendet man nämlich den vorstehenden Ausdruck von P_m auf die Bestimmung der

$$\lim\frac{R^{m+1}}{4\pi}\int\frac{\partial v}{\partial R}P_m\partial\theta'$$

an, indem man von $m=0$ an aufwärts schliesst, so zeigt sich sofort, dass P_m durch sein erstes Glied ersetzt werden kann, und es ergiebt sich

für $m=0$
$$\lim\frac{R}{4\pi}\int\frac{\partial v}{\partial R}P_0\partial\theta' = -A_0,$$

für $m=1,2,\dots n$
$$\lim\frac{R^{m+1}}{4\pi}\int\frac{\partial v}{\partial R}P_m\partial\theta' = -\mathcal{A}_m(A_m\cos m\theta+B_m\sin m\theta).$$

Ebenso findet sich für $m=1,2,\dots n$

$$\lim\frac{R^{m+1}}{4\pi}\int\frac{\partial v}{\partial R}P_{m-1}.\cos\theta'\partial\theta' = -\tfrac{1}{2}\mathcal{A}_{m-1}(A_m\cos(m-1)\theta+B_m\sin(m-1)\theta).$$

Daraus ergeben sich die folgenden Ausdrücke, aus denen in (α.) der Grenzwerth von (l) zusammengesetzt ist:

$$(\gamma.)\left\{\begin{aligned}&\lim -RU_0 = {}'\!\!\int\frac{A_0\,\partial s}{r_\varrho},\\&\lim -R^{m+1}U_m = 2\frac{(2m)!}{(2^m m!)^2}\,{}'\!\!\int\frac{\sin\lambda^m(A_m\cos m\theta+B_m\sin m\theta)}{r_\varrho^{m+1}}\partial s,\\&\frac{2m-1}{2m}\lim R^{m+1}V_{m-1} = -\frac{(2m)!}{(2^m m!)^2}\,{}'\!\!\int\frac{\sin\lambda^{m-1}(A_m\cos(m-1)\theta+B_m\sin(m-1)\theta)}{Pr_\varrho^m}\partial s;\end{aligned}\right.$$

die Accente an den Integralzeichen bedeuten, dass die Integration an l entlang von a_1 bis e_1 zu erstrecken ist.

Lässt man daher die Flächen S_a und S_e sich bis zu den Punkten a_1 und e_1 erstrecken, und ersetzt sie nun der Einfachheit wegen durch Kugeln mit den Halbmessern $aa_1 = c_a$, $ee_1 = c_e$ und den Mittelpunkten a und e, so gehen im Ausdrucke von v_0 (a) und (e) in Integrale $[a]$ und $[e]$ (voriger art.) über, und es folgt

$$v_0 = [a] + \lim(l) + [e].$$

Dieses Resultat umfasst verschiedene Fälle.

1. Wenn die durch A_m und B_m bezeichneten Functionen von s so beschaffen sind, dass von den Integralen $(\gamma.)$, aus denen $\lim(l)$ besteht, einzelne divergent werden, wenn man sie bis zu den Endpunkten a und e von l erstreckt, so bilden die Integrale $[a]$ und $[e]$ wesentliche Bestandtheile des Ausdruckes von v_0, indem sie zur Ausgleichung der, bei abnehmenden Werthen der Halbmesser c_a und c_e eintretenden Divergenz von $\lim(l)$ dienen.

2. Wenn dagegen die Functionen A und B die Integration auch bis an die Enden von l hinan gestatten, so kann man c_a und c_e verschwinden lassen, und verlangen, dass auch $[a]$ und $[e]$ verschwinden. Denn da in diesem Falle jedes der Integrale $[a]$ und $[e]$ für sich gegen eine feste Grenze convergirt, so würden sie, falls diese Grenzen von Null verschieden wären, in den Ausdruck von v_0 zwei Glieder liefern, welche man nach dem Schlusse des vorigen art. auch dadurch einführen kann, dass man einen isolirten Ausnahmepunkt nach a und einen nach e rücken lässt, und welche ebenso durch Beseitigung dieser Ausnahmepunkte ohne eine Abänderung in den übrigen Bedingungen entfernt werden können, wie es oben als geschehen vorausgesetzt worden ist. Daraus folgt der Satz:

o. Es sei v ein einwerthiges Potential, welches nur auf einer ununterbrochen zusammenhängenden und stetig gebogenen Linie von der messbaren Länge l gegen die Bedingungen $A.$ und $B.$ verstösst, und auch auf dieser von allen in isolirten Ausnahmepunkten möglichen Verletzungen dieser Bedingungen befreit ist. Wenn alsdann im ganzen Raume $\varrho = 0$ ist, und an l entlang bei unbegrenzter Abnahme von R

$$1)\quad \lim R^{n+2}\frac{\partial v}{\partial x} = 0,\quad \lim R^{n+2}\frac{\partial v}{\partial y} = 0,\quad \lim R^{n+2}\frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

$$2)\quad \text{für } m = 0, 1, \ldots n \quad \lim R^{m+1}\int\frac{\partial v}{\partial R}\cos m\theta'\partial\theta' = -4\pi A_m,$$

$$3)\quad \text{für } m = 1, 2, \ldots n \quad \lim R^{m+1}\int\frac{\partial v}{\partial R}\sin m\theta'\partial\theta' = -4\pi B_m$$

ist, so ist für jeden Punkt O ausserhalb l $v_0 = \lim(l)$ oder

$$v_0 = \int \frac{A_0 \partial s}{r_q}$$

$$+2\sum_1^n \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} \int \Big[2\, \frac{\sin\lambda^m (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta)}{r_q^{m+1}}$$

$$- \frac{\sin\lambda^{m-1}(A_m \cos(m-1)\theta + B_m \sin(m-1)\theta)}{P r_q^m} \Big] \partial s,$$

vorausgesetzt, dass die Functionen A_m und B_m die Integration über die ganze Linie l hinweg gestatten.

Mittelst der hier anwendbaren Sätze *d.* und *e.* des art. VII. ergeben sich aus den Bedingungen 2) und 3) folgende Eigenschaften des vorstehenden Potentials:

$$\lim \frac{1}{\log R} \int v\, \partial\theta' = -4\pi A_0,$$

$$\left.\begin{aligned} \lim mR^m \int v \cos m\theta' \partial\theta' &= 4\pi A_m \\ \lim mR^m \int v \sin m\theta' \partial\theta' &= 4\pi B_m \end{aligned}\right\} \text{ für } m = 1, 2, \dots n.$$

Dieselben können ebenfalls dazu dienen, um zu einem gegebenen Ausdrucke von v die Grössen A und B zu bestimmen.

Einfache Beispiele zu beiden Fällen erhält man durch conforme Umbildung einwerthiger Functionen von $\mathfrak{x}+i\mathfrak{y}$, welche nur in einer endlichen Anzahl von Punkten der $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ Ebene unendlich werden, oder ihrer reellen Bestandtheile. Betrachtet man nämlich eine solche als Function von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, so verhält sie sich wie eine den Bedingungen des art. I. für ϱ' gleich Null genügende Function $\mathfrak{v}$, die nebst ihren ersten Derivirten $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{x}}$, $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{y}}$ auf geraden Linien, die zur $\mathfrak{z}$-Axe parallel sind, unendlich wird, und ausserhalb derselben endlich und stetig bleibt. Diese Linien werden durch die conforme Umbildung in Kreisbögen verwandelt, deren Enden im Mittelpunkte des Raumes x, y, z zusammenstossen. Die rationalen Functionen liefern Beispiele zum zweiten Falle, $\log \frac{\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}}{a}$ kann zur Erläuterung des andern dienen.

3. Wenn die ersten Derivirten von v an l entlang unendlich gross von unendlich hoher Ordnung werden, so stellt der Ausdruck $(S) = (l) + (a) + (e)$ noch immer v ausserhalb der Fläche S dar, und sein Werth ist auch jetzt noch vom Halbmesser R und der Form von S_a und S_e unabhängig. Allgemein geht jeder Ausdruck dieser Form, der von der Umgestaltung der Fläche S

unabhängig wird, wenn sie sich immer enger um l zusammenzieht, an der Grenze als einwerthiges Potential in ein solches über, welches ausser der Linie l keine andere Ausnahmestelle besitzt. Man kann daher durch Subtraction von Potentialen dieser Gattung jedes einwerthige Potential v in ein anderes, w, verwandeln, welches so beschaffen ist, dass der mittelst der Werthe von w gebildete Ausdruck (S) für jede beliebige Linie l bei fortgesetzter Verengerung der Fläche S entweder von der Gestalt dieser Fläche abhängig bleibt, oder falls er eine feste Grenze hat, an derselben verschwindet.

XII. Vierter Fall. Ausnahmeflächen.

Die Bedingungen A. und B. werden nur an einer zusammenhängenden Fläche f entlang verletzt, von welcher wir voraussetzen,

1) dass sie keine unendlich weit von einander entfernten Punkte enthält, und dass die Länge ihres Randes, wenn ein solcher vorhanden ist, nicht unendlich gross ist;
2) dass die Anzahl ihrer Ecken und Kanten, so wie die Zahl ihrer Durchschnittspunkte mit Geraden von verschwindender Länge und mit Curven, die zu ihrem Rande oder zu einer bestimmten, auf ihr verzeichneten Linie l (vergl. unten 3)) in unendlicher Nähe parallel sind, nicht unendlich gross ist.

Wir setzen ferner voraus, dass ϱ im ganzen Raume ausserhalb f gleich Null ist. In diesem, wie in den früheren Fällen darf aus dem Umstande, dass Δv auf f selbst nicht gleich Null gesetzt werden kann, nicht geschlossen werden, ϱ habe dort von Null verschiedene Werthe, weil auf f selbst von der Bildung des Ausdruckes Δv überhaupt keine Rede sein kann.

Den Fall, wo v oder eine seiner ersten Derivirten in allen Punkten eines Flächenstücks von endlicher Ausdehnung unendlich oder unbestimmt wird, haben wir bereits ausgeschlossen. Wir fügen hierzu noch weitere Beschränkungen in den an f entlang vorauszusetzenden Verstössen gegen A. und B. Diese Verstösse bestehen nach art. VIII. in blossen Unstetigkeiten, welche v oder seine ersten Derivirten beim Durchgange durch f erleiden, und welche, abgesehen von einzelnen auf f liegenden Punkten und Linien, mit keinem Unendlichwerden dieser Functionen verbunden sind. Die Beschränkungen, denen wir diese Unstetigkeiten unterwerfen, betreffen 1) die Geschwindigkeit, mit welcher v oder seine ersten Derivirten anwachsen dürfen, wenn man solchen Punkten und Linien von Aussen her, und 2) die von

jener wohl zu unterscheidende Geschwindigkeit, mit welcher ihre Sprünge wachsen dürfen, wenn man diesen Stellen an der Fläche f entlang immer näher rückt.

Wenn die Unstetigkeiten von v oder seinen ersten Derivirten sich bis an den Rand λ der Fläche f erhalten, so werden diese Functionen auf dem Rande selbst unbestimmt, indem sie beim Umbiegen um denselben alle beim Durchgange durch f übersprungenen Werthe in stetiger Reihenfolge durchlaufen. Folglich gehört der Rand λ im Allgemeinen ebenfalls zu den, auf f noch besonders zu unterscheidenden Ausnahmestellen, von denen er bloss durch seine Lage auf f unterschieden ist.

Wenn auf f in irgend einem Punkte oder an einer Linie entlang eine, auch in isolirten Punkten oder Linien mögliche Verletzung von A. stattfindet, so kann man dieselbe ohne eine Aenderung in den übrigen Bedingungen dadurch vollständig beseitigen, dass man aus dem Ausdrucke für v eine von den im zweiten und dritten Falle auftretenden Formen ausscheidet. Wir setzen dies als geschehen voraus, und beschränken dem entsprechend das Unendlichwerden von v und seinen ersten Derivirten durch die unten folgende vierte Bedingung.

Dies festgestellt, betrachten wir f als einen Spalt im Raume, und bezeichnen einen Punkt o von f, jenachdem er als auf der einen oder der andern Seite des Spaltes liegend betrachtet wird, durch o_1 oder o_2, die Werthe von v in diesen Punkten durch v_1, v_2 und unter der Voraussetzung, dass man beim Differentiiren von o_1 und o_2 aus auf den, über beiden Seiten des Spaltes von ihm abwärts errichteten Normalen fortschreitet, seine Derivirten durch $\frac{\partial v_1}{\partial p_1}$ und $\frac{\partial v_2}{\partial p_2}$. Dann stellen sich die an f entlang zu erfüllenden Bedingungen wie folgt:

3) Mit Ausnahme von isolirten Punkten m, einer Linie l (vergl. oben 2)) und des Randes λ sind v und seine ersten Derivirten auf beiden Seiten von f nirgendwo unendlich oder unbestimmt. Die Punkte m sind nur in begrenzter Zahl vorhanden, und die Anzahl der Ecken von l und λ, sowie die Länge von l ist ebenfalls nicht unendlich gross.

4) Legt man um jeden Punkt m als Centrum eine Kugelfläche S_m, und um die Linien l und λ als Axen Röhrenflächen S_l und S_λ, sämmtlich vom Halbmesser c, so soll zugleich mit c jedes der Integrale

$$[m] = \frac{1}{4\pi}\int\left(v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p}\right)\partial S_m,$$

$$\left.\begin{matrix}(l)\\(\lambda)\end{matrix}\right| = \frac{1}{4\pi}\int\left(v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial p}\right)\cdot\left|\begin{matrix}\partial S_l\\ \partial S_\lambda\end{matrix}\right.$$

verschwinden.

5) Beim Durchgange durch f sind v und seine ersten Derivirten unstetig, und zwar ist im Punkte o

$$\frac{\partial v_1}{\partial p_1} + \frac{\partial v_2}{\partial p_2} = -4\pi\mathrm{E},$$
$$v_1 - v_2 = 4\pi\Omega_1.$$

6) Ist R die geradlinige Entfernung von o bis zu einem Punkte m, und nähert sich o, ohne f zu verlassen, diesem Punkte auf einer beliebigen Bahn, so verschwinden

$$R^{1+k}\mathrm{E}, \quad R^{1+k}\Omega_1$$

mit R zugleich, sobald für k eine passende, unter 1 liegende positive Zahl gesetzt wird.

7) Nähert sich dagegen o, ohne f zu verlassen, einem der Linie l oder λ angehörigen Punkte so, dass seine Bahn zuletzt in die Normalebene dieser Linie fällt, so verschwinden zugleich mit der geradlinigen Entfernung R beider Punkte die Grössen

$$R^k\mathrm{E}, \quad R^k\Omega_1,$$

wenn k wieder einen von 1 verschiedenen positiven echten Bruch bedeutet.

In den verschiedenen Fällen, welche sich hier darbieten, kann k verschiedene Werthe haben, welche jedoch sämmtlich kleiner als 1 sein müssen. Für unsern Zweck reicht es hin, unter k den grössten von allen diesen Werthen zu verstehen.

Setzt man nun die um alle Ausnahmestellen von v zu legende Fläche S zusammen aus den Flächen S_m, S_l, S_λ (siehe oben 4)) und den ausserhalb derselben liegenden Theilen der Spaltflächen, und bezeichnet man durch ∂f_1 und ∂f_2 die mit dem Elemente ∂f von f zusammenfallenden Elemente der letztern, so geht die für jeden ausserhalb S liegenden Punkt O gültige Gleichung $v_0 = (S)$

mit Rücksicht auf die in 4) eingeführten Zeichen über in

$$v_0 = \frac{1}{4\pi}\int'\left(v_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p_1} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial p_1}\right)\partial f_1 + \frac{1}{4\pi}\int'\left(v_2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p_2} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_2}{\partial p_2}\right)\partial f_2$$
$$+(l)+(\lambda)+\Sigma[m],$$

wenn die Summation im letzten Gliede zur Rechten sich über alle Punkte m erstreckt, und in den ersten Gliedern der Accent andeutet, dass die innerhalb der Kugeln und Röhren liegenden Elemente ∂f von der Integration ausgeschlossen sind.

In den beiden ersten Gliedern lassen sich zunächst die entsprechenden Elemente vereinigen. Berücksichtigt man, dass in o $\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p_2} = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p_1}$ ist, so ergiebt sich wegen 5)

$$(\alpha.)\qquad v_0 = '\!\!\int\frac{\mathrm{E}\partial f}{r} + '\!\!\int\Omega_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p_1}\partial f + (l)+(\lambda)+\Sigma[m].$$

Nennt man ferner ∂f_m, ∂f_l, ∂f_λ die Elemente der ins Innere von S_m, S_l, S_λ fallenden Theile von f, und setzt

$$\int\frac{\mathrm{E}\partial f_m}{r} = E_m,\quad \int\Omega_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p_1}\partial f_m = O_m,\quad \int\frac{\mathrm{E}\partial f_l}{r} = E_l,\quad \text{u. s. w.},$$

so kann man endlich schreiben

$$v_0 = \int\frac{\mathrm{E}\partial f}{r} + \int\Omega_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p_1}\partial f + T,$$

wenn

$$T = (l)+(\lambda)-E_l-E_\lambda-O_l-O_\lambda+\Sigma([m]-E_m-O_m)$$

gesetzt wird, und das Weglassen der Accente bedeutet, dass die Integration in den ersten Gliedern über alle Elemente von f ohne Ausnahme zu erstrecken ist.

Dabei ist jedoch vorausgesetzt, dass diese Glieder durch die Erweiterung ihres Integrationsgebietes weder unendlich, noch unbestimmt werden. Dies ist, wie im Folgenden gezeigt wird, wirklich der Fall, solange die für E und Ω_1 gestellten Bedingungen 6) und 7) erfüllt sind.

Werden dagegen diese Bedingungen so abgeändert, dass die Integrale $'\!\!\int\frac{\mathrm{E}\partial f}{r}$ und $'\!\!\int\Omega_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p_1}\partial f$ divergiren, wenn man die Integration bis an l, λ, m

hinan erstreckt, so muss der ursprüngliche Ausdruck (α.) beibehalten werden, indem nun die Glieder (l), (λ), [m] zur Ausgleichung der, bei abnehmendem c eintretenden Divergenz der ersten Glieder dienen.

Wir werden beweisen, dass bei den obigen Bedingungen jedes einzelne Glied von T mit dem Halbmesser c zugleich verschwindet. Da die Anzahl dieser Glieder wegen 3) keine unbegrenzte ist, so ist dasselbe dann auch von ihrer Summe T nachgewiesen.

Nennt man R die geradlinige Entfernung von ∂f_m bis m, und bezeichnet durch k den in 6) erwähnten positiven echten Bruch, so ist

$$E_m = \int \frac{R^{1+k}\mathrm{E}}{r} \cdot \frac{\partial f_m}{R^{k+1}}, \qquad O_m = \int R^{1+k}\Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial f_m}{R^{k+1}};$$

ersetzt man aber die Factoren $\frac{R^{1+k}\mathrm{E}}{r}$ und $R^{1+k}\Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1}$ durch passende Mittelwerthe M und N, und setzt $\int \frac{\partial f_m}{R^{k+1}} = \omega$, so wird $E_m = M\omega$, $O_m = N\omega$. Da wegen 6) der grösste Werth von M und N, und nach Note 1. auch ω mit c zugleich unter jede Grenze sinkt, so gilt dasselbe von E_m und O_m.

Bezeichnet man ferner durch R die auf einem Halbmesser der Röhrenfläche S_l gezählte Entfernung von ∂f_l bis zur Axe l, durch k den in 7) erwähnten positiven echten Bruch, und durch M', N' passende Mittel aus den Werthen, welche $\frac{R^k\mathrm{E}}{r}$ und $R^k\Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1}$ in E_l und O_l während der Integration durchlaufen, und setzt man $\int \frac{\partial f_l}{R^k} = \eta$, so wird $E_l = M'\eta$, $O_l = N'\eta$; und da wegen 7) der grösste Werth von M' und N', und nach Note 3. auch η mit c zugleich unter jede Grenze sinkt, so gilt dasselbe von E_l und O_l, und aus demselben Grunde von E_λ und O_λ.

Man kann daher die Halbmesser der Flächen S_l, S_λ, S_m so klein wählen, dass die durch ihr völliges Verschwinden bewirkten Aenderungen $E_l + E_\lambda + \Sigma E_m$, $O_l + O_\lambda + \Sigma O_m$ der Integrale $'\!\int \frac{\mathrm{E}\partial f}{r}$ und $'\!\int \Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1} \partial f$ kleiner als alles Beliebige werden; folglich convergiren diese Integrale ohne Unstetigkeit gegen feste Grenzen, wenn man sie bis an l, λ, m hinan erstreckt.

Da zugleich mit c wegen 4) auch jedes der Integrale (l), (λ), [m] verschwindet, so folgt ferner, dass der Unterschied T zwischen v_0 und der

Summe der beiden Integrale $'\int \frac{E\partial f}{r}$ und $'\int \Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1} \partial f$ unter jede Grenze gedrückt wird, wenn man die Halbmesser der Flächen S_l, S_λ, S_m ohne Ende abnehmen lässt. Daraus folgt:

p. Die Function v ist durch die Bedingungen *A*., *B*., *D*. des art. II. und 3) bis 7) völlig bestimmt, so lange die Fläche f den Bedingungen 1) und 2) entspricht, und ϱ gleich Null ist, und zwar ist für jeden ausserhalb f liegenden Punkt O:

$$v_0 = \int \frac{E\partial f}{r} + \int \Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1} \partial f.$$

Aendert man insbesondere die Bedingung 5) dahin ab, dass entweder Ω_1 oder E gleich Null ist, so ergiebt sich:

q. Ist unter Voraussetzung aller übrigen Bedingungen v selbst beim Durchgange durch die Fläche f stetig, dagegen

$$\frac{\partial v_1}{\partial p_1} + \frac{\partial v_2}{\partial p_2} = -4\pi E,$$

während E den in 6) und 7) gestellten Bedingungen genügt, so ist

$$v_0 = \int \frac{E\partial f}{r}.$$

r. Ist die Derivirte von v nach der Normale der Fläche f beim Durchgange durch dieselbe nicht unstetig, jedoch

$$v_1 - v_2 = 4\pi\Omega_1,$$

während Ω_1 die in 6) und 7) gestellten Bedingungen erfüllt, so ist

$$v_0 = \int \Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1} \partial f.$$

Diese Sätze gelten selbst dann noch, wenn im ersten Fall v_1 und v_2, im zweiten $\frac{\partial v_1}{\partial p_1}$ und $\frac{\partial v_2}{\partial p_2}$ in unendlicher Nähe von l, λ, m einen derartigen Verlauf annehmen, dass es nicht mehr gestattet ist, Ω_1 resp. E an diesen Stellen noch gleich Null zu setzen, wofern nur dort den Bedingungen 6) und 7) Genüge geschieht. In der That kommen hierdurch zu v_0 nur Integrale O_l, O_λ, O_m resp. E_l, E_λ, E_m, welche sämmtlich kleiner als jede angebbare oder mit anzugebenden Werthen vergleichbare Zahl sind.

Man kann endlich, ohne dass die vorstehenden Sätze ihre Gültigkeit verlieren, die Bedingungen 6) und 7) durch die allgemeinere ersetzen, dass die über einen beliebigen Theil F von f erstreckten Integrale $\int \frac{\mathrm{E}\partial f}{r}$ und $\int \Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1} \partial f$ bei stetiger Erweiterung von F nie unbestimmt, unendlich oder unstetig werden, weil diese Bedingung das Verschwinden von E_m, O_m, E_l, O_l, E_λ und O_λ nach sich zieht.

XIII.

Zu den im Vorangehenden untersuchten Gattungen einwerthiger Potentiale müssen nun noch als besondere Fälle diejenigen gefügt werden, bei denen die Anzahl der Ausnahmepunkte, die Länge einer Ausnahmelinie oder der Inhalt einer Ausnahmefläche unendlich gross ist, sowie diejenigen, welche Ausnahmestellen im Unendlichen besitzen.

Wir bemerken in dieser Beziehung zunächst den folgenden Grundsatz, der mit den nöthigen Modificationen in jedem der eben genannten vier Fälle Anwendung findet.

Wenn der Ausdruck v eines einwerthigen Potentials bei unbegrenzter Erweiterung einer Ausnahmestelle $\mathfrak{A}$ zuletzt in einen, vom Gesetze dieser Erweiterung unabhängigen Ausdruck u übergeht, so stellt u dasjenige einwerthige Potential dar, welches der ins Unbegrenzte erweiterten Ausnahmestelle entspricht.

Bezeichnet man diese Letztere durch $\mathfrak{B}$, so reicht es zum Beweise des Satzes hin, zu zeigen, 1) dass u ein einwerthiges Potential ist, 2) dass es ausserhalb $\mathfrak{B}$ nirgendwo gegen die Bedingung A. verstösst, und 3) dass u, soweit $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}$ zusammenfällt, stets dieselben Unstetigkeiten wie v besitzt. Das Letztere folgt aus der Form des Ausdruckes v, welche zur Folge hat, dass aus der Differenz $u-v$ alle auf $\mathfrak{A}$ bezüglichen Theile wegfallen; da ausserdem der Unterschied zwischen u und v nach den Bedingungen des Satzes durch hinlängliche Erweiterung von $\mathfrak{A}$ im ganzen Raume ausserhalb $\mathfrak{B}$ unter eine beliebige Grenze hinabgedrückt werden kann, und v dort die beiden zuerst genannten Eigenschaften besitzt, so können dieselben auch dem Ausdrucke u nicht abgehen.

XIV.

Nach diesem Satze bleiben nur noch diejenigen einwerthigen Potentiale zu untersuchen übrig, welche Ausnahmestellen im Unendlichen besitzen, ohne

dass ihre Ausdrücke sich aus den oben gefundenen durch unbegrenzte Erweiterung einer solchen Stelle ergeben. Dieselben müssen nach art. II. und VI. aus den bisher betrachteten sämmtlich durch conforme Umbildung erhalten werden.

Zur leichteren Uebersicht gehen wir auf die in art. I. definirte Function $\mathfrak{v}$ zurück, indem wir $\varrho' = 0$ setzen, und ausserdem die Bedingung stellen, dass $\mathfrak{v}$ von solchen Ausnahmestellen, die keinen Punkt im Unendlichen besitzen, befreit ist.

Da hiernach die Ausnahmestellen von $\mathfrak{v}$ entweder vollständig im Unendlichen liegen, oder ohne Unterbrechung aus den unendlich entfernten Theilen des Raumes bis ins Endliche reichen, so kann man den Raum $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ mittelst einer nie in getrennte Stücke zerfallenden Fläche in zwei Theile zerlegen, von denen der eine alle unendlich entfernten Theile des Raumes und sämmtliche Ausnahmestellen enthält, während der andere, den wir $\mathfrak{B}$ nennen, von ihnen völlig frei ist. Dann lässt sich der Werth $\mathfrak{v}_{\mathfrak{O}}$, den $\mathfrak{v}$ in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{O}$ des Raumes $\mathfrak{B}$ hat, nach art. III. durch ein über die Oberfläche von $\mathfrak{B}$ erstrecktes Integral darstellen, dessen Werth in Folge der für $\mathfrak{v}$ gestellten Bedingungen von der Gestalt dieser Fläche unabhängig ist, solange in $\mathfrak{B}$ keine Ausnahmestellen aufgenommen werden.

Dies festgestellt, legen wir um den Mittelpunkt $\mathfrak{p}'$ des Raumes $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ (art. II.) eine Kugelfläche $\mathfrak{K}$, um jede Ausnahmelinie von $\mathfrak{v}$ eine Röhrenfläche, und unterscheiden bei jeder Ausnahmefläche ihre beiden Seiten, indem wir sie als einen Spalt im Raume ansehen.

Dann können wir die Oberfläche von $\mathfrak{B}$ zusammensetzen 1) aus demjenigen Theile $\mathfrak{S}_\infty$ der Kugelfläche $\mathfrak{K}$, der ausserhalb sämmtlicher Röhren- und Spaltflächen liegt, und 2) aus derjenigen Fläche $\mathfrak{S}$, die durch sämmtliche ins Innere von $\mathfrak{K}$ fallenden Theile der letzteren gebildet wird.

Dehnt man nun die Bezeichnungen des art. III. 1. auf den vorliegenden Fall aus, so folgt aus der Gleichung (*O.*) desselben art.

$$\mathfrak{v}_{\mathfrak{O}} = (\mathfrak{S})-(\mathfrak{S}_\infty).$$

Lässt man jetzt $\mathfrak{K}$ oder $\mathfrak{S}_\infty$ ins Unendliche rücken, und $\mathfrak{S}$ sich demgemäss erweitern, so sind zwei Fälle möglich; entweder convergirt das Integral $(\mathfrak{S})$, also wegen der für $\mathfrak{v}$ gestellten Bedingungen auch $(\mathfrak{S}_\infty)$ gegen eine feste Grenze, oder es ist dies nicht der Fall.

1. Im ersten Falle geht $(\mathfrak{S})$ in eines von den im vorigen art. behandelten Potentialen über, und es wird demnach $(\mathfrak{S}_\infty)$ an der Grenze eben-

falls ein einwerthiges Potential. Wir verwandeln dasselbe durch conforme Umbildung, zu deren Mittelpunkt wir das Centrum $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{K}$ nehmen, in ein auf den Raum x, y, z bezügliches v. Dann entspricht der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ in letzterem eine neue Kugelfläche K, und den unendlich entfernten Theilen des Raumes $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ das Centrum p' von K. Man erhält auf diese Weise (art. II.) ein einwerthiges Potential

$$v = \frac{a}{s}(\mathfrak{S}_\infty),$$

welches ausserhalb p' allenthalben den Bedingungen $A.$, $B.$, $D.$ des art. II. für $\varrho = 0$ genügt, also zu den im art. X. behandelten gehört. Folglich wird umgekehrt der Grenzwerth von $(\mathfrak{S}_\infty)$ im vorliegenden Falle durch conforme Umbildung der in art. X. behandelten Gattung von Potentialen erhalten, was in dem Falle, wo $\mathfrak{v}$ im Unendlichen nicht von unendlich hoher Ordnung unendlich wird, auf rationale ganze Functionen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ führt.

2. Wenn dagegen bei fortgesetzter Erweiterung von $\mathfrak{K}$ zwar die Differenz von $(\mathfrak{S})$ und $(\mathfrak{S}_\infty)$ bei einem festen Werthe beharrt, aber keines von beiden Integralen für sich gegen eine feste Grenze convergirt, so verwandelt sich $\mathfrak{v}$ durch die nämliche conforme Umbildung in ein einwerthiges Potential v, welches eine nicht bis ins Unendliche reichende Ausnahmestelle besitzt, die sich im Punkte p' schliesst. Der Kugel $\mathfrak{K}$ und dem zur Ausschliessung der Ausnahmestellen von $\mathfrak{v}$ dienenden System $\mathfrak{F}$ von Röhren- und Spaltflächen entspricht im Raume x, y, z die Kugel K mit dem Centrum p' und ein System F von Flächen, welche die Ausnahmestellen von v einschliessen. Beseitigt man von beiden Flächen K und F diejenigen Theile, welche ins Innere der andern fallen, und nennt die übrig bleibenden Theile $S_{p'}$ und S, so wird v nach art. IV. durch die Gleichung

$$v_0 = (S) + (S_{p'})$$

dargestellt, und es ist nun nach art. II.

$$(S) = \frac{a}{s}(\mathfrak{S}), \quad -(S_{p'}) = \frac{a}{s}(\mathfrak{S}_\infty).$$

Daraus folgt, dass bei fortgesetzter Verengerung von K oder $S_{p'}$ zwar die Summe der Integrale (S) und $(S_{p'})$ ungeändert bleibt, aber keines von beiden für sich gegen eine feste Grenze convergirt.

Folglich wird man im gegenwärtigen Falle auf die in art. XI. und XII. erwähnten Fälle zurückgeführt, wo zur Vermeidung divergenter Ausdrücke

für v aus einer Linie l oder einer Fläche f abnehmende Stücke derselben ausgeschieden, und durch eingeschaltete Kugelflächen ersetzt wurden.

Die einwerthigen Potentiale zerfallen hiernach in zwei getrennte Gattungen, von denen die eine durch die in den art. IX.—XII. gegebenen, geschlossenen Ausdrücke dargestellt wird, während die andere die Darstellung durch Formen, deren Elemente von der reciproken Entfernung abhängen, nur unter der Bedingung gestattet, dass die durch die Wahl dieser bestimmten Formen herbeigeführte Divergenz durch Ausscheidung von Restgliedern gehoben wird. Functionen dieser Art sind bis jetzt wenig untersucht worden, da sie nach dem eben Gesagten mit der Lehre von den Kräften, die nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung wirken, in keiner Beziehung stehen.

Note 1.

Um den Punkt m der Fläche S als Centrum legen wir eine Kugel vom Radius c, und nennen S' das in ihr Inneres fallende Stück von S. Es wird vorausgesetzt, dass S' durch Gerade, die zu einer Coordinatenaxe parallel sind, höchstens $n$mal, d. h. nicht unendlich oft geschnitten wird. Ist jetzt $\partial S'$ ein Element von S', R seine Entfernung von m, k eine unter 1 liegende positive Zahl, so convergirt das Integral

$$\omega = \frac{\partial S'}{R^{1+k}}$$

mit abnehmendem c gegen Null.

Zum Beweise verlegen wir den Coordinatenanfang nach m, und bezeichnen die positiven Flächeninhalte der Projectionen von $\partial S'$ auf die Coordinatenebenen durch ∂S_x, $\partial S'_y$, $\partial S'_z$, woraus

$$\omega < \int \frac{\partial S_x}{R^{1+k}} + \int \frac{\partial S'_y}{R^{1+k}} + \int \frac{\partial S'_z}{R^{1+k}}$$

folgt, weil $\partial S'$ als Summe der positiven Projectionen von $\partial S'_x$, $\partial S'_y$, $\partial S'_z$ auf die Ebene von $\partial S'$ kleiner als die Summe dieser Grössen selbst ist. Legt man jetzt über die yz-Ebene um m als Centrum zwei Kreise, deren Radien $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}+\partial\mathfrak{R}$ kleiner als c sind, so ist die Summe aller auf den von ihnen begrenzten Kreisring fallenden Projectionen $\partial S'_x$ kleiner als $n.2\pi\,\mathfrak{R}\,\partial\mathfrak{R}$, also der von diesen Projectionen herrührende Theil von $\int \frac{\partial S'_x}{R^{1+k}}$ kleiner als $n.2\pi\,\mathfrak{R}\,\partial\mathfrak{R}$ dividirt durch den kleinsten Werth, welcher R^{1+k} in diesen Projectionen beizulegen ist, also jedenfalls kleiner als $\frac{n.2\pi\mathfrak{R}\partial\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^{1+k}}$; mithin ist $\int \frac{\partial S_x}{R^{1+k}} < 2n\pi \int_0^c \frac{\partial\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^k} = \frac{2n\pi}{1-k}\, c^{1-k}$. Da dasselbe für

die beiden anderen Integrale gilt, so folgt $\omega < \frac{6n\pi}{1-k} c^{1-k}$. So lange also $1-k$ einen von Null verschiedenen positiven Werth hat, und n nicht über jeder angebbaren Zahl liegt, kann man die positive Grösse ω durch Verkleinerung von c unter jede Grenze bringen, w. z. b. w.

Note 2.

Die Oberfläche eines Raumes, den eine beliebig fortbewegte Kugel K vom constanten Halbmesser R durchdringt, nenne ich eine Röhrenfläche, R ihren Halbmesser und die Bahn l des Kugelcentrums ihre Axe.

Die Curve, in welcher die Kugel K durch eine ihrer früheren Lagen geschnitten wird, ist ein Kreis, dessen Ebene zur Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte in der Mitte senkrecht steht, und den nämlichen Punkt zum Centrum hat. Lässt man beide Kugeln zusammenfallen, so geht ihr Durchschnitt in die Curve über, an der entlang K von der Röhrenfläche S berührt wird. Dieselbe ist hiernach ein Hauptkreis von K, dessen Ebene im Centrum von K zur Axe l senkrecht steht. Daraus ergeben sich die folgenden bekannten Sätze, welche hier der Uebersicht wegen zusammengestellt werden mussten.

1. Die Röhrenfläche S wird von jeder Normalebene ihrer Axe l in einem Kreise vom Halbmesser R geschnitten, den wir den Querschnitt nennen.

2. Alle Halbmesser eines Querschnitts sind Normalen von S; jeder Querschnitt ist also eine Krümmungslinie von S und ihr Krümmungsradius constant $= R$.

Durch die Endpunkte q, q' eines Bogenelementes ∂l der Axe lege ich die Normalebenen von l, und nenne die hierdurch auf S bestimmten Querschnitte N, N'. Ist nun ∂l_1 ein Element von N, o sein Anfangspunkt, und ∂l_2 das von N und N' begrenzte Element der zweiten durch o gehenden Krümmungslinie von S, so sind ∂l_1 und ∂l_2 zu einander, und weil sie in der Tangentialebene von S liegen, auch beide zur Normale oq senkrecht. Folglich ist ausser ∂l auch noch ∂l_2 zur Ebene des Querschnittes N senkrecht.

3. Jedes Element ∂l_2 einer Krümmungslinie der zweiten Schaar ist zu dem, von den nämlichen Normalebenen der Axe begrenzten Elemente ∂l dieser letztern parallel.

Die Länge von ∂l_2 berechnen wir mittelst seiner Projection $\partial l_2'$ auf die zu ∂l gehörige Krümmungsebene der Axe. Da ∂l_2 zu ∂l, also auch zu dieser Krümmungsebene parallel ist, so ist seine Länge gleich der Länge $\partial l_2'$

seiner Projection. Letztere ist zu ∂l parallel, und mit diesem durch dieselben Normalebenen der Axe, also auch durch dieselben Hauptnormalen von l begrenzt. Folglich liegen ∂l und ∂l_2 auf zwei concentrischen Kreisen dem nämlichen Centriwinkel gegenüber. Nennt man P den Krümmungshalbmesser von l, P' den Halbmesser des anderen Kreises, so folgt $\frac{\partial l_2'}{P'} = \frac{\partial l}{P}$, also $\partial l_2' = \partial l_2 = \frac{P'}{P}\partial l$.

Bezeichnet man aber durch θ' den Winkel zwischen der Richtung von q nach o und von q an P entlang nach dem Krümmungscentrum hin, so dass θ', wenn o an N entlang sich fortbewegt, von o bis 2π wachsen kann, so ergiebt sich $P' = P - R\cos\theta'$, also $\partial l_2 = \left(1 - \frac{R\cos\theta'}{P}\right)\partial l$.

Lässt man ferner θ' um $\partial\theta'$ wachsen, so beschreibt o das Bogenelement ∂l_1, also ist $\partial l_1 = R\,\partial\theta'$.

Das Element der Oberfläche S ist $\partial S = \partial l_1 \partial l_2$, mithin

$$\partial S = \left(1 - \frac{R\cos\theta'}{P}\right) R\,\partial\theta'\,\partial l.$$

Ist daher l die Länge der Axe l, so ist die Gesammtoberfläche von S zwischen dem ersten und letzten Querschnitte gleich

$$\int \partial l \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{R\cos\theta'}{P}\right) R\,\partial\theta' = 2\pi R l.$$

Note 3.

Auf der Fläche S sei eine Linie l verzeichnet, deren Länge und Eckenzahl nicht unendlich gross sind. Um diese Linie als Axe legen wir eine Schaar von Röhrenflächen, und nennen R den Halbmesser einer beliebigen Röhre Σ, c den Halbmesser der weitesten Röhre Σ_0. Diese letztere schneidet aus S ein Stück S' heraus, von dem wir voraussetzen, dass es von jeder geraden Linie und jeder Krümmungslinie einer der genannten Röhrenflächen höchstens in n getrennten Punkten, d. h. nicht unendlich oft geschnitten wird.

Ist jetzt $\partial S'$ ein, zwischen die Röhren von den Halbmessern R und $R + \partial R$ fallendes Element von S', k eine unter 1 liegende positive Zahl, so convergirt das über die ganze Fläche S' erstreckte Integral

$$\eta = \int \frac{\partial S'}{R^k}$$

mit abnehmendem c gegen Null.

Zum Beweise dieses Satzes ist eine Zerlegung von η erforderlich. Die Röhrenfläche Σ_0 setzt sich aus Kugelstücken und Röhrenflächen im engern Sinne zusammen. Die letzteren können durch einen Querschnitt Q erzeugt werden, der sich an den stetig gebogenen Theilen von l entlang fortbewegt. Zu den ersteren gehören die halbkugelförmigen Verschlussstücke über den Enden von l und, wie aus der Erzeugung der Fläche durch Fortbewegung einer Kugel hervorgeht, in jeder Ecke m von l zwei Kugelsectoren, welche die angrenzenden Röhrenstücke in Verbindung setzen, und von denen der eine innerhalb, der andere ausserhalb beider Stücke liegt.

Dehnt man nun in η zuerst die Integration über alle Elemente $\partial S'$ aus, welche von Q überstrichen werden, so werden in jeder Ecke m die in den einen Kugelsector fallenden Elemente zweimal aufgenommen, dagegen die im andern und in den Verschlussstücken liegenden weggelassen. Ist η' das Resultat dieser Integration, so muss man also, um η zu erhalten, zu η' für jede Ecke und jedes Ende von l ein Integral $\int \frac{\partial S''}{R^k}$ addiren, und für jede Ecke ein solches Integral subtrahiren; in diesen Integralen ist R die Entfernung von $\partial S''$ bis zum fraglichen Punkte von l, während $\partial S''$ das Element des ins jedesmalige Kugelstück fallenden Theils von S' ist. Jedes dieser Integrale ist also kleiner als $c\int \frac{\partial S''}{R^{1+k}}$, und um so mehr kleiner als dasselbe Integral, wenn es über alle in die volle Kugel fallenden Elemente $\partial S''$ erstreckt wird. Da für das letztere die in der ersten Note gestellten Bedingungen erfüllt sind, so verschwindet es selbst, und um so mehr jedes zu η' hinzuzufügende Integral mit c zugleich. Dasselbe gilt von der Summe dieser Integrale, da ihre Anzahl nicht unendlich gross ist. Folglich verschwindet auch $\eta - \eta'$ zugleich mit c.

Die Untersuchung kann hiernach auf den Fall beschränkt werden, wo l stetig gebogen, und S' durch die Röhrenfläche Σ_0 vom Halbmesser c und ihre Querschnitte in den Enden von l begrenzt ist. Wir setzen demnach voraus, dass der Krümmungshalbmesser P von l nirgendwo kleiner als eine gegebene Strecke γ wird, und wählen $c < \gamma$; dann wird für jeden Winkel θ $1 - \frac{R\cos\theta}{P}$ positiv und kleiner als 2, wovon später Gebrauch gemacht wird.

Dies festgestellt, betrachten wir der leichteren Darstellung wegen die Halbmesser R, die zu l parallelen Krümmungslinien l_2 der Röhrenflächen und ihre, in die Querschnitte fallenden Krümmungslinien l_1 als drei Schaaren von Lichtstrahlen. Dann wirft $\partial S'$ in jeder dieser drei Beleuchtungen einen Schatten,

in der ersten auf die Röhrenfläche Σ vom Halbmesser R, in der zweiten auf den Querschnitt Q und in der dritten auf denjenigen Theil E der Krümmungsebene von l, welcher die rückwärts gehende Verlängerung von P enthält. Nennt man die Flächeninhalte dieser Schatten, wie sie aufgezählt wurden, $\partial\Sigma$, ∂Q, $\partial \mathrm{E}$, so ist

$$\partial S' < \partial\Sigma + \partial Q + \partial \mathrm{E},$$

da die drei Schatten von $\partial S'$ wie zu einander senkrechte Projectionen von $\partial S'$ oder wie Vergrösserungen solcher angesehen werden können.

Bedeutet $\partial\Sigma_0$ den Flächeninhalt des Schattens, den $\partial\Sigma$ auf die äusserste Röhrenwand Σ_0 wirft, und h das Vergrösserungsverhältniss, so wird $\partial\Sigma = \frac{\partial\Sigma_0}{h}$; es wird demnach auch

$$\int\frac{\partial S'}{R^k} < \int\frac{\partial\Sigma_0}{hR^k} + \int\frac{\partial Q}{R^k} + \int\frac{\partial \mathrm{E}}{R^k},$$

wenn rechts der jedesmalige Werth von R durch die Lage des schattenwerfenden Elementes $\partial S'$ bestimmt wird, und die Integrationen sich über alle beschatteten Theile von Σ_0, Q und E erstrecken, und zwar über jedes Element so oft, als es Elemente $\partial S'$ giebt, deren Schatten es aufnimmt.

Nennt man ∂l_1, ∂l_2 die Elemente der beiden Krümmungslinien l_1, l_2, die vom Punkte p der Fläche Σ ausgehen, und θ den Winkel zwischen dem nach p führenden Halbmesser R und dem Krümmungshalbmesser P im Fusspunkte von R auf l, so ist $\partial l_1 = R\,\partial\theta$, $\partial l_2 = \left(1-\frac{R\cos\theta}{P}\right)\partial l$, wenn ∂l_2 und ∂l von denselben Querschnitten begrenzt werden. Die Elemente von Σ, Q und E werden hiernach folgende:

$$\partial\Sigma = \partial l_2\,\partial l_1 = R\left(1-\frac{R\cos\theta}{P}\right)\partial l\,\partial\theta,$$

$$\partial Q = \partial l_1\,\partial R = R\,\partial R\,\partial\theta,$$

$$\partial \mathrm{E} = \partial R\,\partial l_2 \text{ für } \theta = \pi, \text{ also } = \left(1+\frac{R}{P}\right)\partial l\,\partial R.$$

Folglich ist

$$\frac{\partial\Sigma_0}{hR^k} = R^{1-k}\left(1-\frac{R\cos\theta}{P}\right)\partial l\,\partial\theta < 2c^{1-k}\partial l\,\partial\theta,$$

$$\frac{\partial Q}{R^k} = R^{1-k}\,\partial R\,\partial\theta,$$

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{R^k} = \left(1+\frac{R}{P}\right)\frac{\partial l\,\partial R}{R^k} < \frac{2\,\partial l\,\partial R}{R^k}.$$

Bildet man jetzt für jedes Element $\partial S'$ die verstärkte Ungleichheit

$$\frac{\partial S'}{R^k} < 2c^{1-k}\partial l\partial\theta + R^{1-k}\partial R\partial\theta + \frac{2\partial l\partial R}{R^k},$$

und beachtet bei der Addition, dass auf jedes beschattete Element $\partial\Sigma_0$, ∂Q, ∂E nicht mehr als n Schatten fallen können, so wird umsomehr

$$\int\frac{\partial S'}{R^k} < n\left[2c^{1-k}\int\partial l\partial\theta + \int R^{1-k}\partial R\partial\theta + 2\int\frac{\partial l\partial R}{R^k}\right],$$

wo die Integrationen über jedes beschattete Element $\partial\Sigma_0$, ∂Q, ∂E nur einmal zu erstrecken sind. Diese Ungleichheit wird mindestens nicht geschwächt, wenn statt dessen die Integrationen über alle Elemente ausgedehnt werden, also ist

$$\eta < n\left[4\pi l.c^{1-k} + \frac{2\pi}{2-k}c^{2-k} + \frac{2}{1-k}lc^{1-k}\right].$$

Solange daher $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{l}$ und die positive Zahl $1-k$ von Null verschieden sind, kann man die positive Grösse η durch Verkleinerung von c unter jede Grenze hinabdrücken, w. z. b. w.

Zürich, 15. Juni 1865.

Berichtigung.

S. 331 Z. 1 v. u. und S. 332 Z. 13 v. o. in Formel (O'.) lies $\frac{\partial v_0}{\partial X}$ statt $\frac{\partial v_0}{\partial x}$.
S. 348 Z. 11 u. 12 v. u. lies s, a_1, e_1 statt s', a', e'.

Note sur les singularités supérieures des courbes planes.

(Par M. *A. Cayley* à Cambridge.)

Dans un mémoire „On the higher singularities of plane Curves" destiné pour le *Quarterly Mathematical Journal* j'ai cherché à établir qu'une singularité quelconque équivaut à un certain nombre δ' de points doubles, $\varkappa'$ de points de rebroussement, τ' de tangentes doubles et ι' d'inflexions; et pour déterminer ces nombres, j'ai donné dans le cas d'une singularité simple, où la courbe n'a qu'une seule branche, des formules que je vais reproduire ici. Si la branche est par rapport à ses points de l'indice α, ayant avec elle-même le nombre $\frac{1}{2}M$ de points communs, et par rapport à ses tangentes de l'indice β, ayant avec elle-même le nombre $\frac{1}{2}N$ de tangentes communes, on trouve

$$\begin{aligned} \delta' &= \tfrac{1}{2}[M-3(\alpha-1)], \\ \varkappa' &= \alpha-1, \\ \tau' &= \tfrac{1}{2}[N-3(\beta-1)], \\ \iota' &= \beta-1. \end{aligned}$$

Pour expliquer ces formules, je remarque que la singularité dont il s'agit est telle que, prenant pour origine le point sur la courbe, on obtient pour l'ordonnée y *une seule suite* de la forme

$$y = Ax^p+Bx^q+\cdots,$$

où la suite est arrangée suivant les puissances ascendantes de x et les coefficients $A, B, \ldots$ ont chacun une valeur unique. Si l'axe des y ne touche pas la courbe, aucun des exposants $p, q, \ldots$ ne sera inférieur à l'unité, et si de plus l'axe des x touche la courbe, ce que l'on peut toujours effectuer par un choix convenable de la direction des axes, les exposants $p, q, \ldots$ seront tous supérieurs à l'unité. Cela posé, et les exposants fractionnaires étant exprimés chacun dans ses moindres termes, si α est le plus petit nombre entier divisible par tous les dénominateurs des fractions (de manière que y soit fonction entière de $x^{\frac{1}{\alpha}}$), je dis que la branche est de l'indice α par rapport à ses points. On a donc pour y precisément le nombre α de valeurs, qui s'obtiennent en attribuant à $x^{\frac{1}{\alpha}}$ ses valeurs diverses. A chacune de ses valeurs

correspond une „branche partielle" de la courbe, de manière que la branche à l'indice α est composée de α branches partielles; pour $\alpha = 1$ la branche partielle n'est autre chose que la branche même. En considérant deux branches partielles, et en désignant par p le plus petit exposant de x qui se trouve dans la suite par laquelle est exprimée la différence $y_1 - y_2$ des ordonnées des deux branches partielles (ce nombre p pouvant être entier ou fractionnaire), je pose comme définition que les deux branches partielles ont un nombre p de points communs ou d'intersection. En combinant deux à deux les α branches partielles qui composent la branche de l'indice α, et en formant la somme Σp des nombres p qui correspondent à chaque paire de branches partielles, on obtient le nombre $\frac{1}{2}M$ des points communs de la branche avec elle-même. En se servant des coordonnées tangentielles, on a par rapport aux tangentes de la branche une théorie tout à fait semblable; cette remarque suffit pour expliquer les notions d'une branche de l'indice β par rapport à ses tangentes, et du nombre $\frac{1}{2}N$ des tangentes communes de la branche avec elle-même.

Comme exemple je prends la singularité donnée par l'équation

$$y = x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{5}{2}} + \cdots.$$

Dans ce cas les exposants n'ont que les dénominateurs 2 et 3, la branche est de l'indice 6 par rapport à ses points, elle est composée de six branches partielles représentées par les équations

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{5}{2}} \ldots, & y_4 &= x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{5}{2}} \ldots, \\ y_2 &= \omega\, x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{5}{2}} \ldots, & y_5 &= \omega\, x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{5}{2}} \ldots, \\ y_3 &= \omega^2 x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{5}{2}} \ldots, & y_6 &= \omega^2 x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{5}{2}} \ldots, \end{aligned}$$

où ω est une racine cubique imaginaire de l'unité. La branche partielle y_1 coupe les autres branches partielles dans un nombre $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{3}$ de points, ce qui donne pour la branche partielle y_1 le nombre $\frac{16}{3} + \frac{5}{2}, = \frac{47}{6}$ de points; on a ce même nombre $\frac{47}{6}$ pour les autres branches partielles y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 respectivement, et de là on trouve, pour le *double* du nombre des intersections de la branche avec elle-même, la valeur $M = 47$, donc $\delta' = \frac{1}{2}(47 - 15) = 16$, $\varkappa' = 5$.

En coordonnées tangentielles la branche $y = x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{5}{2}} + \cdots$ s'exprime par l'équation

$$Z = X^4 + \cdots + X^{\frac{15}{4}} \ldots.$$

Plus généralement, on a pour une branche $y = Ax^p + Bx^q + \cdots$ l'équation en

coordonnées tangentielles $Z = A'X^{\frac{p}{p-1}} + B'X^{\frac{q}{p-1}} + \cdots$, la forme générale des exposants étant $\frac{\lambda p + \mu q + \cdots}{p-1}$, où λ, μ, ... sont des entiers positifs, résultat que je ne m'arrête pas à démontrer. Dans le cas particulier qui nous occupe, la branche est donc de l'indice 2 par rapport à ses tangentes. On trouve de suite $N = 15$ et de là $\tau' = \frac{1}{2}(15-3) = 6$, $\iota' = 1$; donc la singularité dont il s'agit équivaut à un nombre 16 de points doubles, 5 de points de rebroussement, 6 de tangentes doubles, et 1 inflexion.

On a un exemple plus simple dans le point de rebroussement de seconde espèce; l'équation est ici $y = x^2 + x^{\frac{5}{2}} \ldots$ et en coordonnées tangentielles on obtient l'équation $Z = X^2 + X^{\frac{5}{2}} \ldots$ de la même forme. De là on trouve $\delta' = 1$, $\varkappa' = 1$, $\tau' = 1$, $\iota' = 1$, de manière que cette singularité équivaut à 1 point double, 1 point de rebroussement, 1 tangente double et 1 inflexion. M. *Plücker* dans son grand ouvrage a trouvé *a posteriori* que cette singularité se compose de $2\frac{1}{2}$ points doubles et de $2\frac{1}{2}$ tangentes doubles, ce qui donne en effet les mêmes réductions pour la classe et les mêmes nombres pour les inflexions et les tangentes doubles, que donnent mes valeurs $\delta' = 1$, $\varkappa' = 1$, $\tau' = 1$, $\iota' = 1$; mais il y a à remarquer qu'en considérant par exemple une courbe du quatrième ordre avec un point double et un point de rebroussement de seconde espèce (courbe qui existe), on aurait $\delta + \varkappa = 3\frac{1}{2}$, nombre plus grand que le maximum du nombre des points doubles et de rebroussement que peut avoir une courbe du quatrième ordre.

Je n'ai parlé que des singularités simples, où il y a une seule branche de la courbe, mais on étend sans peine la théorie précédente aux singularités composées, où il y a plusieurs branches de la courbe. Cette extension exige la distinction de trois cas différents. Il peut y avoir sur la courbe un point avec une seule tangente, mais avec plusieurs branches qui se touchent, — ou un point avec plusieurs tangentes dont chacune touche une ou plusieurs branches, — ou enfin une tangente avec plusieurs points de contact, dans lesquels la tangente touche une seule ou plusieurs branches de la courbe.

Cambridge, 1. Juin 1865.

Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen.

(Von Herrn *G. Roch* in Halle.)

Ist s eine durch die Gleichung $F(s, z) = 0$ definirte algebraische Function von z, so kann nach *Riemann* (s. dessen Abhandlung über *Abel*sche Functionen, Band 54. dieses Journals) jede wie s verzweigte algebraische Function s' von z rational durch s und z ausgedrückt werden. Wird die Function s' in m Punkten der Fläche T, welche die Verzweigungsart angiebt, unendlich erster Ordnung, so enthält dieselbe nach §. 5. der erwähnten Abhandlung $m-p+1$ willkürliche Constanten. Schon die a. a. O. untersuchte Bedingung der Existenz von Functionen, die in weniger als $p+1$ Punkten unendlich werden, zeigt, dass die Anzahl der wirklich vorhandenen Constanten eine grössere sein kann. Dies kann aber auch Statt finden, wenn m grösser als p ist. Ist z. B. s' der Quotient zweier Functionen φ, so wird s' in den $2p-2$ Punkten unendlich, in denen der Nenner gleich Null ist (s. §. 10. der citirten Abhandlung), und enthält so viele willkürliche Constanten, als die den Zähler bildende Function, nämlich p, während die Zahl $m-p+1$ im vorliegenden Falle gleich $p-1$ ist. Sind dagegen φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 solche Functionen φ, welche in $p-1$ Punkten unendlich klein zweiter Ordnung werden, deren Quadratwurzeln *Riemann* Abelsche Functionen nennt, so giebt es eine gewisse Anzahl von Ausdrücken $\sqrt{\frac{\varphi_1\psi_1}{\varphi_2\psi_2}}$, welche rationale Functionen von s und z sind; diese enthalten in der That $p-1$ Constanten in linearer Weise, ein Satz, der von *Riemann* herrührt und für welchen ein Beweis in der folgenden genauen Bestimmung der Constanten-Anzahl mit enthalten ist.

Der allgemeinste Ausdruck eines Integrals zweiter Gattung, welches in m Punkten ε unendlich erster Ordnung wird, ist

$$v = \beta_1 t_1 + \cdots + \beta_m t_m + \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_p w_p + \text{const.}$$

(Vergl. §. 5. der *Riemann*schen Abhandlung.) Hierbei sind unter $t_1 \ldots t_m$ specielle Integrale zweiter Gattung zu verstehen, welche beziehlich in den Punkten $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m$ unendlich werden wie $\frac{1}{\sigma_1} \cdots \frac{1}{\sigma_m}$, wenn σ_k eine Grösse be-

deutet, die in ε_k unendlich klein erster Ordnung genannt wird. Damit v in eine algebraische Function s' übergehe, müssen sämmtliche Periodicitätsmoduln von v verschwinden. Hieraus ergeben sich $2p$ lineare Bedingungsgleichungen zwischen den $m+p$ Constanten β und α, so dass $m-p+1$ willkürliche Constanten bleiben. Nur, wenn diese $2p$ Gleichungen von einander abhängig sind, enthält s' mehr als $m-p+1$ Constanten.

Um diese Abhängigkeit zu untersuchen, nehmen wir für die endlich bleibenden Integrale $w_1 \dots w_p$ die speciellen

$$u_1 = \int \frac{\varphi_1(s,z)\,dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}, \quad \dots \quad u_p = \int \frac{\varphi_p(s,z)\,dz}{\frac{\partial F}{\partial s}},$$

welche *Riemann* als Argumente der ϑ-Function einführt. Das Integral u_μ hat an dem Querschnitte (a_μ) den Periodicitätsmodul πi, an den übrigen $p-1$ Querschnitten (a) die Periodicitätsmoduln Null, und an dem Querschnitt (b_ν) den Periodicitätsmodul $a_{\mu,\nu}$. In der Nähe der Punkte ε gilt die Entwickelung

$$(a.) \qquad u_\mu = u_\mu(\varepsilon_k) + a_\mu^{(k)}\sigma_k + b_\mu^{(k)}\sigma_k^2 + \cdots.$$

Im Allgemeinen, d. h. wenn $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m$ weder im Unendlichen liegen noch Verzweigungspunkte sind, ist

$$a_\mu^{(k)} = \frac{\varphi_\mu(s_k, z_k)}{\frac{\partial F(s_k, z_k)}{\partial s_k}}.$$

Die Integrale zweiter Gattung $t_1 \dots t_m$ können wir uns so gewählt denken, dass ihre Periodicitätsmoduln an den p Querschnitten (a) verschwinden. Denn gesetzt, t_k hätte an den Querschnitten $(a_1), \dots (a_p)$ die Periodicitätsmoduln $\tau_{k,1}, \dots \tau_{k,p}$, so hat man nur $t_k = t'_k + \frac{1}{\pi i}(\tau_{k,1}u_1 + \cdots + \tau_{k,p}u_p)$ einzuführen, damit t'_k die angegebene Eigenschaft besitze. Dann reduciren sich die Bedingungen dafür, dass die Periodicitätsmoduln des Ausdruckes

$$s' = \beta_1 t_1 + \cdots + \beta_m t_m + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \text{const.}$$

an den Querschnitten (a) verschwinden, auf die Gleichungen

$$\alpha_1 \pi i = 0, \quad \alpha_2 \pi i = 0, \quad \dots \quad \alpha_p \pi i = 0.$$

Die übrig bleibenden Constanten β sind nur noch den p Bedingungsgleichungen für das Verschwinden der Periodicitätsmoduln an den Querschnitten (b) unterworfen, welche im Folgenden entwickelt werden sollen.

Das ganze Integral $\int u_\mu\,dv$ durch die Begrenzung der Fläche T' (d. i. die durch die Querschnitte (a) und (b) einfach zusammenhängend gemachte

Fläche T) erstreckt, ist gleich $\int(u_{\mu}^{+}-u_{\mu}^{-})dv$, unter u_{μ}^{+} und u_{μ}^{-} die Werthe von u_μ auf den positiven und auf den negativen Seiten der Querschnitte verstanden und letzteres Integral positiv nur durch die positiven Seiten aller Querschnitte erstreckt. Dies ergiebt als Betrag des Integrales, analog wie in §. 20 der *Riemann*schen Abhandlung:

$$\pi i B_\mu - \sum_{\nu=1\dots p} A_\nu a_{\mu,\nu},$$

wo A und B die Periodicitätsmoduln von v an den Querschnitten (a) und (b) bezeichnen. — Andrerseits ist das Integral $\int u_\mu dv$ gleich der Summe der um die Punkte ε herum erstreckten Integrale, wobei, wenn einer der Punkte ein $(n-1)$facher Verzweigungspunkt ist, die Curve, über welche um diesen Punkt herum integrirt wird, n ganze Umläufe machen muss, um geschlossen zu sein. Auf diese Weise gelangt man zu der Gleichung

$$(1.)\qquad \pi i B_\mu - \sum_{\nu=1\dots p} A_\nu a_{\mu,\nu} = -2\pi i \sum_{k=1\dots m} \beta_k a_\mu^{(k)},$$

welche, da μ die Werthe $1, 2, \dots p$ annehmen kann, p Gleichungen repraesentirt und die Abhängigkeit der Periodicitätsmoduln A und B von der Lage der Punkte ε enthält.

Im Folgenden sei der Einfachheit wegen vorausgesetzt, dass alle Punkte ε im Endlichen liegen und nicht Verzweigungspunkte sind. Dann geht die Gleichung (1.) über in

$$(2.)\qquad \pi i B_\mu - \sum_{\nu=1\dots p} A_\nu a_{\mu,\nu} = -2\pi i \sum_{k=1\dots m} \frac{\beta_k \varphi_\mu(s_k, z_k)}{\frac{\partial F(s_k, z_k)}{\partial s_k}}.$$

Mit Hülfe dieser Formel verwandeln sich die oben erwähnten p Gleichungen $B_1 = 0$, $B_2 = 0$, $\dots$ $B_p = 0$, da die Periodicitätsmoduln A im vorliegenden Falle gleich Null sind, in

$$\sum_{k=1\dots m} \frac{\beta_k \varphi_\mu(s_k, z_k)}{\frac{\partial F(s_k, z_k)}{\partial s_k}} = 0 \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2 \dots p.$$

Von diesen p Gleichungen wird immer und auch nur dann eine eine Folge der übrigen, wenn sich p Coefficienten $c_1, \dots c_p$ in $\varphi = c_1\varphi_1(s, z) + \dots + c_p\varphi_p(s, z)$ so bestimmen lassen, dass $\dfrac{\varphi(s_k, z_k)}{\frac{\partial F(s_k, z_k)}{\partial s_k}}$ gleich Null ist für jeden der m Werthe von k, oder wenn die m Punkte ε solche sind, in denen ausser den r zusammengefallenen sich aufhebenden Verzweigungspunkten eine Function φ ver-

schwinden kann. Ebenso können zwei oder mehrere von den p Gleichungen aus den übrigen folgen und man kann das allgemeine Resultat in folgender Weise aussprechen:

Wird eine Function s' in m Punkten unendlich gross erster Ordnung und können in diesen m Punkten q Functionen $\frac{\varphi(s,z)}{\frac{\partial F}{\partial s}}$ verschwinden, zwischen denen keine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten besteht, so enthält s' die Zahl $m-p+1+q$ willkürlicher Constanten.

Sei z. B. $F(s,z)=0$ die Gleichung einer Curve fünfter Ordnung. Dann ist im Allgemeinen, d. h wenn die Curve keinen Doppelpunkt besitzt, $p=6$; die endlich bleibenden Integrale sind:

$$\int \frac{as^2+bsz+cz^2+ds+ez+f}{\frac{\partial F}{\partial s}}\, dz,$$

also jede ganze Function zweiten Grades ist eine Function φ. Die Function

$$s' = \frac{as+bz+c}{a_1 s+b_1 z+c_1}$$

wird in den 5 Punkten unendlich, in denen die Gerade $a_1 s+b_1 z+c_1=0$ die gegebene Curve schneidet. In diesen 5 Punkten verschwinden 3 von einander linear unabhängige Functionen φ, nämlich: $a_1 s+b_1 z+c_1$, $(a_1 s+b_1 z+c_1)s$ und $(a_1 s+b_1 z+c_1)z$. Daher enthält s' die Anzahl $5-6+1+3=3$ willkürlicher Constanten, in der That die a, b, c.

Hat die gegebene Curve fünften Grades einen Doppelpunkt, so ist $p=5$. Dann sind, wenn $g=0$, $h=0$ zwei durch den Doppelpunkt gehende Gerade bedeuten, nur $(a_1 s+b_1 z+c_1)g$ und $(a_1 s+b_1 z+c_1)h$ Functionen φ, die in den 5 Punkten Null sind, in denen s' unendlich ist und s' enthält wiederum $5-5+1+2=3$ Constanten.

Liegen die Punkte ε theilweise im Unendlichen, so muss man nach der Anzahl von Functionen φ fragen, die von niedrigerem als dem höchst möglichen Grade sind und in den Punkten ε verschwinden, die im Endlichen liegen.

Bei ganz allgemeiner Lage der Punkte ε lässt sich die Regel über die Anzahl der Constanten nur so fassen: Sind $c_1 \dots c_p$ zu bestimmende Constanten und sind die endlich bleibenden Integrale durch die Reihen (α) dargestellt, so enthält eine algebraische Function, die in m Punkten unendlich erster Ordnung ist, $m-p+1+q$ wilkürliche Constanten, wenn es q nicht linear von einander

abhängige Functionen

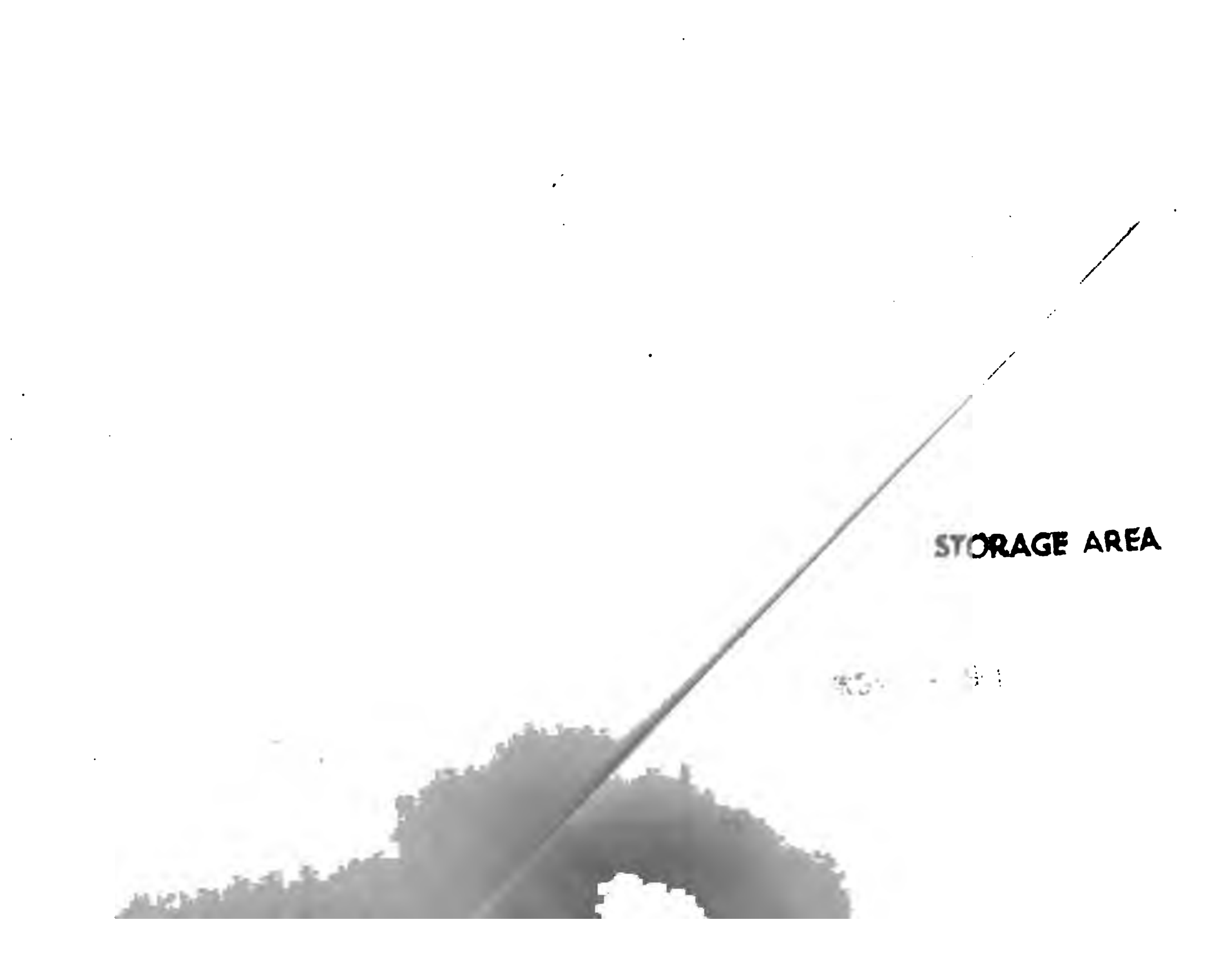
$$c_1 a_1 + \cdots + c_p a_p, \qquad a_\nu = \frac{du_\nu(s, z)}{d\sigma}$$

giebt, welche in den Punkten ε verschwinden.

Für die Bestimmung der Functionen, die in einzelnen Punkten unendlich von höherer Ordnung werden, kann man entweder in dem Vorigen Punkte ε auf einander fallen lassen oder die Betrachtungen selbstständig anstellen durch Benutzung der Coefficienten höherer Potenzen von σ in den Reihen (α).

Die Gleichungen (1.) enthalten Resultate für die ganzen Integrale zweiter Gattung, welche von *Weierstrass* für hyperelliptische Integrale schon früher gegeben worden sind.

Halle, 1864.


STORAGE AREA

STORAGE AR

